EUGENIO BERTINI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

INTRODUZIONE

ALLA

GEOMETRIA PROIETTIVA DEGLI IPERSPAZI

2

CON

APPENDICE SULLE CURVE ALGEBRICHE

E LORO SINGOLARITÀ

200 giorni d'indulgenza a chi lo legge tutto

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1907

Si chiarapprovo 200 giorni. Indulgenza plenaria applicabile anche ai defunti a chi lo legge tutto

Pisa - Stabilimento Tipografico Succ. FF. Nistri - 1907.

PREFAZIONE

Queste lezioni apparvero per la prima volta nell'anno scolastico 1898-99, redatte dal Dott. G. Scorza, allora mio assistente di Geometria proiettiva e descrittiva, in poche copie litografate, per uso esclusivo dei miei studenti.

Mi sono indotto ora a pubblicare per le stampe le lezioni stesse, dopo averle rivedute ed accresciute di varî argomenti, nella speranza che potesse essere di qualche utilità ai giovani del 2.° biennio delle nostre Facoltà matematiche il trovare raccolte in un volume e metodicamente esposte teorie sparse in un gran numero di Memorie e fondamentali per chi voglia seguire con profitto gli ultimi grandi progressi della Geometria moderna. Il che finora non è stato fatto, se si eccettua il libro dello Schoute: *Mehrdimensionale Geometrie* (Leipzig 1902, 1905), che ha col presente qualche punto di affinità, ma che ne differisce essenzialmente per due ragioni. L'una è che ivi la Geometria analitica degli iperspazî si fa derivare da postulati e concetti sintetici, mentre qui essa è semplice interpretazione di nozioni e teoremi algebrici. L'altra ragione, la principale, sta nella scelta degli argomenti, dei quali lo Schoute preferisce quelli di Geometria metrica.

Invece in queste lezioni le teorie esposte appartengono tutte alla Geometria proiettiva, e sono poste in particolare rilievo quelle di più larga e frequente applicazione nella Geometria delle trasformazioni birazionali. Anzi il proposito di fornire ai giovani utili cognizioni per questi studî ulteriori, proposito che trovò facile attuazione nelle intime relazioni che corrono fra le due menzionate Geometrie, spieghi, se non giustifichi, l'avere introdotto in questo libro alcuni concetti e teoremi che non rispondono strettamente al titolo del libro stesso. E la considerazione di avviare i giovani agli studî di Geometria sopra una curva mi determinò pure ad aggiungere in fine un'Appendice, in cui sono trattati alcuni argomenti, aventi per quegli studî particolare interesse, quali i rami delle curve algebriche, la scomposizione delle singolarità delle curve piane, ecc..

Non debbo tacere un'altra osservazione che si riferisce alle indicazioni bibliografiche. Accolta l'idea di questa pubblicazione, mi accorsi che non ne sarei facilmente venuto a capo, almeno così presto come mi era proposto, se avessi voluto presentare un quadro completo e fissare la relativa importanza dei numerosi lavori algebrici e geometrici ad essa attinenti, per la molta delicatezza ed estensione delle ricerche a ciò necessarie. Il lettore non voglia adunque vedere nei cenni bibliografici, che troverà a piè di pagina, altro che notizie destinate ad orientarlo e a dargli i mezzi per arrivare alla precisa conoscenza dei suddetti lavori. Varie citazioni ed osservazioni sono fatte a vantaggio degli studenti del 2.° biennio delle nostre Facoltà matematiche, ai quali, come ho già detto, il libro è particolarmente indirizzato.

La nozione di iperspazio si presentò certo spontaneamente a quei matematici che, avendo a trattare questioni ove figuravano più di tre variabili, vollero interpretare questo fatto in modo analogo a quello che, nel caso di 1, 2 o 3 variabili, è dato dalla ordinaria Geometria analitica, cercando in questa nuova visione dei problemi un aiuto alla loro soluzione. È quindi naturale che per trovare le prime traccie di quella nozione occorra risalire un po' indietro [1]): ma uno sviluppo esplicito di essa in varie direzioni (Fondamenti della Geometria, Analysis situs, Geometria differenziale, Trasformazioni birazionali,...) si è avuto soltanto, a cominciare dalla metà circa del secolo scorso, per opera di Cayley, Grassmann, Riemann, Beltrami, Schläfli, Betti, Kronecker, Lie, Klein, Noether, Halphen, Jordan, D'Ovidio, Clifford,.... Sebbene nei lavori di questi matematici sieno sparsi

[1]) Veggasi la nota al n. 1 del Cap. XI del libro di Loria, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (Torino, 1896). Si vegga pure il detto Cap. per i brevi cenni che seguono. Cfr. anche Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* (Rivista di Matematica, 1891), lavoro tradotto in inglese con aggiunte (Bull. of the American mathem. soc., 10 (2), 1904), § VIII e seg.

molti concetti e teoremi di Geometria proiettiva degli iperspazï, ed anzi in varï di essi si trattino argomenti direttamente o indirettamente relativi a tale dottrina, tuttavia si può affermare che il primo lavoro organico di carattere generale in quel particolare indirizzo è dovuto a Veronese [1]). Il quale non solo sviluppò il metodo delle proiezioni negli iperspazï, ma ne mostrò la fecondità con felici applicazioni a varie forme geometriche, specie alle curve algebriche di genere qualunque, applicazioni che furono poi dal Veronese continuate in lavori posteriori. Al Veronese si deve pure un'opera di lunga lena e di molto merito [2]), nella quale è introdotto e sviluppato un sistema di postulati posto a base di tutta la Geometria metrica e proiettiva degli spazï ad un numero qualunque di dimensioni.

Due anni dopo la pubblicazione della suddetta Memoria di Veronese, vennero in luce, in breve tempo, numerosi lavori di Segre, il quale, seguendo il metodo iperspaziale, portò un contributo di gran valore ai progressi della Geometria. In quelli fra essi consacrati alla Geometria proiettiva degli iperspazï (ai quali limitiamo qui il discorso), egli riprese lo studio delle teorie fondamentali, alcune delle quali erano appena abbozzate, ed associando ai concetti sintetici gli importanti teoremi algebrici di Weierstrass, Kronecker, Frobenius,... diede un ampio ed ordinato sviluppo alle teorie stesse, arricchendole di metodi e risultati nuovi. Insieme a queste pubblicazioni di Segre ne apparvero altre di Del Pezzo, Castelnuovo, Predella, Enriques,... che pure recarono notevoli perfezionamenti alla Geometria proiettiva degli iperspazï e ne estesero i confini [3]).

Nella compilazione di questo libro, come si vedrà dalle citazioni, ho tratto molte proprietà e dimostrazioni dai lavori di Segre: ed è mio dovere dichiarare che mi sono valso altresì degli estesi sunti manoscritti che il Segre stesso elabora annualmente per i suoi corsi e che egli, con amiche-

---

[1]) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume...* (Math. Ann., 19, 1882).

[2]) Trovasi citata nella nota al n. 22, Cap. 2.°.

[3]) Si prescinde, come già si è avvertito, dalla Geometria delle trasformazioni birazionali degli enti algebrici semplicemente e doppiamente infiniti, coltivata fra noi con grande successo da Segre, Castelnuovo, Enriques, Severi.

vole gentilezza, mise a mia disposizione [1]). Di che e dei preziosi consigli datimi su varie questioni relative a detta compilazione gli rendo qui vivissime grazie.

E grazie rendo pure al Prof. F. Severi che in alcuni punti mi diede aiuto efficacissimo e al Dott. S. Medici, ora mio assistente di Geometria proiettiva e descrittiva, che mi porse opportuni avvertimenti per la chiarezza del testo e molto mi giovò nella revisione delle prove di stampa.

Rivolgo in fine una preghiera ai colleghi ed è che, avendo occasione di notare in questo libro imperfezioni o lacune, vogliano essere cortesi di avvertirmene.

Pisa, Dicembre 1906.

E. Bertini.

---

1) Così talune pagine dell'Appendice sono riprodotte dal corso del Segre del 1898-99.

Capitolo 1.°

Lo spazio S_r.

1. — La geometria proiettiva ordinaria porge innumerevoli esempî di totalità di elementi, tali che possa stabilirsi una corrispondenza biunivoca algebrica senza eccezioni tra gli elementi della totalità e i valori dei rapporti di un certo numero di parametri $x_0, x_1, \ldots, x_r$, supposto che questi parametri prendano tutti i valori possibili, ma non siano mai tutti nulli e nessuno divenga infinito. Tali sono le totalità dei punti di una retta o delle rette di un fascio, dei punti o delle rette di un piano, dei raggi o dei piani di una stella, dei punti o dei piani dello spazio ordinario, delle coniche di un piano, delle quadriche dello spazio ordinario, ecc., ecc.

Ora le proprietà di tali totalità possono distinguersi in due grandi classi: le une dipendono dalla natura speciale degli elementi da cui le totalità stesse sono costituite, le altre dipendono puramente dalla circostanza detta, che gli elementi della totalità corrispondono biunivocamente e algebricamente, senza eccezioni, ai gruppi di valori (a meno di un fattore di proporzionalità) di un certo numero di parametri.

Quando si vuole studiare la seconda classe di proprietà è indifferente pensare o no alla natura speciale dell'elemento della totalità. Perciò, astraendo da ogni possibile rappresentazione geometrica od intuitiva, si definisce *spazio ad r dimensioni* e si indica con S_r, o anche con $[r]$, *la totalità formata da tutti i gruppi di valori (reali o complessi) dei rapporti di $r+1$ parametri $x_0, x_1, \ldots, x_r$*: escluso che questi parametri possano diventare tutti nulli o alcuno infinito. Ogni tale gruppo dicesi *punto* dell'S_r e le $x_0, x_1, \ldots, x_r$ si chiamano le sue *coordinate omogenee*, mentre si dicono *coordinate non omogenee del punto* i rapporti di r delle $x_0, x_1, \ldots, x_r$ alla rimanente.

Se si tratta di applicare il concetto numerico di spazio S_r, ora definito, a determinate totalità geometriche ∞^r, si suol dire anche punto ogni elemento di tali totalità. In questo senso si dice lo spazio a 5 dimensioni delle coniche di un piano; lo spazio a 9 dimensioni delle quadriche dello spazio ordinario; ecc..

Si indicherà con x il punto di coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_r$, o, brevemente, di coordinate x_i, distinguendo con indici in alto punti diversi fra loro. Così il punto $x^{(j)}$ è il punto di coordinate $x_i^{(j)}$ o di coordinate $x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \ldots, x_r^{(j)}$.

Gli $r+1$ punti che hanno tutte le coordinate nulle meno una, cioè che hanno rispettivamente le coordinate

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \end{matrix}$$

prendono nome di *punti fondamentali* e si indicheranno sempre in seguito ordinatamente con $A_0, A_1, \ldots, A_r$. Il loro insieme dicesi *piramide fondamentale*. Il punto che ha tutte le coordinate eguali, cioè

$$1, 1, \ldots, 1, 1$$

si chiama *punto unità* e si designerà con U.

2. — Sieno $x^{(j)}$ $(j=0, 1, \ldots, k)$ $k+1$ punti del nostro spazio S_r e si considerino le $r+1$ equazioni lineari

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda^{(0)} x_0^{(0)} + \lambda^{(1)} x_0^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_0^{(k)} = 0 \\ \lambda^{(0)} x_1^{(0)} + \lambda^{(1)} x_1^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_1^{(k)} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda^{(0)} x_r^{(0)} + \lambda^{(1)} x_r^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_r^{(k)} = 0 \end{cases}$$

che si ottengono dall'eguagliare a zero le stesse combinazioni lineari, (con parametri $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$,) delle coordinate omonime dei $k+1$ punti. Questi $k+1$ punti si chiameranno *dipendenti o indipendenti*, secondochè esistono valori non tutti nulli dei parametri $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$, che soddisfano le (1), ovvero non esistono, cioè le (1) sono soddisfatte soltanto da valori tutti nulli dei parametri stessi.

Se $k+1>r+1$, *i punti sono necessariamente dipendenti*, perchè, indicando con $c\,(\leq r+1)$ la caratteristica della matrice delle (1), si può soddisfare a queste prendendo a piacere i valori di certi $k+1-c\ (>0)$ dei parametri $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$ [1]).

Se $k+1 \leq r+1$, la caratteristica c della matrice delle (1) è $\leq k+1$. Quando $c=k+1$, i $k+1$ punti sono indipendenti, perchè le (1) non possono essere soddisfatte che da valori tutti nulli di $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$, ed invece, quando $c<k+1$, i $k+1$ punti sono dipendenti [2]). Convenendo, come si suole, di chiamar *nulla* una matrice quando sono nulli tutti i suoi minori di ordine massimo e *diversa da zero* nel caso contrario, si può adunque dire che $k+1\ (\leq r+1)$ *punti di* S_r *sono dipendenti o indipendenti secondochè la matrice delle loro coordinate*

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_0^{(0)} x_0^{(1)} & \ldots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(0)} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(k)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r^{(0)} x_r^{(1)} & \ldots & x_r^{(k)} \end{vmatrix}$$

è $=0$ *o* $\neq 0$.

3. — Se la matrice (2) è $\neq 0$, è pure $\neq 0$ la matrice che si ottiene da essa prendendo (ad es.) le prime $h+1$ colonne, perchè se tutti i determinanti d'ordine massimo di questa fossero nulli, lo sarebbero anche quelli di ordine massimo della (2). Onde *se* $k+1$ *punti sono indipendenti, lo sono altresì* $h+1\ (<k+1)$ *qualunque di essi*. Inoltre *si possono aggiungere, in infiniti modi, a* $k+1$ *punti indipendenti, altri* $r-k$ *così da avere* $r+1$ *punti indipendenti*. Basta aggiungere alla (2) $r-k$ colonne con coordinate generiche. Così, supposto $\neq 0$ il determinante delle prime $k+1$ linee, basta aggiungere i punti fondamentali $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_r$ ai $k+1$ punti dati.(1) v. k. Analisi superiore

4. — Prendansi $k+1$ punti indipendenti $x^{(j)}\ (j=0, 1, \ldots, k)$ e si facciano delle loro coordinate omonime le medesime combinazioni lineari; cioè si ponga

$$(3)\qquad x_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_i^{(k)} \quad (i=0, 1, \ldots, r).$$

---

[1]) Cfr., ad es., CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica*, terza edizione (Napoli, Pellerano, 1902) n. 444.

[2]) Cfr. CAPELLI, *l. c.*, n. 445.

Supponiamo dapprima che sia $k+1=r+1$. Allora, essendo per ipotesi il determinante delle coordinate $x_i^{(j)}$ differente da zero, dalle (3) potranno ricavarsi le $\lambda^{(i)}$ espresse linearmente ed omogeneamente per le x_i. Ciò dimostra che, al variare delle $\lambda^{(i)}$, otteniamo dalle (3) tutti i punti del nostro spazio S_r; ossia ogni punto potrà considerarsi come individuato sia dalle x_i, sia dalle $\lambda^{(i)}$. Si ha così una *trasformazione di coordinate* (delle x_i nelle $\lambda^{(i)}$ o viceversa). I punti della nuova piramide fondamentale, cioè i punti che nelle coordinate $\lambda^{(i)}$ hanno tutte le coordinate nulle meno una, sono precisamente, come si vede dalle (3), gli $r+1$ punti dati, che nel nuovo sistema di coordinate sono ancora indipendenti. Anzi, a tale proposito, si osservi che sempre la dipendenza o no dei punti di un gruppo si mantiene attraverso ad una trasformazione di coordinate e quindi non dipende menomamente dalla scelta particolare di queste. Per dimostrarlo basta considerare $r+1$ punti (n. 3) e osservare che il determinante delle loro coordinate x_i (ad es.) è il prodotto del determinante della trasformazione per il determinante delle loro coordinate $\lambda^{(i)}$.

5. — Suppongasi ora $k+1<r+1$. Si vede subito, tenendo conto della indipendenza dei punti $x^{(j)}$ $(j=0,1,\dots,k)$, che due sistemi di valori delle $\lambda^{(i)}$ che conducono, per le (3), allo stesso punto x di S_r differiscono solo per un fattore di proporzionalità. Infatti, se quei due sistemi di valori sono: $\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(k)}$; $\lambda_1^{(0)}, \lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(k)}$, deve aversi, ρ essendo un fattore di proporzionalità,

$$\lambda_0^{(0)} x_i^{(0)} + \dots + \lambda_0^{(k)} x_i^{(k)} = \rho(\lambda_1^{(0)} x_i^{(0)} + \dots + \lambda_1^{(k)} x_i^{(k)}) \quad (i=0,1,\dots,r),$$

ossia

$$(\lambda_0^{(0)} - \rho\lambda_1^{(0)})\, x_i^{(0)} + \dots + (\lambda_0^{(k)} - \rho\lambda_1^{(k)})\, x_i^{(k)} = 0 \quad (i=0,1,\dots,r);$$

quindi, poichè i punti $x^{(j)}$ sono indipendenti, deve essere (n. 2)

$$\lambda_0^{(0)} - \rho\lambda_1^{(0)} = 0\,, \ \dots\,, \ \lambda_0^{(k)} - \rho\lambda_1^{(k)} = 0\,,$$

come appunto volevasi dimostrare.

Tutti i punti, che si ottengono dalle (3) al variare dei parametri $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$, diremo quindi che costituiscono una totalità ∞^k: e, siccome i punti di questa totalità si possono far corrispondere biunivocamente (senza eccezione) ai sistemi di valori (a meno di un fattore di proporzionalità) dei parametri suddetti, diremo che la totalità stessa è uno *spazio lineare* (o semplicemente *spazio*) *a k dimensioni* e precisamente uno *spazio* S_k *subordinato dell'* S_r. I punti fondamentali dello spazio S_k nella sua rappresentazione parametrica, ottenuta mediante le $\lambda^{(i)}$, sono evidentemente i $k+1$ punti considerati $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$.

Se questi $k+1$ punti si prendono fra gli $r+1$ punti fondamentali di S_r (certo indipendenti) e sono, ad es., i punti $A_0, A_1, \dots, A_k$, le (3) divengono

$$(4) \qquad x_0 = \lambda^{(0)}\,,\; x_1 = \lambda^{(1)}\,,\; \dots\,,\; x_k = \lambda^{(k)}\,,\; x_{k+1} = 0\,,\; \dots\,,\; x_r = 0\,;$$

quindi, facendo variare in tutti i modi possibili $k+1$ coordinate dei punti dell' S_r e prendendo tutte le altre eguali a zero, si ottengono tutti i punti dello spazio subordinato S_k determinato dai $k+1$ punti fondamentali, che hanno i medesimi indici di quelle coordinate. Gli spazî subordinati di tal natura diconsi *spazî subordinati fondamentali* dell'S_r; e inoltre due spazî fondamentali S_k, S_{r-k-1} costruiti rispettivamente l'uno con $k+1$ punti qualunque dei fondamentali, l'altro coi punti rimanenti, diconsi *spazî fondamentali opposti*.

Reciprocamente le (3) rendono immediatamente evidente che, dato uno spazio S_k (di coordinate $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$), si può in infiniti modi pensarlo come subordinato di uno spazio S_r ad un maggior numero di dimensioni.

6. — Fra gli spazî subordinati dell' S_r ($r > 3$) quelli a 1, 2, 3 dimensioni, per una considerazione tutt'affatto naturale, si dicono *rette, piani, spazî ordinarî* dell' S_r. Gli altri spazî subordinati non hanno nomi speciali, tranne quelli ad $r-1$ dimensioni che si dicono gli *iperpiani* di S_r.

Notiamo poi che la serie degli spazî subordinati si completa aggiungendovi quelli a zero dimensioni, chiamando S_0 un punto qualsivoglia dell' S_r.

7. — Alla definizione di punti dipendenti si può dare ora una forma più espressiva. In vero, dati $k+1$ punti dipendenti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, sia $h+1$ ($< k+1$) il massimo numero di punti indipendenti, che si possono scegliere fra essi; e tali sieno, per fissar le idee, i primi $h+1$ punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}$. Per conseguenza gli $h+2$ punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}, x^{(h+1)}$ (ad es.) saranno dipendenti, cioè (n. 2) sussisteranno le

$$\lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \dots + \lambda^{(h)} x_i^{(h)} + \lambda^{(h+1)} x_i^{(h+1)} = 0 \qquad (i = 0\,, 1\,, \dots\,, r)$$

per valori non tutti nulli delle $\lambda^{(i)}$. Questo sistema di equazioni avrà quindi la caratteristica della sua matrice $\leq h+1$, e precisamente $= h+1$, perchè la matrice delle coordinate degli $h+1$ punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}$ ha appunto questa caratteristica. Anzi da questo fatto risulta [1]), che nel precedente sistema di equazioni si può prendere $\lambda^{(h+1)}$ arbitrariamente e quindi $\neq 0$. Ciò significa che il punto $x^{(h+1)}$ appartiene allo spazio S_h (spazio subordinato di S_r o S_r medesimo) determinato dai detti $h+1$ punti: e la stessa cosa si conclude analogamente per i punti $x^{(h+2)}, \dots, x^{(k)}$. Adunque $k+1$ *punti linearmente dipendenti sono tali che fra essi si possono scegliere* $h+1$ $(< k+1)$ *linearmente indipendenti sì che tutti i* $k+1$ *punti stanno nello spazio determinato dagli* $h+1$. Viceversa, se agli $h+1$ punti determinanti un S_h si aggiungono altri punti di esso, è evidente che si ottiene un gruppo di punti dipendenti di S_h.

Giova notare che le (3) possono servire in ogni caso a dare, variando le $\lambda^{(i)}$, tutti i punti di uno spazio subordinato S_h (o dello stesso S_r). Giacchè, se i punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ sono dipendenti, basta sostituire (mantenute le denominazioni di dianzi) ad $x^{(h+1)}, x^{(h+2)}, \dots, x^{(k)}$ le loro espressioni lineari nelle $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}$. Però lo spazio dato dalle (3) è ora di dimensione $h<k$, nè possono le $\lambda^{(i)}$ assumersi come coordinate di esso, ad ogni punto corrispondendo evidentemente ∞^{k-h+1} gruppi di valori delle $\lambda^{(i)}$ (o ∞^{k-h} di valori dei loro rapporti).

8. — Se $k+1$ punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ sono indipendenti in S_r, essi individuano un S_k definito dalle

$$y_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \dots + \lambda^{(k)} x_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

ove, per comodità di dimostrazione, indichiamo adesso con y_i le coordinate di un punto corrente di S_r. Prendansi nell'S_k, assunto per un momento come spazio fondamentale, cioè riferendosi alle coordinate $\lambda^{(i)}$, $k+1$ punti indipendenti $(\lambda_0^{(0)} \lambda_0^{(1)} \dots \lambda_0^{(k)})$, $(\lambda_1^{(0)} \lambda_1^{(1)} \dots \lambda_1^{(k)})$, ..., $(\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} \dots \lambda_k^{(k)})$: dovrà essere il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^{(0)} \lambda_0^{(1)} & \dots & \lambda_0^{(k)} \\ \lambda_1^{(0)} \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(k)} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} & \dots & \lambda_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Siccome $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ sono indipendenti in S_r, la matrice delle loro

---

[1]) Cfr. CAPELLI, *l. c.*, n. 444.

coordinate sarà $\neq 0$. Sia, per esempio, il determinante

$$\begin{vmatrix} x_0^{(0)} x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(0)} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{(0)} x_k^{(1)} & \dots & x_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Moltiplicando i due determinanti per linee e indicando con $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(k)}$ le coordinate in S_r dei $k+1$ punti suindicati di S_k, si trova

$$\begin{vmatrix} y_0^{(0)} y_0^{(1)} & \dots & y_0^{(k)} \\ y_1^{(0)} y_1^{(1)} & \dots & y_1^{(k)} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ y_k^{(0)} y_k^{(1)} & \dots & y_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

e quindi $\neq 0$ la matrice delle coordinate dei $k+1$ punti $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$. Questi punti sono adunque indipendenti anche in S_r. Il risultato si può manifestamente invertire, poichè, dall'essere diversi da zero il secondo e terzo determinante, segue che è pure diverso da zero il primo. Inoltre la conclusione, per il n. 3, si può estendere ad un numero di punti di S_k minore di $k+1$. Ne discende, che più punti dipendenti di S_k sono pure dipendenti in S_r, e viceversa. Adunque *punti, in numero qualunque, dipendenti (o indipendenti) in uno spazio subordinato sono tali anche in* S_r, *e reciprocamente.*

9. — Dimostriamo ora un teorema, di cui è caso particolare la proprietà ben nota di geometria elementare: esiste una retta in un piano se ha con esso due punti comuni.

Consideriamo l'S_k subordinato di S_r definito dalle solite formole:

$$x_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \dots + \lambda^{(k)} x_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, \dots, r) \tag{3}$$

e prendiamo in esso $h+1$ punti qualunque $(\lambda_0^{(0)} \lambda_0^{(1)} \dots \lambda_0^{(k)})$, $(\lambda_1^{(0)} \lambda_1^{(1)} \dots \lambda_1^{(k)})$, $\dots$, $(\lambda_h^{(0)} \lambda_h^{(1)} \dots \lambda_h^{(k)})$. Diremo ordinatamente $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(h)}$ le coordinate di questi punti in S_r, coordinate che si ottengono dalle formole precedenti ponendo per $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$ gli indicati valori. Gli $h+1$ punti in discorso staccheranno dall'S_r uno spazio subordinato S_l $(l \leq h)$ dato, al variare delle $\mu^{(i)}$, dalle formole

$$x_i = \mu^{(0)} y_i^{(0)} + \mu^{(1)} y_i^{(1)} + \dots + \mu^{(h)} y_i^{(h)} \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

ovvero, sostituendo per le y_i le loro espressioni, dalle

$$x_i = \mu^{(0)}(\lambda_0^{(0)} x_i^{(0)} + \ldots + \lambda_0^{(k)} x_i^{(k)}) + \ldots + \mu^{(h)}(\lambda_h^{(0)} x_i^{(0)} + \ldots + \lambda_h^{(k)} x_i^{(k)}) \quad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

Queste eguaglianze mostrano che le coordinate x_i dei punti di S_l si ottengono dando nelle (3) alle $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$ i seguenti valori:

$$\lambda^{(0)} = \mu^{(0)}\lambda_0^{(0)} + \mu^{(1)}\lambda_1^{(0)} + \ldots + \mu^{(h)}\lambda_h^{(0)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda^{(k)} = \mu^{(0)}\lambda_0^{(k)} + \mu^{(1)}\lambda_1^{(k)} + \ldots + \mu^{(h)}\lambda_h^{(k)}.$$

Onde *un certo numero di punti di uno spazio subordinato* S_k *determina in* S_r *uno spazio subordinato* S_l *tutto contenuto in* S_k *(o coincidente con esso): anzi* S_l *è da dirsi anche spazio subordinato di* S_k.

Una prima conseguenza è che i $k+1$ punti, che si prendono ad individuare uno spazio subordinato S_k, possono essere $k+1$ suoi punti indipendenti qualunque.

Altra conseguenza importante è questa: — *Due spazî subordinati di* S_r *o non hanno alcun punto comune, o hanno comuni tutti i punti di un terzo spazio subordinato di* S_r. — Infatti se i due spazî subordinati hanno comune un S_l e un punto non giacente in S_l, o, come dicesi, esterno ad S_l, essi hanno necessariamente comune un S_{l+1}; perchè $l+1$ punti indipendenti di S_l e il detto punto esterno costituiscono $l+2$ punti indipendenti (se no, per il n. 7, dovrebbero tutti gli $l+2$ punti esistere in S_l), i quali, stando nell'uno e nell'altro spazio subordinato, individuano un S_{l+1} che, per la precedente proposizione, sta pure in entrambi. Che se questi avessero, oltre S_{l+1}, ancora un punto comune, si ripeterebbe lo stesso ragionamento e così di seguito, potendo al più accadere che si trovi infine uno dei due spazî giacere per intero nell'altro.

10. — Consideriamo due spazî subordinati S_k ed $S_{k'}$ di S_r che non abbiano alcun punto comune, o, come suol dirsi, *indipendenti* e cerchiamo qual'è lo spazio subordinato di minima dimensione che li contiene amendue.

Prendiamo in S_k $k+1$ punti indipendenti $x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}$ e in $S_{k'}$ $k'+1$ punti indipendenti $y^{(0)}, \ldots, y^{(k')}$. I $k+k'+2$ punti di S_r così ottenuti sono certo indipendenti, perchè altrimenti sussisterebbero le relazioni

$$\rho_0 x_i^{(0)} + \ldots + \rho_k x_i^{(k)} + \sigma_0 y_i^{(0)} + \ldots + \sigma_{k'} y_i^{(k')} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

per valori non tutti nulli delle ρ, σ; cioè, non potendo essere le ρ o le σ separatamente nulle tutte, perchè ne seguirebbe la dipendenza dei punti $y^{(0)}, \ldots, y^{(k')}$ ovvero dei punti $x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}$, dovrebbe essere

$$\rho_0 x_i^{(0)} + \ldots + \rho_k x_i^{(k)} = -(\sigma_0 y_i^{(0)} + \ldots + \sigma_{k'} y_i^{(k')}) \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

onde i due spazi S_k, $S_{k'}$ avrebbero (almeno) un punto comune, contro l'ipotesi. Allora questi $k + k' + 2$ punti indipendenti individuano uno spazio subordinato $S_{k+k'+1}$ che contiene S_k ed $S_{k'}$. Esso è l'unico spazio di dimensione $k + k' + 1$ che li contiene ed è contenuto in ogni altro spazio (di dimensione maggiore) nel quale essi giacciano, perchè ogni spazio che contenga S_k, $S_{k'}$, deve contenere i detti $k + k' + 2$ punti.

Inversamente, se lo spazio di dimensione minima contenente due spazî dati S_k, $S_{k'}$ ha la dimensione $k + k' + 1$, gli spazî S_k, $S_{k'}$ non hanno alcun punto comune. Altrimenti, aggiungendo ad un punto comune, k punti di S_k e k' di $S_{k'}$ in modo da formarne $k+1$ e $k'+1$ rispettivamente indipendenti, si avrebbero $k + k' + 1$ punti, esistenti al più in un $S_{k+k'}$, nel quale dovrebbero giacere i due spazî dati, contro il supposto.

Così, presi $r+1$ punti indipendenti di S_r e divisi in due gruppi di h e di $r-h+1$ punti, si hanno due spazî S_{h-1} ed S_{r-h} (individuati rispettivamente dai due gruppi), che sono due spazî indipendenti. Per ogni S_{h-1} di S_r si hanno infiniti S_{r-h} da esso indipendenti.

11. — Per esprimere che uno spazio S_t è lo spazio di dimensione minima che contiene due spazî S_k, $S_{k'}$ (o più), si dice che questi *appartengono* ad S_t ovvero che S_t è il loro *spazio d'appartenenza* [1]), o *spazio congiungente*, e, per esprimere che uno spazio S_l è lo spazio di dimensione massima comune a due spazî S_k, $S_{k'}$ (o più), si dice che questi si *tagliano* o *segano* in S_l, ovvero che S_l è il loro *spazio d'intersezione*. Or bene si ha il teorema generale: — *Se due spazî* S_k, $S_{k'}$ *appartengono ad un* S_t *e si segano in un* S_l *si ha la relazione*

$$k + k' = l + t.$$

La proprietà dimostrata nel n. 10 si può considerare come caso particolare di questa se si convenga di dire che *due spazî* S_k, $S_{k'}$ *hanno un* S_{-1} *comune, quando non hanno alcun punto comune.* Si noti poi che il

[1]) In generale *spazio di appartenenza* di un ente (o complesso di enti) è lo spazio (lineare) di dimensione minima che lo contiene.

teorema è evidente se S_k giace totalmente in $S_{k'}$, perchè allora $l = k$ e $t = k'$.

Esclusi i due casi ora considerati, prendiamo in S_k uno spazio S_{k-l-1} indipendente da S_l (n. 10). L'S_{k-l-1} (S_0, se $l = k-1$), non avendo punti comuni con S_l, non ne ha neppure con $S_{k'}$ (per essere S_l spazio d'intersezione): quindi S_{k-l-1} ed $S_{k'}$ appartengono (n. 10) ad un $S_{k+k'-l}$, che contiene anche S_k, in quanto passa per i due spazï indipendenti S_{k-l-1}, S_l che appartengono appunto ad S_k; ed anzi $S_{k+k'-l}$ è lo spazio di dimensione minima contenente S_k ed $S_{k'}$, perchè è quello di dimensione minima contenente S_{k-l-1} ed $S_{k'}$. Dunque $t = k + k' - l$: come volevasi dimostrare. (2)

Ogni spazio contenente due spazï S_k, $S_{k'}$ passa per il loro spazio congiungente (perchè, ripresa la considerazione di dianzi, deve contenere S_{k-l-1} ed $S_{k'}$). È poi evidente che ogni spazio comune a due spazï esiste nel loro spazio d'intersezione.

12. — Faremo ora alcune applicazioni delle cose precedenti, dimostrando varie proprietà che ci saranno utili in seguito.

Anzitutto estendiamo a più spazï la nozione, già data per due, di *spazï indipendenti*. Tali si dicono *m spazï* $S_{k'}, S_{k''}, \ldots, S_{k^{(m)}}$ *se appartengono ad uno spazio* $S_{k'+k''+\ldots+k^{(m)}+m-1}$ (onde deve essere $k'+k''+\ldots+k^{(m)}+m-1 \leq r$). Ciò equivale a dire che due qualunque $S_{k'}$, $S_{k''}$ degli m spazï non hanno punti comuni, cioè appartengono ad uno spazio $S_{k'+k''+1}$; che questo ed un terzo spazio $S_{k'''}$ non hanno pure punti comuni, onde essi e però (cfr. fine del n. 11) $S_{k'}$, $S_{k''}$, $S_{k'''}$ appartengono ad uno spazio $S_{k'+k''+k'''+2}$; e così di seguito. Infatti, se avvenisse, ad es., che $S_{k'+k''+1}$ ed $S_{k'''}$ avessero un punto comune, invece di $S_{k'+k''+k'''+2}$ si troverebbe (n. 11) come loro spazio congiungente un $S_{k'+k''+k'''+1}$ e, seguitando, si troverebbe che la dimensione dello spazio congiungente degli spazï dati sarebbe certamente minore di $k' + k'' + \ldots + k^{(m)} + m - 1$.

Se gli spazï $S_{k'}, S_{k''}, \ldots, S_{k^{(m)}}$ non sono indipendenti, il loro spazio congiungente ha la dimensione $< k' + k'' + \ldots + k^{(m)} + m - 1$.

13. — Due spazï $S_{k'}$, $S_{k''}$ di S_r, quando sia $k' + k'' \geq r$, appartengono in generale allo spazio S_r (a determinarli occorrendo prendere $k' + k'' + 2$ punti, che in generale appartengono a questo spazio) e però si segano (n. 11) in uno spazio $S_{k'+k''-r}$. Parimenti questo spazio e un terzo spazio $S_{k'''}$, quando sia $k' + k'' + k''' \geq 2r$, si segano in generale in uno spazio $S_{k'+k''+k'''-2r}$, cioè questo è in ~~generale~~ lo spazio d'intersezione dei tre

$k'+k''-r+k''' \geq r$ $k'+k''+k''' \geq 2r$

spazî $S_{k'}$, $S_{k''}$, $S_{k'''}$. Seguitando, si conclude *che m spazî* $S_{k'}, S_{k''}, \ldots, S_{k^{(m)}}$, *quando sia* $k'+k''+\ldots+k^{(m)} \geq (m-1)r$, *hanno in generale per spazio d'intersezione uno spazio* $S_{k'+k''+\ldots+k^{(m)}-(m-1)r}$.

Come si è detto, ciò è vero solo in generale, per posizioni mutue speciali degli m spazî essendo manifesto che può crescere la dimensione della loro intersezione.

14. — Consideriamo un numero qualunque di spazî $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}, \ldots$, appartenenti ad S_r e che abbiano comune uno spazio S_l ($a_i > l \geq 0$). Dico che *uno spazio* S_{r-l-1} *indipendente da* S_l *taglia gli spazî* $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}, \ldots$ *in spazî* (alcuni dei quali possono anche non esistere) *appartenenti ad* S_{r-l-1}. Infatti S_{r-l-1} sega S_{a_i} in un S_{a_i-l-1}, perchè (S_{r-l-1} ed S_l e quindi) S_{r-l-1} ed S_{a_i} appartengono ad S_r: anzi S_l ed S_{a_i-l-1} sono spazî indipendenti di S_{a_i}. Segue che, se gli spazî S_{a_i-l-1} appartenessero, anzichè all'S_{r-l-1} considerato, ad un suo spazio subordinato S_{r-l-2} (ad es.), questo S_{r-l-2} ed S_l non avendo alcun punto comune, apparterrebbero ad un S_{r-1}, il quale, contenendo S_l ed S_{a_i-l-1}, conterrebbe anche, contro l'ipotesi fatta, ogni spazio S_{a_i}.

L'enunciato della proposizione suppone soltanto che S_l sia spazio comune agli spazî S_{a_i}, cioè il loro spazio d'intersezione o uno spazio subordinato di questo. Cosicchè se quegli spazî si segano in un S_t, la proposizione potrà applicarsi prendendo per spazio S_l lo spazio S_t o uno qualunque degli spazî a $0, 1, \ldots, t-1$ dimensioni in esso contenuti.

In particolare se h spazî $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, \ldots, S_a^{(h)}$ di egual dimensione a appartenenti ad S_r si tagliano in un S_{a-1}, un S_{r-a}, indipendente da S_{a-1}, taglia quegli spazî in h punti che appartengono ad S_{r-a}. Dunque deve essere $h \geq r-a+1$; e se $h=r-a+1$ i detti h punti sono indipendenti.

15. — Notiamo anche quest'altra proprietà. *Se r+1 spazî* $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, \ldots, S_a^{(r+1)}$ *di egual dimensione a, si tagliano in uno spazio* S_{a-1} *e appartengono ad* S_r, *si può in infiniti modi scegliere* $r+1$ *punti, uno da ciascuno di quegli spazî, così che gli* $r+1$ *punti appartengono ad* S_r. In vero, se si supponesse di poter scegliere $h(\geq 1)$ punti indipendenti (esterni ad S_{a-1}) rispettivamente in h spazî $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, \ldots, S_a^{(h)}$ (ad es.), ma che ogni punto degli spazî rimanenti $S_a^{(h+1)}, \ldots, S_a^{(r+1)}$ fosse dipendente da quegli h, ciò significherebbe che questi spazî rimanenti sarebbero tutti contenuti nell'S_{h-1} individuato dai detti h punti (cfr. n. 7). Il quale S_{h-1}, passando con ciò per l'S_{a-1}, conterrebbe anche $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, \ldots, S_a^{(h)}$, e quindi tutti gli spazî dati; il che, per l'ipotesi, non può essere se non è $h=r+1$.

16. — Nello spazio ordinario si dimostra che più rette, le quali a due a due s'incontrano, stanno in un piano o passano per un punto. In S_r sussiste la stessa proposizione, anzi la seguente più generale. — *Più spazî* $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, S_a^{(3)}, S_a^{(4)}, \ldots,$ *di egual dimensione* a, *i quali a due a due si segano in un* S_{a-1}, *o si segano tutti in un* S_{a-1} *o appartengono tutti ad un* S_{a+1} — Infatti supponiamo che non tutti gli spazî della serie data passino per l'S_{a-1} secondo cui si tagliano $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}$, e sia $S_a^{(3)}$ uno spazio non passante per questo S_{a-1}. Allora i due S_{a-1} secondo cui $S_a^{(3)}$ taglia $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}$ saranno distinti e quindi apparterranno ad $S_a^{(3)}$ (giacchè, se appartenessero ad uno spazio ad $a-1$ dimensioni, coinciderebbero). Segue che l'S_{a+1}, a cui appartengono, per l'ipotesi, $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}$, contiene anche $S_a^{(3)}$; ed allora contiene pure ogni altro spazio $S_a^{(4)}$ della serie, perchè questo non può segare $S_a^{(1)}, S_a^{(2)}, S_a^{(3)}$ nello stesso S_{a-1} e quindi sega due di essi almeno in due S_{a-1} distinti. La dimostrazione, come si vede, è immediata generalizzazione di quella dello spazio ordinario.

17. — In S_3 si ha che per un punto esterno a due rette sghembe passa una ed una sola retta appoggiata ad esse. Questa proprietà si generalizza nella seguente, che troverà applicazione nello studio delle omografie: — *Se* $S_{h^{(1)}-1}, S_{h^{(2)}-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$ *sono* m *spazî indipendenti (di dimensione* $h^{(1)}-1, h^{(2)}-1, \ldots, h^{(m)}-1$) *ed* M *un punto dello spazio a cui questi appartengono, ma esterno agli* m *spazî che si ottengono dai medesimi combinandoli ad* $m-1$ *ad* $m-1$, *per* M *passa uno ed un solo spazio* S_{m-1} *che abbia un punto comune con ciascuno degli spazî dati* —.

Infatti, per l'ipotesi, gli spazî dati appartengono ad uno spazio $S_{\Sigma h^{(i)}-1}$, e $m-1$ di essi, ad es., $S_{h^{(1)}-1}, \ldots, S_{h^{(m-2)}-1}, S_{h^{(m-1)}-1}$ ad un $S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m)}-1}$ (n. 12), il quale, congiunto con M, che è esterno ad esso, dà uno spazio $S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m)}}$. Sicchè abbiamo m spazî 1):

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m)}} \equiv M\, S_{h^{(1)}-1} \ldots\ldots S_{h^{(m-2)}-1}\, S_{h^{(m-1)}-1} \\ S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m-1)}} \equiv M\, S_{h^{(1)}-1} \ldots\ldots S_{h^{(m-2)}-1}\, S_{h^{(m)}-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(1)}} \equiv M\, S_{h^{(2)}-1} \ldots\ldots S_{h^{(m-1)}-1}\, S_{h^{(m)}-1} \end{array} \right.$$

1) Il primo membro di ciascuna identità designa lo spazio a cui appartengono gli spazî del secondo membro.

dei quali determineremo l'intersezione. I primi due, contenendo tutti gli m spazî dati, appartengono ad $S_{\Sigma h^{(i)}-1}$ e quindi si segano in uno spazio di dimensione $\Sigma h^{(i)} - h^{(m)} + \Sigma h^{(i)} - h^{(m-1)} - (\Sigma h^{(i)} - 1) = \Sigma h^{(i)} - h^{(m-1)} - h^{(m)} + 1$. Questo spazio contiene $S_{h^{(1)}-1}, \ldots, S_{h^{(m-2)}-1}$ e quindi col terzo degli spazî (4), nel quale stanno $S_{h^{(m-1)}-1}$, $S_{h^{(m)}-1}$, appartiene ancora a $S_{\Sigma h^{(i)}-1}$: la loro intersezione è quindi uno spazio di dimensione $\Sigma h^{(i)} - h^{(m-1)} - h^{(m)} + 1 + \Sigma h^{(i)} - h^{(m-2)} - (\Sigma h^{(i)} - 1) = \Sigma h^{(i)} - h^{(m-2)} - h^{(m-1)} - h^{(m)} + 2$, il quale contiene $S_{h^{(1)}-1}, \ldots, S_{h^{(m-3)}-1}$. Continuando si trova che l'intersezione dei primi $m-1$ spazî (4) è uno spazio $S_{h^{(1)}+m-2}$, che contiene $S_{h^{(1)}-1}$ e che sega l'm^{esimo} spazio (4) in un S_{m-1}. Tale spazio S_{m-1} ed $S_{h^{(1)}-1}$ hanno adunque un punto comune e non più (cioè appartengono all'$S_{h^{(1)}+m-2}$): altrimenti $S_{h^{(1)}-1}$ e quell'm^{esimo} spazio (nel quale giace S_{m-1}) avrebbero più di un punto comune, il che è assurdo, appartenendo amendue all'$S_{\Sigma h^{(i)}-1}$. Variando il modo di deduzione dello spazio d'intersezione S_{m-1} dagli spazî (4), si vede che esso (oltre a passare per M) ha un punto comune anche con ciascuno degli altri spazî $S_{h^{(2)}-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$.

Si può notare che gli *m punti di appoggio di S_{m-1} cogli spazî dati sono m punti indipendenti*. Giacchè, se determinassero un S_{m-2}, ad es., congiunto questo con $h^{(1)} - 1$, $h^{(2)} - 1, \ldots, h^{(m)} - 1$ punti generici [1]) di $S_{h^{(1)}-1}, S_{h^{(2)}-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$ rispettivamente, si troverebbe che questi spazî apparterrebbero ad uno spazio al più di dimensione $\Sigma h^{(i)} - m + m - 2 = \Sigma h^{(i)} - 2$, contro il supposto.

Siccome uno spazio S_{m-1} passante per M e appoggiato agli m spazî dati, è, nelle ipotesi fatte, l'intersezione degli spazî (4), e d'altra parte questi si ottengono congiungendo l'S_{m-1} con quelli presi ad $m-1$ ad $m-1$, è chiaro che l'S_{m-1} stesso è unico. Ma se il punto M è in l degli m spazî a cui appartengono $S_{h^{(1)}-1}, S_{h^{(2)}-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$ combinati ad $m-1$ ad $m-1$ e non negli $m-l$ rimanenti, vi sono infiniti S_{m-1} nelle condizioni dette dal teorema. Precisamente M si trovi negli spazî $S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m)}-1}, \ldots, S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m-l+1)}-1}$ (che si ottengono sopprimendo, dai dati m spazî, suc-

[1]) Un ente (o complesso di enti) dicesi *speciale* rispetto ad una data questione quando soddisfa a certe condizioni particolari che risultano volta per volta dalla data questione, e *generico* nel caso contrario. Così, superiormente, prendere $h^{(1)} - 1$ punti generici di $S_{h^{(1)}-1}$ significa prendere $h^{(1)} - 1$ punti indipendenti fra loro e dal punto in cui l'S_{m-1} si appoggia all'$S_{h^{(1)}-1}$. È poi *qualunque* o *arbitrario* un ente scelto comunque; onde può essere generico o speciale.

cessivamente $S_{h^{(m)}-1}, \ldots, S_{h^{(m-l+1)}-1}$), cioè nel loro spazio d'intersezione che è quello a cui appartengono $S_{h^{(m-l)}-1}, \ldots, S_{h^{(2)}-1}, S_{h^{(1)}-1}$; ed M non si trovi in $S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(m-l)}-1}, \ldots, S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(2)}-1}, S_{\Sigma h^{(i)}-h^{(1)}-1}$ e quindi non negli spazï che si ottengono combinando ad $m-l-1$ ad $m-l-1$ gli spazï $S_{h^{(m-l)}-1}, \ldots, S_{h^{(2)}-1}, S_{h^{(1)}-1}$. Allora da M parte un solo spazio S_{m-l-1} appoggiato a questi ultimi, il quale, congiunto con punti variabili presi ordinatamente su $S_{h^{(m)}-1}, \ldots, S_{h^{(m-l+1)}-1}$, fornisce gli infiniti S_{m-1} richiesti.

18. — Proponiamoci di generalizzare il teorema del n. 11 al caso di più di due spazï; e, per chiarezza, trattiamo prima distintamente il caso di **3** e **4** spazï.

Sieno $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$, tre spazï lineari e si indichino con $S_{a_{12}}, S_{a_{13}}, S_{a_{23}}$ (di dimensioni a_{12}, a_{13}, a_{23}) rispettivamente le intersezioni di S_{a_1} ed S_{a_2}, di S_{a_1} ed S_{a_3}, di S_{a_2} ed S_{a_3} e con $S_{a_{123}}$ l'intersezione di tutti tre gli spazï. Supporremo $a_{123} \geq 0$ e quindi pure $a_{12} \geq 0$, $a_{13} \geq 0$, $a_{23} \geq 0$. Due dei tre spazï dati, ad es., S_{a_1}, S_{a_2}, appartengono, per il ricordato teorema, ad uno spazio $S_{a_1+a_2-a_{12}}$. Qual'è l'intersezione di questo spazio con S_{a_3}? Notisi che S_{a_3} sega S_{a_1}, S_{a_2} in $S_{a_{13}}, S_{a_{23}}$, di cui lo spazio congiungente è manifestamente un $S_{a_{13}+a_{23}-a_{123}}$: ma lo spazio d'intersezione di $S_{a_1+a_2-a_{12}}$ con S_{a_3} può coincidere o soltanto comprendere tale spazio [1]). Se coincide, cioè *se supponiamo che lo spazio a cui appartengono le intersezioni di* S_{a_3} *con* S_{a_1}, S_{a_2} *sia quello nel quale* S_{a_3} *taglia lo spazio congiungente* S_{a_1}, S_{a_2}, il che, per brevità, denoteremo dicendo che S_{a_3} è *in posizione regolare* rispetto ad S_{a_1}, S_{a_2}, allora $S_{a_1+a_2-a_{12}}$ ed S_{a_3} ossia i tre spazï $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$ appartengono allo spazio di dimensione

$$(5)\quad a_1 + a_2 - a_{12} + a_3 - (a_{13} + a_{23} - a_{123}) = a_1 + a_2 + a_3 - a_{12} - a_{13} - a_{23} + a_{123} = a\,.$$

Se quell'ipotesi non si verifica, il ragionamento mostra che questo numero a è certo maggiore di detta dimensione. Ne consegue che se S_{a_3} è in posizione regolare rispetto ad S_{a_1}, S_{a_2}, anche S_{a_1} lo è rispetto ad S_{a_2}, S_{a_3}, ed S_{a_2} rispetto ad S_{a_1}, S_{a_3}.

Passiamo al caso di quattro spazï $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}, S_{a_4}$, dicendo, come dianzi, $S_{a_{12}}, S_{a_{13}}, \ldots$ le intersezioni degli spazï a due a due, $S_{a_{123}}, S_{a_{124}}, \ldots$ quelle degli spazï a tre a tre ed $S_{a_{1234}}$ l'intersezione di tutti quattro gli spazï, e supponendo $a_{1234} \geq 0$ e quindi anche ≥ 0 ciascuna delle altre

---

[1]) Ad es., se si hanno in S_r tre S_{r-1} per un S_{r-2}, uno di essi sega gli altri due in questo S_{r-2}, mentre sega l'S_r, a cui i due appartengono, in sè stesso.

dimensioni $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{123}, a_{124}, \ldots$ Per applicare il risultato precedente a tre di essi, $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$, *si dovrà supporre* (ad es.) *che* S_{a_3} *sia in posizione regolare rispetto ad* S_{a_1}, S_{a_2}: ed allora quei tre spazî appartengono ad uno spazio S_a di cui la dimensione a è espressa dalla (5). Cerchiamo l'intersezione di S_a con S_{a_4}. A tal fine notisi che S_{a_4} sega $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$ in $S_{a_{14}}, S_{a_{24}}, S_{a_{34}}$ e che si potrà esprimere con precisione, applicando la (5), la dimensione del loro spazio congiungente *se si suppone che uno di essi*, $S_{a_{34}}$, *sia in posizione regolare rispetto agli altri due* $S_{a_{14}}, S_{a_{24}}$ [1]), nel qual caso detta dimensione sarà

$$a_{14} + a_{24} + a_{34} - a_{124} - a_{134} - a_{234} + a_{1234}:$$

ma, di nuovo, lo spazio cui appartengono $S_{a_{14}}, S_{a_{24}}, S_{a_{34}}$ potrà coincidere con quello d'intersezione di S_a con S_{a_4} o soltanto esservi contenuto. *Se supponiamo che coincida*, il che esprimeremo, come avanti, dicendo che S_{a_4} è *in posizione regolare* rispetto ad $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$ e se insieme sussistono le altre ipotesi, lo spazio a cui appartengono S_a ed S_{a_4} cioè $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}, S_{a_4}$ ha la dimensione

$$a_1 + a_2 + a_3 - a_{12} - a_{13} - a_{23} + a_{123} + a_4 - (a_{14} + a_{24} + a_{34} - a_{124} - a_{134} - a_{234} + a_{1234}) =$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_{12} - a_{13} - a_{23} - a_{14} - a_{24} - a_{34} + a_{123} + a_{124} + a_{134} + a_{234} - a_{1234}.$$

Appare dalla dimostrazione e da esempî [2]) che non si può asserire, come nel caso di tre spazî, che, mancando le suddette ipotesi, questo numero sia sempre maggiore della cercata dimensione.

19. — I casi considerati conducono a porre in generale la nozione di *posizione regolare* di uno spazio S_h rispetto a più altri $S_i, S_t, \ldots$, intendendo con ciò che lo spazio al quale appartengono le intersezioni di S_h con $S_i, S_t, \ldots$ è l'intersezione di S_h collo spazio congiungente $S_i, S_t, \ldots$: si ha allora il teorema generale:

---

[1]) Tale ipotesi non è conseguenza di quella che precede e dell'altra che segue. Ad es., in S_r quattro S_{r-1} passanti per un S_{r-3}, di cui tre non passino per un S_{r-2}, soddisfano a queste due ipotesi; mentre dei tre S_{r-2} d'intersezione di un S_{r-1} cogli altri tre uno qualunque non è in posizione regolare cogli altri due (cfr. nota a pag. 14).

[2]) Prendasi quello della nota precedente: ove faremo, per semplicità, $r=3$. Si ha $a_1 = a_2 = \ldots = 2$, $a_{12} = a_{13} = \ldots = 1$, $a_{123} = a_{124} = \ldots = 0$, $a_{1234} = 0$ e l'espressione trovata, posti questi valori, dà $8 - 6 = 2$ (non 3 almeno).

Dati h spazî $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_h}$ *e indicati con* $S_{a_{i_1 i_2}}, S_{a_{i_1 i_2 i_3}}, \ldots, S_{a_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}}}$ *gli spazî d'intersezione di essi, a due a due, a tre a tre, ad $h-1$ ad $h-1$, e con* $S_{a_{12\ldots h}}$ *lo spazio d'intersezione di tutti gli h spazî, e supposto* $a_{12\ldots h} \geq 0$ *e quindi* ≥ 0 *la dimensione di ogni spazio d'intersezione, la dimensione a dello spazio congiungente i dati spazî è data dalla formula*

$$(6) \quad a = \sum a_{i_1} - \sum a_{i_1 i_2} + \sum a_{i_1 i_2 i_3} - \ldots + (-1)^{h-2} \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}} + (-1)^{h-1} a_{12\ldots h};$$

ove le sommatorie (relative agli indici i) sono estese rispettivamente a tutte le combinazioni, ad uno ad uno, a due a due, ..., ad $h-1$ ad $h-1$ dei numeri $1, 2, \ldots, h$, se si verificano le $h-2$ ipotesi seguenti:

1.ª *Gli spazî* $S_{a_3}, S_{a_4}, \ldots, S_{a_h}$ (ad es.) *sono ordinatamente in posizione regolare rispetto ad* S_{a_1}, S_{a_2}; $S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}$; ...; $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_{h-1}}$;

2.ª *Gli spazî* $S_{a_{34}}, S_{a_{45}}, \ldots, S_{a_{h-1,h}}$ (ad es.) *sono ordinatamente in posizione regolare rispetto ad* $S_{a_{14}}, S_{a_{24}}$; $S_{a_{15}}, S_{a_{25}}, S_{a_{35}}$; ...; $S_{a_{1h}}, S_{a_{2h}}, \ldots, S_{a_{h-2,h}}$;

. . . .

$(h-3)^{\text{esima}}$. *Gli spazî* $S_{a_{34\ldots h-1}}, S_{a_{45\ldots h}}$ (ad es.) *sono ordinatamente in posizione regolare rispetto ad* $S_{a_{14\ldots h-1}}, S_{a_{24\ldots h-1}}$; $S_{a_{15\ldots h}}, S_{a_{25\ldots h}}, S_{a_{35\ldots h}}$;

$(h-2)^{\text{esima}}$. *Lo spazio* $S_{a_{34\ldots h}}$ (ad es.) *è in posizione regolare rispetto ad* $S_{a_{14\ldots h}}, S_{a_{24\ldots h}}$.

Siccome il teorema fu dimostrato fino ad $h = 4$, basterà ammetterlo per $h-1$ spazî e dimostrarlo per h. Prendansi gli $h-1$ spazî $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_{h-1}}$: il loro spazio congiungente, per il caso ammesso di $h-1$ spazî, valevole in grazia delle prime $h-3$ ipotesi (abbandonando in ciascuna l'ultima condizione), ha la dimensione

$$(7) \quad \sum_{h-1} a_{i_1} - \sum_{h-1} a_{i_1 i_2} + \sum_{h-1} a_{i_1 i_2 i_3} - \ldots + (-1)^{h-3} \sum_{h-1} a_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}} + (-1)^{h-2} a_{12\ldots h-1},$$

ove $\sum\limits_{h-1}$ indica che le combinazioni si estendono solo ai numeri $1, 2, \ldots, h-1$. Ora lo spazio S_{a_h} sega quegli $h-1$ spazî, in $S_{a_{1h}}, S_{a_{2h}}, \ldots, S_{a_{h-1,h}}$, e questi, pure per il caso ammesso di $h-1$ spazî, valevole in grazia delle ultime $h-3$ ipotesi, appartengono ad uno spazio di dimensione

$$(8) \sum_{h-1} a_{i_1 h} - \sum_{h-1} a_{i_1 i_2 h} + \sum_{h-1} a_{i_1 i_2 i_3 h} - \ldots + (-1)^{h-3} \sum_{h-1} a_{i_1 i_2 \ldots i_{h-2} h} + (-1)^{h-2} a_{12\ldots h-1,h}.$$

Ma tale spazio, per l'ultima condizione della 1.ª ipotesi, è quello d'intersezione di S_{a_h} collo spazio congiungente $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_{h-1}}$: dunque la dimensione dello spazio a cui appartengono $S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_h}$ si ottiene aggiungendo a_h all'espressione (7) e sottraendone la (8), il che dà appunto la (6).

20. — Ma ora si può ottenere una importante estensione del teorema precedente, togliendo la restrizione $a_{12\dots h} \geq 0$, anzi supponendo che manchino in qualunque modo gli spazï d'intersezione. Occorre per ciò estendere la definizione di *posizione regolare* di uno spazio S_k rispetto a più altri $S_l, S_t, \dots$, che fu data nel n. 19, nel supposto (sottinteso) che esistessero tutte le intersezioni di S_k con $S_l, S_t, \dots$. Si dirà adunque S_k *in posizione regolare rispetto ad* $S_l, S_t, \dots$, *quando lo spazio congiungente gli spazï d'intersezione, che esistono, di* S_k *con* $S_l, S_t, \dots$, *è l'intersezione di* S_k *collo spazio congiungente* $S_l, S_t, \dots$. Nella qual definizione si comprende anche il caso che $S_k, S_l, S_t, \dots$, manchino. Se manca S_k, o mancano tutti gli spazï $S_l, S_t, \dots$ (o le due cose insieme), manca, ossia è S_{-1}, lo spazio congiungente le intersezioni di S_k con $S_l, S_t, \dots$, e manca altresì, ossia è pure S_{-1}, lo spazio d'intersezione di S_k collo spazio congiungente $S_l, S_t, \dots$: onde *allora la condizione suddetta è soddisfatta per sè.* Se esiste S_k e mancano solo alcuni degli spazï $S_l, S_t, \dots$, per la definizione si dovranno abbandonare di questi gli spazï mancanti e verificare la posizione regolare di S_k rispetto ai rimanenti.

Le $h-2$ ipotesi del teorema del n. 19 acquistano allora significato preciso in ogni caso. Ad es., se manca $S_{a_{34}}$ e quindi mancano $S_{a_{345}}, \dots, S_{a_{34\dots h}}$ la prima condizione di ciascuna delle ipotesi 2.ª, 3.ª, ..., $(h-3)^{\text{esima}}$ e la $(h-2)^{\text{esima}}$ ipotesi sono soddisfatte per sè. La stessa cosa avviene se manca $S_{a_{14}}$ (ad es.) e quindi mancano $S_{a_{145}}, \dots, S_{a_{14\dots h}}$, per l'osservazione ovvia che *uno spazio è sempre in posizione regolare con un altro spazio.* Così se manca $S_{a_{15}}$ e quindi mancano $S_{a_{156}}, \dots, S_{a_{15\dots h-1}}$, basta per la seconda condizione della 2.ª ipotesi verificare la posizione regolare di $S_{a_{45}}$ rispetto ad $S_{a_{25}}, S_{a_{35}}$, e analogamente per le seconde condizioni delle altre ipotesi fino alla $(h-2)^{\text{esima}}$: ecc., ecc..

Ciò ritenuto, *il teorema del n. 19 è vero senza la restrizione dell'esistenza degli spazï d'intersezione; cioè la formola* (6), *quando sussistano le* $h-2$ *ipotesi ivi indicate, dà in ogni caso la dimensione dello spazio congiungente gli spazï* $S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_h}$, *intendendo di porre* -1 *per la dimensione di ogni spazio d'intersezione mancante.* Infatti, preso un punto O fuori dello spazio S_n, al quale appartengono $S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_h}$, lo si congiunga con questi spazï e con tutti i loro spazï d'intersezione, o, come si dice [1]), si *proiettino* da O gli spazî stessi; e si chiami $S'_{a'_{i_1}}$ lo spazio proiettante $S_{a_{i_1}}$ cioè lo spazio $O\,S_{a_{i_1}}$; $S'_{a'_{i_1 i_2}}$ lo spazio $O\,S_{a_{i_1 i_2}}$; $S'_{a'_{i_1 i_2 i_3}}$ lo spazio $O\,S_{a_{i_1 i_2 i_3}}$; ecc. Manifestamente si hanno le relazioni

$$a'_{i_1} = a_{i_1} + 1 \ , \ a'_{i_1 i_2} = a_{i_1 i_2} + 1 \ , \ a'_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3} + 1 \ , \ \ldots\ldots ,$$

anche se qualche spazio d'intersezione manca, purchè s'intenda che allora il suo spazio proiettante si riduce al solo punto O (ossia è di dimensione zero) e *si convenga di porre* -1 *per la dimensione di ogni spazio mancante*. Notisi poi che, essendo O esterno ad S_a, lo spazio $S_{a_{i_1 i_2 \ldots i_s}}$ d'intersezione di s spazî $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots S_{a_s}$, è proiettato da O nello spazio d'intersezione degli spazî proiettanti $S'_{a'_1}, S'_{a'_2}, \ldots, S'_{a'_s}$, perchè ogni raggio per O comune a questi giace nell'$S_{a+1} \equiv O\,S_a$ e incontra quindi S_a in un punto che deve essere comune ad $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_s}$, e viceversa: il che sta anche se $S_{a_{i_1 i_2 \ldots i_s}}$ manca, riducendosi allora ad O l'intersezione di $S'_{a_1}, S'_{a_2}, \ldots, S'_{a_s}$ ed essendo pure O lo spazio $S'_{a'_{i_1 i_2 \ldots i_s}}$. Inoltre ogni spazio congiungente spazî esistenti in S_a è proiettato da O nello spazio congiungente gli spazî che li proiettano da O; anche se alcuni di quegli spazî mancano. Se mancano ad es.: $S_{a_{13}}, S_{a_{23}}$, lo spazio congiungente $S_{a_{13}}, S_{a_{23}}, S_{a_{35}}, S_{a_{46}}$ è quello congiungente $S_{a_{35}}, S_{a_{46}}$; gli spazî proiettanti sono $S'_{a'_{13}} \equiv O$, $S'_{a'_{23}} \equiv O$, $S'_{a'_{35}} \equiv O\,S_{a_{35}}$, $S'_{a'_{46}} \equiv O\,S_{a_{46}}$ ed il loro spazio congiungente è quello congiungente $O\,S_{a_{35}}$, $O\,S_{a_{46}}$ e quindi la proiezione di quello a cui appartengono $S_{a_{35}}, S_{a_{46}}$: ecc.

Ne consegue che le $h-2$ ipotesi ammesse per gli spazî $S_{a_1}, S_{a_2}, \ldots, S_{a_h}$ si trasportano agli spazî $S'_{a'_1}, S'_{a'_2}, \ldots, S'_{a'_h}$, perchè la proprietà che esprime la posizione regolare si mantiene nella proiezione fatta da O (esterno ad S_a), gli spazî intersezioni e congiungenti proiettandosi in spazî di eguale natura. Ma per gli spazî $S'_{a'_1}, S'_{a'_2}, \ldots, S'_{a'_h}$ sta inoltre la condizione $a'_{i_1 i_2 \ldots i_h} \geq 0$, quegli spazî avendo almeno comune il punto O; sicchè, applicando il teorema del n. 19, si avrà

$$a+1 = \sum (a_{i_1}+1) - \sum (a_{i_1 i_2}+1) + \ldots + (-1)^{h-2} \sum (a_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}}+1) + (-1)^{h-1}(a_{12\ldots h}+1)$$

---

[1]) Cfr. n. 8. Cap. 2°.

ossia

$$a+1=\sum a_{i_1}-\sum a_{i_1 i_2}+\ldots+(-1)^{h-2}\sum a_{i_1 i_2\ldots i_{h-1}}+(-1)^{h-1}a_{12\ldots h}+$$

$$+\left[h-\binom{h}{2}+\binom{h}{3}-\ldots\right].$$

Di qui, ricordando che, per lo sviluppo di $(1-1)^h$, la quantità fra le parentesi quadre è $=1$, si ricava la (6), nella quale, per ciò che fu osservato sopra, si deve porre -1 per la dimensione di ogni spazio d'intersezione mancante. L'asserto è adunque dimostrato.

Capitolo 2.°

Lo spazio Σ_r e le sue relazioni coll'S_r.

✳ 1. — Sieno $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}$, r punti indipendenti di S_r e consideriamo l'iperpiano da essi determinato. Se x è un suo punto qualunque, le sue coordinate saranno legate a quelle degli r punti dati da formule del tipo (n. 5, Cap. 1.°).

$$\rho x_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \dots + \lambda^{(r-1)} x_i^{(r-1)} \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

ρ essendo un fattore di proporzionalità (non nullo): cioè

$$\rho x_i - \lambda^{(0)} x_i^{(0)} - \lambda^{(1)} x_i^{(1)} - \dots - \lambda^{(r-1)} x_i^{(r-1)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Quindi deve essere

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_0^{(0)} & x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(r-1)} \\ x_1 & x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(r-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & x_r^{(0)} & x_r^{(1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{vmatrix} = 0 .$$

[illegible]
Con [illegible]

Reciprocamente, un punto x soddisfi colle sue coordinate a questa equazione: dovrà sussistere il sistema delle $r+1$ equazioni precedenti per valori non tutti nulli delle ρ, $\lambda^{(i)}$, anzi per un valore non nullo di ρ essendo i punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$ indipendenti; e però il punto x esiste nell'iperpiano di questi r punti. Dunque la precedente equazione, che possiamo scrivere nella forma

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r = 0 ,$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente cui devono soddisfare le coordinate di un punto dell'S_r perchè esso esista nell'iperpiano considerato. I coefficienti $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$, essendo i complementi algebrici di $x_0, x_1, \dots, x_r$ nel superiore determinante, sono finiti e non possono essere tutti nulli, altrimenti gli r punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}$ non sarebbero indipendenti.

Viceversa, se consideriamo un'equazione qualunque lineare omogenea nelle coordinate correnti $x_0, x_1, \dots, x_r$

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r = 0$$

è chiaro che gli ∞^{r-1} punti, che con le loro coordinate soddisfano a questa equazione, costituiscono un iperpiano. Per ciò basta osservare che, se ξ_0, per es., è diverso da zero, tutti questi punti possono ottenersi prendendo $x_1, x_2, \dots, x_r$ arbitrariamente e poi determinando x_0 dall'eguaglianza

$$x_0 = -\frac{\xi_1}{\xi_0} x_1 - \frac{\xi_2}{\xi_0} x_2 - \dots - \frac{\xi_r}{\xi_0} x_r ;$$

onde la loro totalità coincide con quella dei punti dell'iperpiano determinato dagli r punti indipendenti

$$\left(-\frac{\xi_1}{\xi_0}, 1, 0, \dots, 0\right)$$

$$\left(-\frac{\xi_2}{\xi_0}, 0, 1, \dots, 0\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(-\frac{\xi_r}{\xi_0}, 0, 0, \dots, 1\right).$$

Sicchè, adoperando il linguaggio della geometria analitica ordinaria, possiamo dire che: — *Ogni iperpiano dell'* S_r *è rappresentato da un'equazione lineare omogenea nelle coordinate correnti di punto, e viceversa* —.

2. — Poichè ad individuare un iperpiano di S_r basta dare (a meno, ben inteso, di un fattore di proporzionalità) i coefficienti della sua equazione

$$(1) \qquad \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r = 0,$$

le $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ potranno molto opportunamente essere considerate come *coordinate omogenee* degli iperpiani: quindi la totalità degli iperpiani di un S_r è ancora (giusta la nostra definizione) uno spazio lineare ad r dimensioni e per essa possono ripetersi tutte le considerazioni fatte per l'S_r. Tale totalità la indicheremo nel seguito costantemente con Σ_r; e, in grazia di ciò che ora si è osservato, non ci fermeremo affatto a dichiarare che cosa s'intenda per iperpiani indipendenti, per spazi Σ_h subordinati di Σ_r (fra i quali Σ_0 è un iperpiano); ecc., ecc..

La (1) dà la condizione necessaria e sufficiente perchè l'iperpiano di coordinate $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ passi per il punto di coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_r$; ossia esprime la cosidetta condizione d'incidenza: quindi essa può considerarsi o come l'equazione di un iperpiano ξ, ed allora le x_i saranno coordinate correnti di punto, o come l'equazione di un punto x, ed allora le ξ_i saranno coordinate correnti d'iperpiano.

La dipendenza o indipendenza di punti (iperpiani) si può ora esprimere coll'uso delle loro equazioni. Sieno dati $k+1$ punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$: le loro equazioni (in coordinate d'iperpiani) sono

$$\begin{array}{c} \xi_0 x_0^{(0)} + \xi_1 x_1^{(0)} + \ldots + \xi_r x_r^{(0)} = 0 \\ \xi_0 x_0^{(1)} + \xi_1 x_1^{(1)} + \ldots + \xi_r x_r^{(1)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_0 x_0^{(k)} + \xi_1 x_1^{(k)} + \ldots + \xi_r x_r^{(k)} = 0 . \end{array}$$

Allora, come segue subito dalle (1) del Cap. 1.°, i punti sono dipendenti o indipendenti secondochè esistono o non esistono valori $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$, non tutti nulli, pei quali moltiplicando ordinatamente le equazioni precedenti e sommando si ottenga una identità (nelle ξ_i), cioè secondochè le suddette equazioni sono linearmente dipendenti o no. Analoga considerazione per gli iperpiani. (b)

3. — Occorre, per il seguito, che facciamo qui una breve digressione, accennando alla nozione ed alle cose fondamentali del rapporto anarmonico, in relazione al modo, nel quale fu introdotto il concetto d'iperspazio.

Rapporto anarmonico o *birapporto* di quattro numeri, presi in un certo ordine, ossia di quattro valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ assunti successivamente da un parametro λ variabile, è il numero

$$\mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} ,$$

e si indica con $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$. Manifestamente si ha che il rapporto anarmonico $(0\,\infty\,\lambda_3\,\lambda_4) = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}$. Dato il valore di un rapporto anarmonico e tre dei suoi elementi (in un certo ordine) il quarto è individuato.

Dalla definizione data segue subito che il rapporto anarmonico non muta scambiando due dei quattro numeri ed anche i due rimanenti; e si muta invece nel suo inverso scambiando soltanto i due primi o i due ultimi. Tenendo poi conto della identità (fra quattro numeri)

$$\begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_3 & 1 \\ \lambda_4-\lambda_1 & \lambda_4 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

cioè

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)+(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_4)\equiv 0\,,$$

si trova pure che un rapporto anarmonico, scambiando i due medî o i due estremi, si muta nel rapporto anarmonico complementare (quello che aggiunto ad esso dà l'unità).

Ne discende facilmente che i 24 rapporti anarmonici che si possono formare con quattro numeri si riducono a sei soli generalmente distinti, espressi così (in funzione di uno μ di essi): $\mu\,,\ \frac{1}{\mu}\,,\ 1-\mu\,,\ \frac{1}{1-\mu}\,,\ \frac{\mu}{\mu-1}\,,\ \frac{\mu-1}{\mu}$. $1-\frac{1}{\mu}$

Imponendo la condizione che due di questi sei rapporti anarmonici sieno eguali si trovano tre soli casi possibili:

1.° I 24 rapporti anarmonici si riducono a tre soli distinti aventi i valori $0\,,1\,,\infty$. Allora *due dei quattro numeri* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *debbono essere eguali:* precisamente se $\lambda_1=\lambda_2$ o $\lambda_3=\lambda_4$ si ha $\mu=1$, se $\lambda_1=\lambda_3$ o $\lambda_2=\lambda_4$ si ha $\mu=0$, se $\lambda_1=\lambda_4$ o $\lambda_2=\lambda_3$ si ha $\mu=\infty$; e reciprocamente.

2.° I 24 rapporti anarmonici si riducono a tre soli distinti aventi i valori $-1\,,2\,,\frac{1}{2}$. *Quando* $(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4)=-1$, *si dice che i quattro numeri formano un gruppo armonico.* Allora essi si dividono in due coppie λ_1, λ_2; λ_3, λ_4, così che scambiando le due coppie e i due numeri di ciascuna coppia si ottengono le altre sette disposizioni dei quattro numeri, nelle quali si ha pure gruppo armonico. I numeri λ_1, λ_2, e parimenti λ_3, λ_4, sono detti *coniugati.* Se $(0\,\infty\,\lambda_3\,\lambda_4)=-1$, deve essere $\lambda_3=-\lambda_4$. Se in un gruppo armonico due numeri coincidono, un terzo cade in essi ed il quarto è indeterminato.

3.° I 24 rapporti anarmonici si riducono a due soli distinti aventi per valori le due radici cubiche imaginarie dell'unità negativa $\left(\text{cioè} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$. In tal caso si dice che i quattro numeri, necessariamente non tutti reali, formano *gruppo equianarmonico*, qualunque sia la loro disposizione (cioè il loro rapporto anarmonico essendo eguale all'una o all'altra delle dette due radici). Dati tre numeri (in un certo ordine) esistono due numeri, ciascuno dei quali forma con quelli gruppo equianarmonico.

Facendo sul parametro λ una trasformazione lineare $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$ $(ad - bc \neq 0)$, si verifica con facilità [1]) che il rapporto anarmonico di quattro numeri è eguale a quello dei quattro numeri trasformati: vale a dire *il rapporto anarmonico è invariante per trasformazioni lineari.*

Se λ è il rapporto delle due coordinate di un punto variabile di un S_1 o di un iperpiano variabile di un Σ_1, si dice rapporto anarmonico di quattro punti di S_1 o di quattro iperpiani di Σ_1 il rapporto anarmonico dei quattro valori di λ che ad essi corrispondono. È un numero indipendente dagli elementi di riferimento dell'S_1 o del Σ_1, giacchè la variazione di questi produce su λ una trasformazione lineare.

In generale, se gli elementi di una totalità algebrica ∞^1 corrispondono biunivocamente e algebricamente ai valori di un parametro [2]), dicesi rapporto anarmonico di quattro elementi della totalità quello dei quattro valori corrispondenti del parametro (definizione determinata, perchè due tali parametri relativi alla stessa totalità saranno legati da una relazione bilineare).

4. — Ritornando alle relazioni fra lo spazio S_r e lo spazio Σ_r, osserviamo che la piramide fondamentale $\alpha_0\,\alpha_1 \dots \alpha_r$ di Σ_r è la stessa $A_0\,A_1 \dots A_r$ di S_r. Precisamente l'iperpiano α_i, che ha cioè la sola ξ_i diversa da zero, ha l'equazione $x_i = 0$, la quale, essendo soddisfatta dalle coordinate dei punti $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r$, è l'equazione dell'iperpiano determinato da questi punti: onde α_i è l'iperpiano fondamentale opposto

---

[1]) Ad es. si sostituiscano alla detta trasformazione lineare le trasformazioni elementari

$$\lambda' = \lambda + m \quad , \quad \lambda' = n\lambda \quad , \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

colle quali quella può sempre comporsi.

[2]) Totalità ∞^1 razionale. Cfr. n. 17, Cap. 9°.

ad A_i. Quanto all'iperpiano unità u che ha tutte le ξ_i eguali e quindi l'equazione $x_0 + x_1 + \ldots + x_r = 0$, esso è in semplice relazione col punto unità U di equazione $\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_r = 0$. Infatti, preso un S_{r-2} fondamentale, ad es. $A_2 A_3 \ldots A_r$, ed il fascio $x_0 + \lambda x_1 = 0$ degli S_{r-1} che lo ha per sostegno [1]), i quattro S_{r-1} del fascio che passano per A_0, A_1, U e per il punto in cui u sega $A_0 A_1$ sono dati dai valori $0, \infty, -1, +1$ del parametro λ. Il loro rapporto anarmonico è $= -1$ e quindi quei quattro iperpiani, nel fascio $x_0 + \lambda x_1 = 0$, formano gruppo armonico. Analoga considerazione si potrebbe fare scambiando i punti A_i cogli iperpiani α_i. Si trova così l'estensione della proprietà nota in S_2 ed S_3, e per la quale si dice che u è l'*iperpiano armonico* di U (ed U *polo armonico di u*) rispetto alla piramide fondamentale.

Osserveremo qui pure che ai rapporti delle coordinate $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}$ di un punto $x^{(0)}$ di S_r (e analogamente ai rapporti delle coordinate $\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_r^{(0)}$ di un iperpiano $\xi^{(0)}$ di Σ_r) si può dare il significato di rapporti anarmonici. Infatti, se si considera (ad es.) il fascio suddetto $x_0 - \lambda x_1 = 0$, che ha per sostegno l'S_{r-2} fondamentale $A_2 A_3 \ldots A_r$, e si congiunge questo S_{r-2} con A_0, A_1, U, $x^{(0)}$ si hanno quattro iperpiani del fascio, rappresentati dalle equazioni $x_1 = 0$, $x_0 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$, $x_0 x_1^{(0)} - x_1 x_0^{(0)} = 0$. Il loro rapporto anarmonico è $\left(\infty\ 0\ 1\ \frac{x_0^{(0)}}{x_1^{(0)}}\right) = \frac{x_0^{(0)}}{x_1^{(0)}}$: ecc.

5. — Un Σ_1 o fascio d'iperpiani è la totalità degli iperpiani di coordinate $\lambda^{(0)} \xi_i^{(0)} + \lambda^{(1)} \xi_i^{(1)}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, essendo $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}$ due iperpiani indipendenti (cioè distinti) del Σ_r e quindi è la totalità degli iperpiani dati dall'equazione

$$\lambda^{(0)} \Sigma \xi_i^{(0)} x_i + \lambda^{(1)} \Sigma \xi_i^{(1)} x_i = 0 \tag{2}$$

al variare di $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$. Ora $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}$, essendo due S_{r-1} distinti, e quindi appartenenti ad S_r, si segano in un S_{r-2}, per il quale passa manifestamente ogni S_{r-1} rappresentato dalla (2). Viceversa, ogni S_{r-1} per l'S_{r-2} si ottiene dalla (2), perchè è individuato da un punto (fuori dell'S_{r-2}); e basta porre le coordinate di questo punto nella (2), per trovare valori (non tutti due nulli) delle $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$, che sostituiti nella stessa (2) dànno l'equazione del dato S_{r-1} (non la rendono identica, altrimenti $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}$ coinciderebbero). Adunque *un Σ_1 è la totalità degli iperpiani passanti per un* S_{r-2}.

[1]) Si anticipa qui una facile nozione, di cui si dirà nel n.° seguente.

Questo S_{r-2} si dice *base o sostegno* di quel Σ_1. Viceversa *ogni* S_{r-2} *è base di un* Σ_1; giacchè per un S_{r-2} si possono condurre due iperpiani indipendenti ed il Σ_1 da questi individuato è appunto, per la precedente considerazione, quello che ha quell'S_{r-2} per base.

In generale: *un* Σ_k *è la totalità degli iperpiani che passano per un* S_{r-k-1}, detto *sostegno* o *base* del Σ_k; e viceversa, *ogni* S_{r-k-1} *è base di un* Σ_k. La proposizione diretta si dimostrerà per induzione, cioè si ammetterà vera per un Σ_{k-1} e si dimostrerà per un Σ_k, avendola già provata per $k=1$. Un Σ_k è la totalità degli iperpiani di coordinate $\lambda^{(0)}\xi_i^{(0)}+\lambda^{(1)}\xi_i^{(1)}+\ldots+\lambda^{(k)}\xi_i^{(k)}$ ($i=0,1,\ldots,k$), essendo $\xi^{(0)},\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(k)}$, $k+1$ iperpiani indipendenti, cioè è la totalità degli iperpiani dati dalla equazione

$$\lambda^{(0)}\Sigma\xi_i^{(0)}x_i+\lambda^{(1)}\Sigma\xi_i^{(1)}x_i+\ldots+\lambda^{(k)}\Sigma\xi_i^{(k)}x_i=0 \tag{3}$$

al variare di $\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(k)}$. Ora gli iperpiani $\xi^{(0)},\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(k-1)}$, ad es., individuano un Σ_{k-1} che, per ipotesi, ha per sostegno un S_{r-k}: per questo non può passare $\xi^{(k)}$, che non fa parte del Σ_{k-1}: onde S_{r-k} e $\xi^{(k)}$ appartengono ad S_r e però si segano in un S_{r-k-1}. Questo S_{r-k-1}, intersezione di $\xi^{(0)},\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(k)}$, giace evidentemente in ogni iperpiano dato dalla (3). Viceversa ogni iperpiano per l'S_{r-k-1} è dato dalla (3): giacchè ad individuarlo si possono fissare k punti (esterni all'S_{r-k-1}), e sostituendo le coordinate di questi punti nella (3) si hanno k equazioni che dànno valori, non tutti nulli, delle $\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(k)}$, i quali, posti nella stessa (3), forniscono l'equazione del considerato iperpiano (non la rendono identica, altrimenti i piani $\xi^{(0)},\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(k)}$ non sarebbero indipendenti).

Che poi ogni S_{r-k-1} sia base di un Σ_k segue da ciò che per esso si possono far passare (in infiniti modi) $k+1$ iperpiani indipendenti. In vero, preso uno spazio S_k indipendente dall'S_{r-k-1} ed in esso $k+1$ iperpiani (S_{k-1}) indipendenti, gli iperpiani di S_r che passano per questi e per l'S_{r-k-1} sono pure indipendenti, perchè, se appartenessero ad un Σ_{k-1}, cioè passassero per un S_{r-k} contenente necessariamente l'S_{r-k-1}, dovrebbero passare tutti per quel punto di S_k, in cui questo è incontrato dall'S_{r-k}; onde il punto stesso sarebbe comune ai suddetti $k+1$ S_{k-1} indipendenti di S_k, il che è assurdo.

6. — La totalità degli spazî ad $r-k$, $r-k+1$, ..., $r-1$ dimensioni che passano per un S_{r-k-1} si suole chiamare ordinariamente una

stella ed S_{r-k-1} il suo *centro* o *asse*. Essa è da considerare come uno spazio a k dimensioni, gli S_{r-1} e gli S_{r-k} della stella essendo di esso spazio gli iperpiani ed i punti (ovvero i punti e gli iperpiani), ed in generale gli S_{r-k+i} della stella gli S_i di detto spazio a k dimensioni (ovvero gli S_{k-i-1}). Di che la ragione appare direttamente, ovvero osservando che gli S_{r-k+i} della stella segano sopra un S_k, indipendente dall'S_{r-k-1}, i suoi S_i. Le coordinate nella stella si hanno dalla rappresentazione analitica dei suoi iperpiani, od anche prendendo le coordinate nel detto S_k. Per indicare una stella avente S_{r-k-1} per centro si suol dire *la stella* S_{r-k-1}.

Si può anzi estendere la denominazione di *stella* di S_r, chiamando così ogni stella $S_{k'-k-1}$ di un $S_{k'}$ contenuto in S_r, cioè costituita dalla totalità degli spazî lineari di $S_{k'}$ passanti per un suo spazio $S_{k'-k-1}$. Una tale totalità si dirà in S_r stella di sostegno $S_{k'-k-1}$ e di specie k (per $k' = r$ quella definita dianzi). Le stelle di 1.ª specie sono dette anche *fasci* e quelle di 2.ª specie *reti*.

7. — Siccome l'S_r ed il Σ_r, considerati *distintamente*, hanno la stessa definizione, e, come si è tratto il Σ_r dall'S_r, si può trarre l'S_r dal Σ_r, ogni proprietà (di posizione) che si dimostri relativa agli $S_0, S_1, \dots, S_{r-1}$, $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{r-1}$ avrà la sua compagna in una proprietà di eguale enunciato relativa ai $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{r-1}, S_0, S_1, \dots, S_{r-1}$. In ciò consiste la *Legge di dualità*. Ad es., la proposizione: — Ogni Σ_k è costituito dagli iperpiani passanti per un S_{r-k-1} (cioè per i punti dell'S_{r-k-1}) — ha per proposizione *duale*: — Ogni S_k è costituito dai punti giacenti in un Σ_{r-k-1} (cioè negli iperpiani del Σ_{r-k-1}) —: le quali due proposizioni furono dimostrate insieme per altra via nel n. 5.

Si suole spesso nell'esprimere la proprietà duale o, come anche si dice, *correlativa* di una data sostituire agli S_k di questa non i Σ_k, ma i loro sostegni S_{r-k-1}. Allora giova la seguente osservazione. Se un Σ_k giace in un $\Sigma_{k'}$, l'S_{r-k-1} sostegno del primo contiene evidentemente l'$S_{r-k'-1}$ sostegno del secondo: e viceversa. Quindi per ricavare da un teorema il suo duale nella forma sopra detta, cioè sostituendo ad ogni S_k un S_{r-k-1}, si deve a due spazî $S_k, S_{k'}$, che si tagliano in un S_l ed appartengono ad un S_t, sostituire due $S_{r-k-1}, S_{r-k'-1}$ che appartengono ad un S_{r-l-1} e si tagliano in un S_{r-t-1}. Così al teorema (caso particolare di quello del n. 17 Cap. 1.°): — Per un punto dell'S_{2h+1} cui appartengono $h+1$ rette indipendenti di S_r passa in generale uno ed un solo

S_h che si appoggia ad esse —; corrisponderà per dualità l'altro: — In un S_{r-1} che passa per l'S_{r-2h-2} secondo cui si tagliano $h+1$ spazî indipendenti ad $r-2$ dimensioni di S_r giace in generale uno ed un solo S_{r-h-1} che appartiene ad un S_{r-1} con ognuno di quegli $h+1$ spazî —.

A due spazî dell'S_r di dimensione k ed $r-k-1$ rispettivamente, fu data, per la ragione suddetta, la denominazione di *spazî duali*. In particolare se r è dispari (ed allora soltanto) esisteranno spazî duali della stessa dimensione. $r = 7$ $k = 3$ $r-k-1 = 3$

8. — *Proiettare* lo spazio S_k da un altro $S_{k'}$ significa costruire lo spazio S_t cui essi appartengono, detto perciò anche *spazio proiettante*. È chiaro che, se lo spazio S_k è dato dalle formule

$$x_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_i^{(k)} \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

mentre $S_{k'}$ è dato dalle altre

$$x_i = \mu^{(0)} y_i^{(0)} + \mu^{(1)} y_i^{(1)} + \ldots + \mu^{(k')} y_i^{(k')} \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

lo spazio proiettante S_t da $S_{k'}$ (o $S_{k'}$ da S_k) è dato in ogni caso (n. 7 Cap. 1.°) dalle formule

$$x_i = \lambda^{(0)} x_i^{(0)} + \ldots + \lambda^{(k)} x_i^{(k)} + \mu^{(0)} y_i^{(0)} + \ldots + \mu^{(k')} y_i^{(k')}$$

al variare dei parametri $\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(k')}$. Se $t = k + k' + 1$, cioè se S_k, $S_{k'}$ sono indipendenti, e soltanto allora, questi parametri possono interpretarsi come coordinate omogenee di punto nell'S_t.

Se lo spazio S_k è lo spazio fondamentale $A_0 A_1 \ldots A_k$ e quindi dato dalle formule

$$x_i = \lambda^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k)$$
$$x_i = 0 \quad (i = k+1, \ldots, r),$$

lo spazio proiettante (sostituendo alle espressioni $\lambda^{(i)} + \mu^{(0)} y_i^{(0)} + \ldots + \mu^{(k')} y_i^{(k')}$ nuovi parametri arbitrari $\rho^{(i)}$) si ricava dalle formule

$$x_i = \rho^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

$$(4) \qquad x_i = \mu^{(0)} y_i^{(0)} + \mu^{(1)} y_i^{(1)} + \ldots + \mu^{(k')} y_i^{(k')} \quad (i = k+1, \ldots, r),$$

e quindi esso è costituito dalla totalità dei punti le cui coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_r$ si ottengono dando alle $x_0, x_1, \ldots, x_k$ variabilità generale e facendo variare le $x_{k+1}, \ldots, x_r$ come le coordinate omonime dell'$S_{k'}$.

Proiettare uno spazio $S_{k'}$ *da un* S_k *sopra un* S_m significa costruire l'intersezione (se esiste) dello spazio proiettante S_l con S_m, e questa intersezione si dice *proiezione* di $S_{k'}$ da S_k (o di S_k da $S_{k'}$) su S_m. Se, nuovamente, S_k è lo spazio fondamentale $A_0\,A_1 \ldots A_k$ e se S_m è lo spazio S_{r-k-1} fondamentale opposto cioè $A_{k+1} \ldots A_r$, la detta proiezione si ottiene facendo le $x_0, x_1, \ldots, x_k$ nulle e di nuovo facendo variare le $x_{k+1}, \ldots, x_r$ come le coordinate omonime dell'$S_{k'}$, cioè nel modo prescritto dalle (4), le quali divengono allora formule rappresentative della proiezione nello spazio S_{r-k-1}.

Così un punto $y_0 : y_1 : \ldots : y_r$ proiettato dal suddetto S_k fondamentale dà un S_{k+1} proiettante, di cui un punto variabile ha le coordinate $\rho^{(0)} : \rho^{(1)} : \ldots : \rho^{(k)} : \rho^{(k+1)} y_{k+1} : \rho^{(k+1)} y_{k+2} : \ldots : \rho^{(k+1)} y_r$ in S_r e le coordinate $\rho^{(0)} : \rho^{(1)} : \ldots : \rho^{(k+1)}$ nell'S_{k+1}. La proiezione del punto sull'S_{r-k-1} fondamentale opposto ha le coordinate $0 : 0 : \ldots : 0 : y_{k+1} : \ldots : y_r$ in S_r e $y_{k+1} : \ldots : y_r$ in S_{r-k-1}.

La proiezione da un S_k *sopra un* S_{r-k-1} *si può sempre sostituire con proiezioni da* $k+1$ *punti indipendenti* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *dell'*S_k. Basterà considerare la proiezione di un punto X, cioè l'intersezione X_1 dello spazio proiettante $S_{k+1} \equiv X\,S_k$ con S_{r-k-1}. Questo punto X_1 può anche ottenersi proiettando X in X′ da A_0 sopra l'$S_{r-1} \equiv A_1\,A_2 \ldots A_k\,S_{r-k-1}$; poi proiettando X′ in X″ da A_1 sopra l'$S_{r-1} \equiv A_0\,A_2 \ldots A_k\,S_{r-k-1}$ (o, ciò che è lo stesso, nel precedente S_{r-1} proiettando X′ in X″ da A_1 sopra l'$S_{r-2} \equiv A_2 \ldots A_k\,S_{r-k-1}$); ...; ed in fine proiettando $X^{(k)}$ in $X^{(k+1)}$ da A_k sopra l'$S_{r-1} \equiv A_0\,A_1 \ldots A_{k-1}\,S_{r-k-1}$ (o, ciò che è lo stesso, nell'$S_{r-k} \equiv A_k\,S_{r-k-1}$ proiettando $X^{(k)}$ in $X^{(k+1)}$ da A_k sopra l'S_{r-k-1}). Siccome lo spazio a cui appartengono i punti $X, X', \ldots, X^{(k)}, X^{(k+1)}$ contiene manifestamente i punti $A_0, A_1, \ldots, A_k$, esso è il sunnominato S_{k+1} proiettante, e però $X^{(k+1)} \equiv X_1$.

9. — Sulla proiezione di un $S_{k'}$ da un S_k sopra uno spazio S_{r-k-1} indipendente da S_k è utile fare l'osservazione seguente. Ogni punto di $S_{k'}$ fuori di S_k determina con S_k stesso uno spazio S_{k+1} che ha un solo punto comune con S_{r-k-1}, e che sarà la proiezione di quel punto sull'S_{r-k-1}. Se i due spazî S_k ed $S_{k'}$ si tagliano in uno spazio S_l, un punto di S_{r-k-1}, che sia proiezione di un punto di $S_{k'}$ da S_k, è anche proiezione di tutti i punti dell'S_{l+1} (di $S_{k'}$) determinato da quel punto di $S_{k'}$ e dal suddetto S_l; quindi, *se la corrispondenza tra i punti di* $S_{k'}$ *ed i punti della sua proiezione è biunivoca* (onde questa proiezione è pure un $S_{k'}$), ***debbono***

necessariamente S_k ***ed*** $S_{k'}$ ***non avere alcun punto comune.*** **Invece, se ogni punto della proiezione di $S_{k'}$ da S_k su S_{r-k-1} è immagine di tutti e soli i punti di un S_{l+1} di $S_{k'}$ (onde quella proiezione è un $S_{k'-l-1}$), gli spazî S_k ed $S_{k'}$ si tagliano in un S_l. Infatti, in tal caso, lo spazio S_{l+1} costituito dai punti di $S_{k'}$, che hanno una stessa immagine e lo spazio S_k sono contenuti in uno spazio S_{k+1} e quindi si tagliano in uno spazio a un numero di dimensioni non minore di l. Ma d'altra parte per la considerazione precedente e per l'ipotesi, tale numero non può superare l: dunque S_k ed $S_{k'}$ si tagliano appunto in un S_l.**

10. — All'operazione del *proiettare* si associa dualmente quella di *segare* uno spazio S_k con uno spazio $S_{k'}$ (o $S_{k'}$ con S_k), cioè di costruire l'intersezione dei due spazî (quando esiste). Σ_{r-k-1} anche $S_{r-(r-k)}$

Se S_k è dato come intersezione di $r-k$ iperpiani indipendenti di equazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi_0^{(0)} x_0 + \ldots + \xi_r^{(0)} x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_0^{(r-k-1)} x_0 + \ldots + \xi_r^{(r-k-1)} x_r = 0\,, \end{cases}$$

ed $S_{k'}$ come intersezione di $r-k'$ iperpiani indipendenti di equazioni

$$(6)\qquad \begin{cases} \eta_0^{(0)} x_0 + \ldots + \eta_r^{(0)} x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_0^{(r-k'-1)} x_0 + \ldots + \eta_r^{(r-k'-1)} x_r = 0\,, \end{cases}$$

l'intersezione di S_k ed $S_{k'}$ potrà considerarsi come data dal sistema complessivo di equazioni

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi_0^{(0)} x_0 + \ldots + \xi_r^{(0)} x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_0^{(r-k-1)} x_0 + \ldots + \xi_r^{(r-k-1)} x_r = 0 \\ \eta_0^{(0)} x_0 + \ldots + \eta_r^{(0)} x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_0^{(r-k'-1)} x_0 + \ldots + \eta_r^{(r-k'-1)} x_r = 0\,: \end{cases}$$

e, se la caratteristica della matrice di questo sistema è $r-l$, tale spazio d'intersezione sarà ad l dimensioni. perchè $r-l$ iperpiani s'i[ncontrano] in un $S_{r-(r-l)}$ cioè in un S_l. [illegible]
[illegible]

11. — Possiamo dedurne subito il numero di condizioni cui devono soddisfare due spazî di dimensioni date k, k', perchè s'intersechino in un terzo spazio di dimensione l parimenti data. Infatti, se le (5), (6) sono le equazioni di quei due spazî, deve per ipotesi essere $r-l$ la caratteristica della matrice del sistema (7): d'altra parte tale matrice ha $r+1$ colonne e $2r-(k+k')$ linee, quindi, perchè la sua caratteristica sia $r-l$, occorre, per un noto teorema [1]), che siano soddisfatte $[2r-(k+k')-(r-l)] \cdot [r+1-(r-l)] = (r-k-k'+l)(l+1) = (r-t)(l+1)$ condizioni indipendenti, se si indica con $t = k + k' - l$ la dimensione dello spazio a cui i due spazî considerati devono appartenere. Dunque: — *Perchè due spazî* S_k, $S_{k'}$ *dell'* S_r *si taglino in un* S_l, *ovvero appartengano ad un* S_t, *devono essere soddisfatte* $(r-t)(l+1)$ *condizioni.*

Di qui si ricava immediatamente l'altro teorema: — *Perchè uno spazio* S_k *dell'* S_r *contenga un altro spazio* $S_{k'}$ $(k' \leq k)$ *devono essere soddisfatte* $(r-k)(k'+1)$ *condizioni* —.

12. — Se $k=k'$, dall'ultimo teorema segue che gli S_k devono dipendere da $(r-k)(k+1)$ parametri, il che si suole esprimere dicendo che *gli* S_k *di* S_r *costituiscono una totalità* $\infty^{(r-k)(k+1)}$ (non lineare, come vedremo, se $0<k<r-1$).

Applichiamo questo risultato a dimostrare che *gli* S_k *di* S_r *che passano per un dato* $S_{k'}$ $(k>k')$ *dipendono da* $(r-k)(k-k')$ *parametri, cioè,* come si dice, *formano una totalità* $\infty^{(r-k)(k-k')}$. Basta considerare un $S_{r-k'-1}$ indipendente dall'$S_{k'}$: ogni S_k per $S_{k'}$ taglia $S_{r-k'-1}$ in un $S_{k-k'-1}$, e viceversa ogni $S_{k-k'-1}$ di $S_{r-k'-1}$, congiunto con $S_{k'}$, dà un S_k passante per $S_{k'}$: dunque gli spazî richiesti dipendono da tanti parametri da quanti dipendono gli $S_{k-k'-1}$ di $S_{r-k'-1}$; e però ecc. Per $k=k'+1$ e $k=r-1$ si hanno totalità lineari (Cfr. n. 5).

Altra applicazione è la seguente. Un S_k dipende da $(r-k)(k+1)$ parametri: se deve incontrare un *dato* $S_{k'}$ in un S_l, quei parametri devono soddisfare (n. 11) ad $(r-k-k'+l)(l+1)$ condizioni: quindi il numero dei parametri che resta libero è $(r-k)(k+1)-(r-k-k'+l)(l+1) = (k-l)(r-k)+(k'-l)(l+1)$. Il che si enuncia col dire che *gli* S_k *di* S_r *che incontrano un dato* $S_{k'}$ *in un* S_l *formano una totalità* $\infty^{(k-l)(r-k)+(k'-l)(l+1)}$.

13. — Che gli S_k di S_r dipendano da $(r-k)(k+1)$ parametri può dimostrarsi anche così. Siccome ogni punto dell'S_r è individuato da r

1) Cfr. Capelli, *l. c.*, pag. 196, *Note ed Esercizî*, 4.

coordinate (non omogenee), i gruppi di $k+1$ punti indipendenti di S_r dipendono da $r(k+1)$ parametri: ma, per analoga ragione, i gruppi di $k+1$ punti indipendenti di S_k dipendono da $k(k+1)$ parametri: dunque gli S_k di S_r varieranno soltanto al variare di $r(k+1)-k(k+1)=(r-k)(k+1)$ parametri.

Oppure si può ragionare in quest'altro modo (che è sostanzialmente il breve ragionamento precedente tradotto in formule). In un S_k prendiamo $k+1$ punti indipendenti $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$: ogni altro gruppo di $k+1$ punti indipendenti $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(k)}$ è dato dalle formule

$$\left.\begin{array}{l} z_i^{(0)} = \lambda_0^{(0)} y_i^{(0)} + \dots + \lambda_0^{(k)} y_i^{(k)} \\ z_i^{(1)} = \lambda_1^{(0)} y_i^{(0)} + \dots + \lambda_1^{(k)} y_i^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_i^{(k)} = \lambda_k^{(0)} y_i^{(0)} + \dots + \lambda_k^{(k)} y_i^{(k)} \end{array}\right\} \quad i=(0, 1, \dots, r)$$

e si potrà sempre disporre delle $(k+1)^2$ indeterminate λ per fare in modo che altrettante delle $(r+1)(k+1)$ $z_i^{(j)}$ $(i=0, \dots, r;\ j=0, \dots, k)$ abbiano valori genericamente dati [1]). Per esempio, se il determinante $\Sigma \pm y_0^{(0)} y_1^{(1)} \dots y_k^{(k)} \neq 0$, si potranno fissare genericamente le $z_i^{(0)}, z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(k)}$ $(i=0, \dots, k)$: ne risulteranno determinate le λ e quindi anche le altre $z_i^{(0)}, z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(k)}$ $(i=k+1, \dots, r)$: sicchè per ogni S_k si avrà in generale un sistema ed uno solo di valori di queste ultime. Perciò gli S_k dipendono da $(r+1)(k+1)-(k+1)^2=(r-k)(k+1)$ parametri.

(10) **14.** — Adesso vogliamo stabilire un sistema di coordinate per la totalità $\infty^{(r-k)(k+1)}$ degli S_k di S_r $(0<k<r-1)$. Un modo suggerito dalla dimostrazione precedente (ove prendere fissi i rapporti delle $z_0^{(0)}, z_1^{(0)}, \dots, z_k^{(0)}$ significa prendere il punto $z^{(0)}$ in un dato S_{r-k}; ecc.) sarebbe quello di fissare $k+1$ S_{r-k} generici e determinare un S_k mediante i suoi $k+1$ punti d'appoggio su questi S_{r-k}. Ognuno di questi punti, nel relativo S_{r-k}, ha $r-k$ coordinate, onde in tutto si avrebbero appunto $(r-k)(k+1)$ coordinate per l'S_k. Ma un tal modo non è accettabile, perchè vi sono casi di eccezione. Infatti tutti gli S_k per un S_{k-1} che si appoggi agli

[1]) Con ciò intendiamo valori prefissati a piacere, ma esclusi quelli, dai quali segua il determinante $\Sigma \pm \lambda_0^{(0)} \lambda_1^{(1)} \dots \lambda_k^{(k)} = 0$, che allora i punti $z^{(i)}$ non sarebbero indipendenti (n. 8 del Cap. 1.°).

S_{r-k} considerati [1]) avrebbero allora le stesse coordinate, ed inversamente non sarebbero determinate, per es., le coordinate di un S_k che tagli uno degli S_{r-k} in un S_i $(i>0)$.

Procederemo pertanto in un modo ben diverso; e, analogamente a quanto si fa nell'ordinaria geometria della retta, stabiliremo per gli S_k un numero di coordinate omogenee maggiore di $(r-k)(k+1)+1$, salvo poi a mostrare che fra di esse passa un conveniente numero di relazioni identiche. Anche qui, come per la geometria della retta, si consegue la biunivocità, senza eccezione, della corrispondenza fra la totalità dei valori delle coordinate e la totalità degli S_k di S_r, solo a patto di aumentare il numero delle coordinate stesse.

15. — Premettiamo la seguente proprietà. Preso un qualunque S_k dell'S_r, siano $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, $k+1$ suoi punti indipendenti e $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(r-k-1)}$ $r-k$ iperpiani indipendenti passanti per esso. Le due matrici

$$
(8) \qquad \left\| \begin{matrix} x_0^{(0)} & x_0^{(1)} & \ldots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(k)} \\ . & . & . & . \\ x_r^{(0)} & x_r^{(1)} & \ldots & x_r^{(k)} \end{matrix} \right\|
$$

e

$$
(9) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_0^{(0)} & \xi_0^{(1)} & \ldots & \xi_0^{(r-k-1)} \\ \xi_1^{(0)} & \xi_1^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(r-k-1)} \\ . & . & . & . \\ \xi_r^{(0)} & \xi_r^{(1)} & \ldots & \xi_r^{(r-k-1)} \end{matrix} \right\|
$$

saranno ambedue differenti da zero e quindi non saranno nulli, nè tutti gli $\binom{r+1}{k+1}$ minori di ordine $k+1$ tratti dalla prima, nè tutti gli $\binom{r+1}{r-k}=\binom{r+1}{k+1}$ minori di ordine $r-k$ tratti dalla seconda. Per comodità indicheremo con $(j_0 j_1 \ldots j_k)_x$ il minore di ordine $k+1$ tratto dalla (8) e formato con le linee corrispondenti agli indici inferiori $j_0, j_1, \ldots, j_k$; e, analogamente, con $(j_0 j_1 \ldots j_{r-k-1})_\xi$ il minore di ordine $r-k$ tratto dalla (9) e formato colle

[1]) Tali S_{k-1} esistono certamente. Infatti perchè un S_{k-1} si appoggi a $k+1$ S_{r-k} debbono essere soddisfatte $k+1$ condizioni, e d'altra parte gli S_{k-1} di S_r dipendono da $(r-k+1)k$ $(>k+1)$ parametri.

linee corrispondenti agli indici inferiori $j_0, j_1, \dots, j_{r-k-1}$. Dimostreremo che i minori in discorso tratti dalla matrice (8) non differiscono (a meno del segno) da quelli della matrice (9) che per un fattore di proporzionalità: precisamente dimostreremo che *i minori d'ordine* $k+1$ *della matrice* (8) *sono proporzionali ai loro complementi algebrici nel determinante di ordine* $r+1$

$$\begin{vmatrix} x_0^{(0)} x_0^{(1)} \dots x_0^{(k)} \xi_0^{(0)} \xi_0^{(1)} \dots \xi_0^{(r-k-1)} \\ x_1^{(0)} x_1^{(1)} \dots x_1^{(k)} \xi_1^{(0)} \xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(r-k-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r^{(0)} x_r^{(1)} \dots x_r^{(k)} \xi_r^{(0)} \xi_r^{(1)} \dots \xi_r^{(r-k-1)} \end{vmatrix}.$$

Infatti il determinante di ordine $r-k$

$$(10)\quad \begin{vmatrix} \xi_0^{(0)} & \xi_0^{(1)} & \dots & \xi_0^{(r-k-1)} \\ \xi_1^{(0)} & \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(r-k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r-k-2}^{(0)} & \xi_{r-k-2}^{(1)} & \dots & \xi_{r-k-2}^{(r-k-1)} \\ \xi_{r-k-1}^{(0)} x_{r-k-1} + \dots + \xi_r^{(0)} x_r, & \xi_{r-k-1}^{(1)} x_{r-k-1} + \dots + \xi_r^{(1)} x_r & \dots & \xi_{r-k-1}^{(r-k-1)} x_{r-k-1} + \dots + \xi_r^{(r-k-1)} x_r \end{vmatrix}$$

grazie alla circostanza che tutti gli iperpiani $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r-k-1)}$ contengono tutti i punti $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, si annulla se vi si fa

$$x_{r-k-1} = x_{r-k-1}^{(i)}, \dots, x_r = x_r^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Facendo tali sostituzioni e svolgendo, si hanno le $k+1$ relazioni lineari omogenee

$$x_{r-k-1}^{(i)} (0, 1, \dots, r-k-2, r-k-1)_\xi + x_{r-k}^{(i)} (0, 1, \dots, r-k-2, r-k)_\xi + \dots +$$
$$+ x_r^{(i)} (0, 1, \dots, r-k-2, r)_\xi = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

fra i $k+2$ determinanti $(0, 1, \dots, r-k-2, r-k-1)_\xi, \dots, (0, 1, \dots, r-k-2, r)_\xi$. Ne segue [1])

$$(0,1,\dots,r-k-2,r-k-1)_\xi : (0,1,\dots,r-k-2,r-k)_\xi : (0,1,\dots,r-k-2,r-k+1)_\xi : \dots : (0,1,\dots,r-k-2,r)_\xi =$$
$$= (r-k,r-k+1,\dots,r)_x : -(r-k-1,r-k+1,\dots,r)_x : (r-k-1,r-k,r-k+2,\dots,r)_x : \dots : \pm(r-k-1,\dots,r-1)_x$$

[1]) Cfr. Capelli, *l. c.*, n. 437.

Ora è chiaro che, come dal determinante (10) abbiamo dedotta questa serie di proporzioni, così se ne potrà ottenere un' altra adoperando il determinante, che si ricava da (10) sostituendo all'ultima linea la seguente

$$\xi^{(0)}_{r-k-2} x_{r-k-2} + \xi^{(0)}_{r-k} x_{r-k} + \dots + \xi^{(0)}_{r} x_r \,,\ \xi^{(1)}_{r-k-2} x_{r-k-2} + \xi^{(1)}_{r-k} x_{r-k} + \dots + \xi^{(1)}_{r} x_r \,,$$
$$\dots\,,\ \xi^{(r-k-1)}_{r-k-2} x_{r-k-2} + \xi^{(r-k-1)}_{r-k} x_{r-k} + \dots + \xi^{(r-k-1)}_{r} x_r \,,$$

ed alla penultima l'altra

$$\xi^{(0)}_{r-k-1} \,,\ \xi^{(1)}_{r-k-1} \,,\ \dots \,,\ \xi^{(r-k-1)}_{r-k-1} \,,$$

e poichè, come si vede subito, questa nuova serie di proporzioni ha un rapporto comune con la prima, le due serie si riuniranno in una sola. Così proseguendo, si arriva senz'altro alla dimostrazione dell' enunciato.

Ne discende che, a meno di un fattore di proporzionalità, i minori di ordine $k+1$ tratti dalla matrice (8) (o d' ordine $r-k$ tratti dalla (9)) coincidono coi minori analoghi della matrice formata con le coordinate di altri $k+1$ punti qualunque indipendenti dell' S_k (o con le coordinate di altri $r-k$ iperpiani indipendenti passanti per l' S_k), perchè tanto gli uni quanto gli altri sono proporzionali (a meno del segno) ai minori della matrice (9) (o della (8)). Il che del resto si verifica con facilità anche direttamente, perchè, se $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ sono altri $k+1$ punti indipendenti dell'S_k, avendosi, per convenienti valori delle λ,

$$\left.\begin{array}{l} y^{(0)}_i = \lambda^{(0)}_0 x^{(0)}_i + \dots + \lambda^{(k)}_0 x^{(k)}_i \\ y^{(1)}_i = \lambda^{(0)}_1 x^{(0)}_i + \dots + \lambda^{(k)}_1 x^{(k)}_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k)}_i = \lambda^{(0)}_k x^{(0)}_i + \dots + \lambda^{(k)}_k x^{(k)}_i \end{array}\right\} (i = 0, 1, \dots, r),$$

i minori di ordine $k+1$ tratti dalla matrice formata con le y si ottengono da quelli analoghi della (8) moltiplicandoli per il determinante $\Sigma \pm \lambda^{(0)}_0 \lambda^{(1)}_1 \dots \lambda^{(k)}_k$.

16. — Ciò posto, dimostreremo che *i minori di ordine $k+1$ della* (8), *o, ciò che oramai fa lo stesso, quelli di ordine $r-k$ della* (9) *possono assumersi come coordinate omogenee dell' S_k di S_r*. Che per ogni S_k quei minori non sieno tutti nulli e sieno perfettamente individuati (a meno ben inteso di un fattore di proporzionalità) risulta immediatamente dalle cose dette. Basterà adunque far vedere: 1.° che di essi soltanto $(r-k)(k+1)+1$ convenientemente scelti sono indipendenti, per modo che, conosciutili, se-

guono subito i valori degli altri; 2.° che due S_k coincidono quando quei minori relativi all'uno sieno proporzionali ai minori analoghi relativi all'altro.„

Supponiamo, per fissare le idee, che il minore di ordine $k+1$ della matrice (8)

$$(11) \qquad (0,1,\ldots,k)_x = \begin{vmatrix} x_0^{(0)} x_0^{(1)} & \ldots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(0)} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{(0)} x_k^{(1)} & \ldots & x_k^{(k)} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero; come fu già osservato nel n. 13, scegliendo opportunamente i $k+1$ punti indipendenti $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ di S_k, può farsi in guisa che tutti gli elementi $x_i^{(j)}$ $(i=0,1,\ldots,k\ ;\ j=0,1,\ldots,k)$ di questo determinante prendano valori genericamente dati. Allora dico che, assegnati questi valori e conosciuti gli altri $(r-k)(k+1)$ minori di ordine $k+1$ che si ricavano da (11) col sostituire ad una qualunque delle sue linee una qualunque delle rimanenti $r-k$ linee della matrice (8), sono conosciuti tutti gli altri $\binom{r+1}{k+1}-(r-k)(k+1)-1$: con che la prima affermazione sarà dimostrata. Invero, svolgendo, ad es., i determinanti (provenienti da (11) col sostituire successivamente alle sue linee la linea $(k+2)^{\text{esima}}$ della matrice (8))

$$(12) \quad (k+1,1,2,\ldots,k)\ ,\ (0,k+1,2,\ldots,k)\,,\ldots,(0,1,2,\ldots,k-1,k+1),$$

ove, per semplicità, si è tralasciato l'indice inferiore x, si ottengono le equazioni

$$(13) \quad \begin{cases} (k+1\,,1\,,2\,,\ldots,k) = x_{k+1}^{(0)} X_0^{(0)} + x_{k+1}^{(1)} X_0^{(1)} + \ldots + x_{k+1}^{(k)} X_0^{(k)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (0,1,2,\ldots,k-1,k+1) = x_{k+1}^{(0)} X_k^{(0)} + x_{k+1}^{(1)} X_k^{(1)} + \ldots + x_{k+1}^{(k)} X_k^{(k)} : \end{cases}$$

nelle quali $X_i^{(j)}$ è il complemento algebrico di $x_i^{(j)}$ nel determinante (11), per cui il determinante $\Sigma \pm X_0^{(0)} X_1^{(1)} \ldots X_k^{(k)}$ è pure diverso da zero. Da quelle equazioni si ricavano quindi $x_{k+1}^{(0)}, x_{k+1}^{(1)}, \ldots, x_{k+1}^{(k)}$ in funzione dei determinanti (12) e degli elementi del determinante (11). Così proseguendo, si dimostra che in funzione di questi elementi e degli $(r-k)(k+1)$ determinanti sunnominati si ottengono tutti gli elementi rimanenti della matrice (8) e quindi tutti gli altri $\binom{r+1}{k+1}-(r-k)(k+1)-1$ determinanti in questione.

Ed ora segue subito anche la seconda affermazione. Infatti abbia S'_k gli $(r-k)(k+1)+1$ minori, analoghi ai suddetti di S_k, proporzionali a questi. Poichè il minore (11) è diverso da zero, sarà pur tale il minore analogo di S'_k: perciò, disponendo convenientemente dei punti indipendenti da scegliere in S'_k, si potrà fare che tale minore abbia non solo lo stesso valore di (11), ma gli stessi elementi. Dopo ciò, i detti $(r-k)(k+1)+1$ minori di S'_k saranno eguali agli analoghi di S_k; e, per la considerazione superiore, la matrice di S'_k analoga alla matrice (8) coinciderà con questa elemento per elemento. Adunque S_k ed S'_k coincideranno.

Anzi osserviamo che, *fissati affatto arbitrariamente i valori degli* $(r-k)(k+1)+1$ *determinanti suddetti*, purchè l'(11) sia diverso da zero, le cose precedenti mostrano come si trovi subito l'S_k corrispondente. Basta cioè prendere gli elementi di (11) così che esso abbia il valore dato e calcolare $x^{(0)}_{k+1}, x^{(1)}_{k+1}, \ldots, x^{(k)}_{k+1}$ dalle (13) avendo posto nei primi membri i valori dati dei determinanti: ed analogamente per le altre linee di (8); così si ottengono le coordinate di $k+1$ punti indipendenti di S_k.

17. — Per trovare le relazioni che legano gli $\binom{r+1}{k+1}$ minori della matrice (8), notisi che il determinante di ordine $k+2$

$$\begin{vmatrix} x^{(0)}_{j_0}\alpha_0+x^{(1)}_{j_0}\alpha_1+\ldots+x^{(k)}_{j_0}\alpha_k & x^{(0)}_{j_0} & x^{(1)}_{j_0}\ldots x^{(k)}_{j_0} \\ x^{(0)}_{j_1}\alpha_0+x^{(1)}_{j_1}\alpha_1+\ldots+x^{(k)}_{j_1}\alpha_k & x^{(0)}_{j_1} & x^{(1)}_{j_1}\ldots x^{(k)}_{j_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(0)}_{j_k}\alpha_0+x^{(1)}_{j_k}\alpha_1+\ldots+x^{(k)}_{j_k}\alpha_k & x^{(0)}_{j_k} & x^{(1)}_{j_k}\ldots x^{(k)}_{j_k} \\ x^{(0)}_{i_0}\alpha_0+x^{(1)}_{i_0}\alpha_1+\ldots+x^{(k)}_{i_0}\alpha_k & x^{(0)}_{i_0} & x^{(1)}_{i_0}\ldots x^{(k)}_{i_0} \end{vmatrix}$$

è nullo qualunque siano le $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Quindi, ponendo per $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i complementi algebrici di $x^{(0)}_{i_0}, x^{(1)}_{i_0}, \ldots, x^{(k)}_{i_0}$ nel determinante $(i_0\, i_1, \ldots, i_k)$

e sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, si trova

$$(j_0 i_1 \dots i_k)(j_1 j_2 \dots j_k i_0) - (j_1 i_1 \dots i_k)(j_0 j_2 \dots j_k i_0) + \dots +$$
$$+ (-1)^k (j_k i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 \dots j_{k-1} i_0) + (-1)^{k+1} (i_0 i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 \dots j_k) = 0;$$

ossia, per una semplice trasformazione,

$$(i_0 i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 \dots j_k) = (j_0 i_1 \dots i_k)(i_0 j_1 \dots j_k) + (j_1 i_1 \dots i_k)(j_0 i_0 j_2 \dots j_k) +$$
$$+ \dots + (j_k i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 \dots j_{k-1} i_0):$$

o brevemente

$$(i_0 i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 \dots j_k) = \sum_{s=0}^{s=k} (j_s i_1 \dots i_k)(j_0 \dots j_{s-1} i_0 j_{s+1} \dots j_k).$$

Da questa relazione fondamentale se ne deducono altre, eguagliando alcuni degli indici $i_0, i_1, \dots, i_k$ ad alcuni degli indici $j_0, j_1, \dots, j_k$. Fermiamoci alla più semplice, quella cosidetta a tre termini, che si ottiene dalla precedente facendo, ad es., $i_2 = j_2$, $i_3 = j_3$, ..., $i_k = j_k$. Si trova (annullandosi gli altri prodotti perchè vi compariscono dei minori con due linee eguali)

$$(14) \quad (i_0 i_1 \dots i_k)(j_0 j_1 i_2 \dots i_k) = (j_0 i_1 \dots i_k)(i_0 j_1 i_2 \dots i_k) + (j_1 i_1 \dots i_k)(j_0 i_0 i_2 \dots i_k);$$

la quale mostra potersi esprimere (razionalmente) ogni minore $(j_0 j_1 i_2 \dots i_k)$, che differisce per due linee da un altro $(i_0 i_1 i_2 \dots i_k)$, per mezzo di questo e dei minori che differiscono da questo di una sola linea. Segue che *essa dà tutte le relazioni richieste:* giacchè, conosciuto, per es., il minore $(i_0 i_1 \dots i_k)$, supposto differente da zero, e quelli che si ricavano da esso sostituendo ad una qualunque delle sue linee una qualunque delle $r-k$ linee rimanenti della matrice (8) (cfr. n. 16), si conoscono senz'altro tutti gli altri. Infatti i minori che differiscono per due linee da $(i_0 i_1 \dots i_k)$ si calcolano immediatamente, come dicemmo testè: quelli che differiscono per tre linee da $(i_0 i_1 \dots i_k)$ si calcolano per mezzo dei precedenti che differiscono da essi di una e due linee soltanto: e così di seguito.

Che viceversa dati $\binom{r+1}{k+1}$ numeri qualunque, che indicheremo con $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$ (ove $i_0 i_1 \dots i_k$ è una combinazione qualunque dei numeri $0, 1, \dots, r$) dei quali uno almeno $X_{01\dots k}$ non nullo, soddisfacenti alle (14), esista un S_k che ha quei numeri per coordinate, segue subito dall'ultima osservazione del n. 16, e dal notare che l'S_k che ha per coordinate $X_{01\dots k}$ e gli altri $(r-k)(k+1)$ numeri rappresentati da questo simbolo, nel quale si sostituiscano successivamente agli indici $0, 1, \ldots, k$ i rimanenti $k+1, \ldots, r$, ha anche le altre $X_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ per coordinate, queste essendo date dalle (14).

Dunque *le* (14) *sono condizioni necessarie e sufficienti perchè* $\binom{r+1}{k+1}$ *numeri* $X_{i_0 i_1 \ldots i_k}$, *di cui uno almeno non nullo, sieno le coordinate omogenee di un* S_k. È importante notare altresì che *le relazioni* (14) (o le altre che equivalgono ad esse) *sono quadratiche nelle dette coordinate.*

18. — Alle cose esposte si può dare una notevole ed utile forma geometrica.

Per una estensione affatto naturale di denominazioni adoperate nella geometria dell' S_3 diciamo *ipersuperficie quadrica* o semplicemente *quadrica* di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni la totalità dei punti che soddisfano con le loro coordinate ad una equazione quadratica ed omogenea nelle coordinate correnti, e *varietà intersezione* di più quadriche la totalità dei punti comuni a queste [1]). Ciò premesso, suppongasi di dare agli $\binom{r+1}{k+1}$ parametri $X_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ variabilità generale: si avranno allora le coordinate omogenee di uno spazio a $\binom{r+1}{k+1} - 1$ dimensioni. In questo spazio esisterà la varietà definita dalle

$$X_{i_0 i_1 \ldots i_k} X_{j_0 j_1 i_2 \ldots i_k} = X_{j_0 i_1 \ldots i_k} X_{i_0 j_1 i_2 \ldots i_k} + X_{j_1 i_1 \ldots i_k} X_{j_0 i_0 i_2 \ldots i_k};$$

i punti della qual varietà, per le cose dette, corrispondono senza eccezione agli S_k di S_r: e lo studio della totalità degli S_k si potrà fare su quella varietà. Tuttociò si esprime dicendo: — *La geometria della totalità degli* S_k *di* S_r *coincide con la geometria della varietà d' intersezione di certe* $\binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$ *quadriche dello spazio ad* $\binom{r+1}{k+1} - 1$ *dimensioni.* — In particolare *l'ordinaria geometria della retta coincide con la geometria di una quadrica dell'* S_5.

19. — Aggiungeremo ora alle cose dei n. 10-12 una nozione e una formola di grande utilità, specie nella Geometria enumerativa [2]).

---

[1]) Delle quadriche e delle ipersuperficie in generale si dirà in seguito (Cap. 6.°, 8.°).

[2]) Cfr. SCHUBERT, ad es., nella Memoria, *Anzahl-bestimmungen für lineare Raume beliebiger dimension* (Acta mathem. 8, 1886, pag. 97).

Dati $k+1$ spazî $S_{a_0}, S_{a_1}, \ldots, S_{a_k}$, di cui ciascuno sia contenuto nel successivo, chiamasi *forma fondamentale* e si indica con

$$[a_0\, a_1\, a_2 \,\ldots\, a_{k-1}\, a_k] \tag{15}$$

la totalità degli S_k obbligati a giacere in S_{a_k}, a segare $S_{a_{k-1}}$ in un S_{k-1}, a segare $S_{a_{k-2}}$ in un S_{k-2}, ... e a segare S_{a_0} in un S_0. Siccome S_k deve segare S_{a_i} in un S_i (o contenere S_{a_i}, se $a_i = i$) ed $S_{a_{i+1}}$ in un S_{i+1} ed inoltre S_{a_i} è contenuto in $S_{a_{i+1}}$, non può essere $a_i = a_{i+1}$: sicchè, dalla stessa definizione, segue che

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k ,$$

e quindi $a_i \geq i$ e insieme (per essere $a_k \leq r$) $a_i \leq r-k+i$.

Il numero $\binom{r+1}{k+1}$ delle combinazioni dei numeri $0, 1, \ldots, r$ a $k+1$ a $k+1$ dà manifestamente il numero delle forme fondamentali diverse a cui può appartenere un S_k (prescindendo dall'arbitrarietà degli S_{a_i}). Vi è compresa la forma $[r-k, r-k+1, \ldots, r]$, che corrisponde ai massimi valori dei numeri a_i, e che è costituita da tutti gli S_k di S_r (perchè il segare S_{r-1} in un S_{k-1}, S_{r-2} in un S_{k-2}, ... è conseguenza del giacere in S_r). Vi è pure compresa la forma $[0\,1\,2 \ldots k]$, corrispondente ai minimi valori dei numeri a_i, la quale è costituita da un solo S_k, come è evidente.

20. — Supposti sempre dati gli spazî $S_{a_0}, \ldots, S_{a_k}$, si calcola facilmente il numero d delle condizioni imposte ad un S_k dall'appartenere ad una forma fondamentale (15). Perchè S_k giaccia in un S_{a_k} devono essere soddisfatte $(r-a_k)(k+1)$ condizioni; perchè S_k ed $S_{a_{k-1}}$ si taglino in un S_{k-1} devono essere soddisfatte $(a_k - k - a_{k-1} + k - 1)\,k$ condizioni; perchè S_{k-1} ed $S_{a_{k-2}}$ di $S_{a_{k-1}}$ si taglino in un S_{k-2} devono essere soddisfatte $(a_{k-1} - k + 1 - a_{k-2} + k - 2)(k-1)$ condizioni; ecc. (n. 10). Dunque il numero cercato è

$$d = (r-a_k)(k+1) + (a_k - a_{k-1} - 1)k + (a_{k-1} - a_{k-2} - 1)(k-1) + \ldots + (a_1 - a_0 - 1),$$

cioè

$$d = (k+1)r - \frac{k(k+1)}{2} - \sum_0^k a_i .$$

Siccome un S_k è dato da $(k+1)(r-k)$ condizioni, diremo quindi che *sono* $\infty^{\Sigma a_i - \frac{k(k+1)}{2}}$ *gli* S_k *di una forma fondamentale* (15).

21. — Caso particolare di una forma fondamentale è la totalità degli S_i $(i > k'-k)$ di una stella di sostegno $S_{k'-k-1}$ $(k' \leq r)$ e di specie k (n. 6), e precisamente questa totalità, come subito si vede, è la forma fondamentale

$$[0\ 1\ 2\ ,\dots,k'-k-2\ ,\ k'-k-1\ ,\ 2k'-k-i\ ,\ 2k'-k-i+1\ ,\dots,k'-1\ ,\ k'] .$$

Un altro caso particolare si trova nel n. 12. Gli S_k di S_r che incontrano un dato $S_{k'}$ in un S_l sono quelli della forma fondamentale

$$[k'-l\ ,\ k'-l+1\ ,\dots,k'-1\ ,\ k'\ ,\ r-k+l+1\ ,\ r-k+l+2\ ,\dots,r-1\ ,\ r] .$$

22. — Termineremo il presente Cap. coll'osservare che la nozione di spazio a più dimensioni e le sue fondamentali proprietà, esposte per via algebrica in questo e nel Cap. precedente, possono essere presentate con metodo del tutto sintetico. Si può cioè stabilire un complesso di postulati che serva a caratterizzare lo spazio a più dimensioni e poi dedurne la rappresentazione dei punti mediante coordinate. Osserveremo altresì che, come si disse fino da principio (n. 1 Cap. 1.°), intendiamo di considerare anche punti (od S_k) imaginarî, cioè dati da coordinate imaginarie o complesse, ma che l'introduzione di questi punti può farsi pure per via sintetica, come mostrò dapprima lo Staudt ne' suoi classici *Beiträge* [1]).

[1]) Per chi voglia approfondire i metodi sintetici accennati, citeremo il libro di VERONESE, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (Padova, 1891); la nota di AMODEO, *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di un* S_r (Atti dell'Acc. di Torino, **26**, 1891); il lavoro di FANO, *Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni* (Giornale di Matematiche, 30 (1), 1891) e la recente Memoria di PIERI, *Nuovi principii di geometria proiettiva complessa* (Memorie della R. Acc. di Torino, 55 (2), 1905) colla « *Breve aggiunta...* » (Atti ivi, 41, 1906): nei quali si trovano inoltre ampie indicazioni bibliografiche.

Capitolo 3.°

Proiettività fra due S_r distinti.

1. — La definizione di Staudt della proiettività di due S_1 (o di due Σ_1 o di un S_1 e di un Σ_1) è opportuna quando di questi si considerano solo i punti reali: nè in tal caso occorre introdurvi la condizione della continuità, come fu dimostrato da Darboux in seguito ad una osservazione di Klein [1]). Ma se si considerano negli S_1 anche punti imaginarî, la detta definizione di Staudt, ammessa la continuità della corrispondenza (la quale è ancora dubbio se sia o no necessaria), conduce, oltre che al riferimento proiettivo ordinario, ad un riferimento di natura ben diversa, che Segre ha chiamato *antiproiettività* [2]). (11)

Conviene adunque, quando si è introdotta la nozione di elementi imaginarî, prendere per definizione del riferimento proiettivo tra due S_1 o la definizione di Chasles e di Steiner della eguaglianza dei rapporti anarmonici o quella, adottata dal Cremona, della deduzione di un S_1 dall'altro per proiezioni e sezioni, od anche la seguente: — *Due* S_1 *sono proiettivi se fra le coordinate* $X = \frac{x_0}{x_1}$, $Y = \frac{y_0}{y_1}$ *di due punti corrispondenti sussiste una relazione bilineare*

$$AXY + BX + CY + D = 0\,, \quad CB - AD \neq 0$$

o, ciò che è lo stesso (risolvendo, per es., rispetto ad Y e variando le indicazioni),

se $$\begin{aligned} \rho y_0 &= a_{00} x_0 + a_{01} x_1 \\ \rho y_1 &= a_{10} x_0 + a_{11} x_1 \end{aligned} \qquad a_{00} a_{11} - a_{01} a_{10} \neq 0\,;$$

1) Math. Ann. 17, 1880, pag. 52.

2) Cfr., ad es., Math. Ann. 40, 1892, pag. 413.

cioè se si fa una trasformazione lineare (ad es.) *delle x nelle y* [1]. — Manifestamente due S_1 (o due Σ_1, ovvero un S_1 e un Σ_1) proiettivi ad un terzo sono proiettivi fra loro.

Se si considera un S_1 trasformato proiettivamente in sè, nel qual caso si parla, per comodità di linguaggio, di due S_1 proiettivi sovrapposti, si presenta la questione della determinazione dei punti dell' S_1 che coincidono coi loro corrispondenti *(punti uniti)*. Si ha il teorema fondamentale: — *Se due* S_1 *proiettivi sovrapposti hanno tre punti uniti, hanno tutti i punti uniti; cioè la proiettività è l'identità* —: il quale teorema segue subito dalla definizione data facendo $X = Y$ (premessa, ove occorra, una trasformazione di coordinate, perchè X ed Y sieno riferiti agli stessi punti fondamentali e punto unità).

Si ha pure subito che esiste una ed una sola proiettività fra due S_1 (ad es.) che fa corrispondere a tre punti (distinti) di un S_1 tre punti (pure distinti) dell'altro.

2. — Vediamo come la definizione data di due S_1 proiettivi equivalga alle altre due definizioni alle quali si è accennato nel numero precedente.

Dapprima, per una osservazione già fatta (fine del n.° 3, Cap. 2.°), si ha che in due S_1 proiettivi il rapporto armonico di quattro punti qualunque di un S_1 è eguale a quello dei quattro corrispondenti dell'altro. Viceversa, quando questa proprietà ha luogo fra due S_1 in corrispondenza biunivoca, chiamando (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) tre coppie fisse di punti corrispondenti e (X, Y) una coppia variabile, si ha l'uguaglianza

y = (bx + d)/(ax + c) è una trasformazione lineare

$$(X_1 X_2 X_3 X) = (Y_1 Y_2 Y_3 Y),$$

che è appunto una relazione bilineare fra X ed Y.

Se un S_1 si proietta da un S_{k-2} indipendente da esso e sono, nell' $S_k \equiv S_1 S_{k-2}$, η_i, ζ_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ le coordinate di due S_{k-1} per l' S_{k-2} e y_i, z_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ le coordinate di due punti dell' S_1, la condizione d'incidenza dell' S_{k-1} (del fascio S_{k-2}) di coordinate $\eta_i + X\zeta_i$ e del punto (di S_1) di coordinate $y_i + Yz_i$ è

$$\sum (\eta_i + X\zeta_i)(y_i + Yz_i) = 0,$$

---

[1] Notisi anche che una corrispondenza biunivoca algebrica fra due S_1 (cfr. Cap. 9.°) è necessariamente data da una relazione bilineare fra le coordinate di due punti corrispondenti, e però è una proiettività.

La definizione di Steiner è più vasta di quella di Staudt e si dimostra che la definizione fra due S_1 equivale a quella di Steiner la quale è bilineare in X, Y. Segue che, facendo corrispondere ad ogni punto di S_1, l'S_{k-1} che lo proietta dall'S_{k-2}, cioè, come dicesi brevemente, proiettando l'S_1 dall'S_{k-2} (o, correlativamente, segando il fascio S_{k-2} con S_1) si ha una proiettività (in questo caso *prospettività*, come si dirà fra poco in generale). Adunque due S_1 (ad es.) dedotti l'uno dall'altro per proiezioni e sezioni sono proiettivi. Viceversa, dati due S_1 proiettivi, si può sempre, per la proposizione diretta, sostituire ad essi due S_1 proiettivi sghembi; e allora, nell'S_3 che li congiunge, una retta appoggiata a tre altre, determinate da tre coppie di punti corrispondenti, è asse di un fascio, ogni piano del quale deve segare (applicando le proprietà del n.° 1) i due S_1 in punti corrispondenti: e però ecc.

3. — Per due S_1 proiettivi l'equazione della proiettività può sempre scriversi nella forma $X = Y$, ossia i punti corrispondenti possono sempre essere dati dalla variazione di un solo parametro. Ciò si ottiene (e soltanto allora) quando i punti fondamentali $0, \infty$ ed il punto unità relativi alla coordinata X sono rispettivamente i corrispondenti dei punti fondamentali $0, \infty$ e del punto unità relativi alla coordinata Y.

Ma se i due S_1 proiettivi sono sovrapposti [1]) ed X, Y sono riferiti agli stessi punti fondamentali ed unità (che non possono tutti tre essere uniti, escludendo che la proiettività sia l'identità), l'equazione della proiettività si può mettere nella forma $X = kY$, se esistono due punti uniti (assunti come punti $0, \infty$): da cui si rileva essere costante e $= k$ (*invariante* della proiettività) il rapporto anarmonico dei due punti uniti e di due punti corrispondenti. Invece nelle stesse suddette ipotesi, l'equazione della proiettività si può mettere nella forma $X = Y + k$, se esiste un solo punto unito (assunto come punto ∞).

$(0\infty XY) = \frac{X}{Y}$

Quest'ultima equazione mostra che una proiettività (non identica) di un S_1 in sè, con un solo punto unito, non può essere *ciclica;* cioè partendo da un punto (diverso dal punto unito) e prendendo di esso il corrispondente e poi di questo di nuovo il corrispondente e così di seguito, non si arriva mai, dopo un numero n finito di successivi punti corrispondenti, al punto di partenza (se Y è la coordinata di questo punto si arriva al punto di coordinata $Y + nk$).

Al contrario, se la proiettività ha due elementi uniti, cioè è data dalla

[1]) Le cose che seguono rientrano come caso particolarissimo in quelle del Cap. 4°.

$X = kY$, perchè, partendo da un punto (non unito) di coordinata Y, l'n^{esimo} punto successivo corrispondente, cioè quello di coordinata $k^n Y$, sia il primo che coincide con quello di partenza, evidentemente *è necessario e sufficiente che sia l'invariante k radice primitiva n*^{esima} *dell'unità.* Ne risulta anzi che, *se la proprietà ha luogo per un particolare punto, ha luogo per ogni altro punto.* Allora la proiettività dell' S_1 in sè dicesi *ciclica d'ordine n* e gli n punti costituiti da uno dato e dagli $n-1$ suoi successivi corrispondenti si dice che formano *un gruppo ciclico-proiettivo*. Questi n punti, nella adottata rappresentazione (cioè essendo $0, \infty$ punti fondamentali) hanno le loro coordinate proporzionali alle n radici n^{esime} dell'unità.

Se $n=2$, si ha *l'involuzione ordinaria*. I due punti uniti *(doppî)* formano gruppo armonico con due elementi corrispondenti [1]).

Se $n=3$, *ciascuno dei due punti uniti forma gruppo equianarmonico coi tre punti di ogni ciclo.* Infatti, se Z è la coordinata di un punto unito e Y, Y', Y'', le coordinate dei punti di un ciclo, la quaderna $ZYY'Y''$ essendo proiettiva alla $ZY'Y''Y$, ricordando proprietà del n.° 3, Cap. 2.°, si hanno le uguaglianze

$$(ZYY'Y'') = (ZY'Y''Y) = \frac{1}{(ZY'YY'')} = \frac{1}{1-(ZYY'Y'')},$$

donde risulta ciò che si è affermato.

Infine si osservi che tutte le cose di questo n.° e del precedente sono estendibili (cfr. l'ultima alinea del n.° 3, Cap. 2.°) a due totalità ∞^1 (distinte o sovrapposte) tali che si possa far corrispondere agli enti di ciascuna totalità biunivocamente ed algebricamente i valori di un parametro.

* 4. — Passiamo a definire la proiettività di due S_r qualunque ($r>1$). Ora possiamo accogliere, estendendola al caso nostro, la definizione di Staudt della proiettività delle forme di 2.ª e 3.ª specie, coll'aggiunta di una restrizione imposta dall'ammissione degli elementi imaginari. Diremo che: — *Due spazî ad r dimensioni* S_r, S'_r *sono proiettivi quando*

---

1) L'equazione della involuzione riferita ai punti doppî è $X+Y=0$. L'equazione generale di una involuzione è

$$AXY + B(X+Y) + D = 0.$$

Se si prendono due punti corrispondenti come punti $0, \infty$, questa prende l'aspetto $XY = k$, od anche, variando il punto unità, $XY = 1$.

fra gli $S_0, S_1, \ldots, S_{r-1}$ *dell'uno e gli* $S'_0, S'_1, \ldots, S'_{r-1}$ *dell'altro vi è corrispondenza biunivoca tale che, se un* S_i *giace in un* S_j, *il corrispondente* S'_i *giace pure nel corrispondente* S'_j *e reciprocamente, e quando inoltre* [1] *ad un* S_1 *dell'uno corrisponde nell'altro un* S'_1 *proiettivo.* — Su questa definizione faremo due osservazioni:

a) Basta che la proiettività si verifichi per due particolari S_1 ed S'_1 corrispondenti, perchè essa si verifichi per ogni altra coppia di S_1 corrispondenti. Infatti se R_1 ed R'_1 sono due altre rette corrispondenti degli spazî S_r, S'_r, riferiamo S_1 ed R_1 prospettivamente ad un fascio qualunque di iperpiani: allora S'_1, R'_1 risulteranno riferiti pure prospettivamente al fascio di iperpiani corrispondente: ma, per ipotesi S_1 ed S'_1 sono proiettivi, dunque tali sono anche i due fasci e tali per conseguenza anche R_1 ed R'_1.

b) La condizione principale della definizione è sovrabbondante: vale a dire basta assicurarsi che, essendo i, j fissi ed $i \neq j$, agli spazî subordinati S_i ed S_j di S_r corrispondano in modo biunivoco gli S'_i ed S'_j subordinati di S'_r così che, se un S_i giace in un S_j, anche l'S'_i corrispondente giaccia nell'S'_j corrispondente e viceversa, perchè la stessa cosa si verifichi per valori qualsiansi di i, j. Facciamo dapprima il caso che sia $i = j + 1$. Allora, preso nello spazio S_r un S_{j+1} qualunque, consideriamo tutti gli S_j in esso contenuti. Due a due essi si taglieranno in un S_{j-1} e, per l'ipotesi fatta, alla loro totalità corrisponderà nell'S'_r una totalità di S'_j aventi due a due un S'_{j-1} comune. Ora questi S'_j non potranno passare tutti per lo stesso S'_{j-1}, altrimenti lo stesso avverrebbe degli S_j corrispondenti nello spazio S_r; dunque (n. 16, Cap. 1.°) apparterranno ad un S'_{j+1}. Prendendo questo S'_{j+1} come corrispondente del considerato S_{j+1}, si estende la corrispondenza biunivoca agli spazî subordinati ad $j+1$ dimensioni dei due spazî dati S_r, S'_r; e così, continuando, a tutti gli altri spazî di dimensione superiore a j: ed è evidente che, se di questi uno giace in un altro, la stessa cosa è dei corrispondenti. Per assegnare poi di ogni S_{j-2} (e in generale, di ogni spazio subordinato a dimensione minore di $j-1$) di S_r lo spazio corrispondente in S'_r, basta considerare quell'S_{j-2} come sostegno di un Σ_{r-j+1} di iperpiani, osservando che, per la dimostrazione precedente, è stabilita omai una corri-

[1] Se la corrispondenza è algebrica, quest'ultima condizione è superflua (Cfr. la nota a pag. 43).

spondenza fra gli iperpiani ed i fasci di iperpiani di S_r e quelli di S'_r, e applicando poi la dimostrazione correlativa alla medesima. Infine facciamo l'ipotesi che, pure essendo $i<j$, sia $i \neq j-1$. Presi un qualunque S_{i+1} di S_r e due S_i di esso che gli appartengono (segantisi cioè in un S_{i-1}), si osservi che a questi due S_i corrispondono due S'_i, i quali, per l'ipotesi, non possono coincidere e perciò appartengono ad un S'_k ove $k \geq i+1$. Manifestamente, sempre per l'ipotesi, ogni S_j per l'S_{i+1} ha per corrispondente un S'_j per i due S'_i e quindi per l'S'_k, e reciprocamente; e quindi ogni S_i di S_{i+1} (in quanto giace in quegli S_j) ha per corrispondente un S'_i di S'_k (in quanto giace nei corrispondenti S'_j), e reciprocamente. Ma ora prendansi in S'_k due S'_i appartenenti ad un S'_{i+1}: i loro corrispondenti (che non possono coincidere) apparterranno all'S_{i+1} e, come prima, si avrà che ad ogni S_j per l'S_{i+1} corrisponderà un S'_j per l'S'_{i+1}, e viceversa: il che esige che sia $S'_k = S'_{i+1}$, altrimenti si contraddirrebbe all'ipotesi della corrispondenza biunivoca degli S_j di S_r agli S'_j di S'_r. Così si vengono a porre in corrispondenza biunivoca gli S_{i+1} di S_r e gli S'_{i+1} di S'_r, e perciò si cade nel caso precedente.

5. — La definizione data di proiettività fra un S_r ed un S'_r (o fra un Σ_r ed un Σ'_r) è valevole anche fra un S_r ed un Σ'_r (sostituendo nella definizione $\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_{r-1}$ ad $S'_1, \ldots, S'_{r-1}$): nel primo caso la proiettività dicesi *omografia* o *collineazione*, nel secondo, *reciprocità* o *correlazione.*

Però, quando si considerano proprietà di due spazî proiettivi S_r, S'_r, le quali sono indipendenti dal coincidere o no questi due spazî e dal loro intersecarsi o no, il che esprimiamo brevemente dicendo che consideriamo *proiettività fra due spazî distinti* (e solo di tali proprietà, escluso il teorema fondamentale e quelli sugli spazî prospettivi, si occupa il presente Cap.), non occorre distinguere l'omografia dalla reciprocità, potendosi in uno spazio (o in amendue) scambiare la denominazione di iperpiano con quella di punto.

Ciò non è più vero quando si considera la proiettività di uno spazio in sè, o, come anche si dice, *la proiettività fra due spazî sovrapposti,* perchè, avendosi uno spazio solo, se in esso il punto si dice iperpiano, si dovrà di conseguenza chiamare l'iperpiano, punto. Allora quelle due proiettività sono differenti e sono dette rispettivamente *omografia* o *collineazione di uno spazio in sè*, e *reciprocità* o *correlazione di uno spazio in sè.* Per ciascuna di esse sussistono le proprietà del caso generale di due spazî distinti, le quali non sieno incompatibili col fatto che la proiettività è fra i punti (o fra i punti e gli iperpiani) di un solo S_r: ma si hanno poi, come vedremo (Cap. 4.°, 5.°), altre importanti proprietà provenienti esclusivamente da questo fatto.

6. — Dalla definizione del n. 4 segue senz'altro che: — *Due spazî proiettivi ad un terzo sono proiettivi fra loro* — e che: — *Due spazî subordinati corrispondenti in due spazî proiettivi sono anch'essi proiettivi.* — La proiettività di due tali S_k ed S'_k (o Σ_k e Σ'_k ovvero S_k e Σ'_k) corrispondenti dicesi *proiettività subordinata* della data.

Dimostriamo il teorema fondamentale: — *Se uno spazio* S_r *è trasformato omograficamente in sè ed esistono* $r+2$ *punti uniti che ad* $r+1$ *ad* $r+1$ *sono indipendenti (cioè non stanno in un iperpiano) l'omografia è l'identità.* — Infatti il teorema essendo vero per $r=1$ (n. 1) si dimostra in generale, facendo vedere che esso si verifica per due spazî ad r dimensioni quando è vero per due spazî ad $r-1$ dimensioni. Sieno A_0, A_1, ..., A_{r+1} i punti uniti: all'iperpiano di S_r determinato (ad es.) da A_0, A_1, ..., A_{r-1} corrisponde l'iperpiano medesimo per essere questi punti uniti, e così alla retta $A_r A_{r+1}$ corrisponde la retta medesima: quindi il punto B comune a questa retta ed a quell'iperpiano è unito. Segue, per il teorema ammesso per gli spazî ad $r-1$ dimensioni, che l'iperpiano stesso ha tutti i punti uniti, perchè gli $r+1$ punti di esso A_0, A_1, ..., A_{r-1}, B sono uniti e ad r ad r non esistono mai in un S_{r-2} (non possono manifestamente esistervi gli r punti A e neppure A_0, A_1, ..., A_{r-2}, B (ad es.), chè altrimenti A_0, A_1,..., A_{r-2}, A_r, A_{r+1} sarebbero in un S_{r-1}): e così pure sono uniti tutti i punti della retta $A_r A_{r+1}$ (n. 1). Ne risulta che ogni iperpiano di S_r (non passante per B) è unito, perchè taglia l'iperpiano considerato $A_0 A_1 \dots A_{r-1}$ e la retta $A_r A_{r+1}$ in un S_{r-2} ed in un punto (amendue uniti) che lo determinano (n. 14, Cap. 1.°): quindi è unito ogni punto di S_r, in quanto agli iperpiani passanti per esso corrispondono gli iperpiani stessi.

In forza del teorema ora citato e per un ragionamento analogo al precedente si ha quest'altro teorema generale: — *Se uno spazio* S_r *è trasformato omograficamente in sè stesso e sono* S_{a_1}, S_{a_2}, S_{a_3}, ... *spazî di punti tutti uniti, appartenenti ad* S_r *ed aventi almeno un punto comune, l'omografia si riduce all'identità.* —

7. — Un S_k dell'S_r dicesi *prospettivo* ad una stella, avente per sostegno un S_{r-k-1} indipendente dall'S_k, quando si faccia corrispondere ad ogni spazio S_i di S_k lo spazio S_{r-k+i} della stella, che lo contiene.

Due spazî S_k ed S'_k di S_r, che si tagliano in un S_h ($h \geq -1$) e quindi appartengono ad un S_{2k-h}, si dicono *prospettivi* quando si facciano corrispondere i loro spazî S_i, S'_i giacenti in un medesimo S_{k-h+i} di una stella dell'S_{2k-h}, la quale abbia il sostegno S_{k-h-1} indipendente da S_k ed S'_k; o, come dicesi brevemente, quando si considerino S_k ed S'_k come sezioni di quella stella. Così, in sostanza, si fa della geometria nell'S_{2k-h} in discorso; ma se si vuole considerare la cosa in uno spazio a maggior dimensione, ed in particolare nello spazio ambiente dato S_r, basta prendere un $S_{k-h+x-1}$ di S_r che tagli l'S_{2k-h} solo nel suddetto sostegno S_{k-h-1}; allora è chiaro che S_k ed S'_k possono anche considerarsi come sezioni della stella di sostegno $S_{k-h+x-1}$. Ciò facendo, poichè $S_{k-h+x-1}$ ed S_{2k-h} devono tagliarsi in S_{k-h-1} e devono appartenere al più ad S_r, è evidente che deve essere $x \leq r-2k+h$.

Correlativamente due stelle, i sostegni S_k ed S'_k delle quali appartengono ad un S_h e quindi si tagliano in un S_{2k-h}, si dicono *prospettive* quando si considerano come proiezione di uno stesso spazio S_{r+k-h} (cioè si corrispondono due spazî delle due stelle passanti per un medesimo spazio dell'S_{r+k-h}) che contiene l'S_{2k-h}, o come proiezioni di uno spazio $S_{r+k-h-x}$ che insieme all'S_{2k-h} appartiene a quell'S_{r+k-h}. Per il numero x si ha naturalmente la limitazione $x \geq 2k-h-1$.

In tutti i casi è chiaro che il riferimento prospettivo è un caso particolare del riferimento omografico.

8. — Si ha ora il notevole teorema: — *Due spazî S_k ed S'_k omografici ed indipendenti sono prospettivi* —. Sia infatti S_{2k+1} lo spazio a cui essi appartengono e sieno $A_0, A_1, \ldots, A_{k+1}$, $k+2$ punti di S_k tali che a $k+1$ a $k+1$ sieno indipendenti: lo stesso sarà dei $k+2$ punti corrispondenti $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k+1}$ di S'_k (perchè se, ad es., $A'_0, A'_1, \ldots, A'_k$ fossero in un S'_{k-1}, i loro corrispondenti $A_0, A_1, \ldots, A_k$ dovrebbero pure (n. 4) essere in un S_{k-1}). Di qui segue che le $k+1$ rette $A_0A'_0$, $A_1A'_1$, ..., $A_kA'_k$ (ad es.) appartengono all'S_{2k+1} suddetto e quindi sono indipendenti (n. 12, Cap. 1.°), e segue anche che ogni punto della retta $A_{k+1}A'_{k+1}$ è esterno ad ogni S_{2k-1} che contenga k sole delle considerate $k+1$ rette, altrimenti queste k rette e la $A_{k+1}A'_{k+1}$ sarebbero in un S_{2k}. Quindi, se A''_{k+1} è un punto qualunque della $A_{k+1}A'_{k+1}$, per esso passa uno ed un solo spazio a k dimensioni S''_k che si appoggia alle stesse $k+1$ rette (n. 17, Cap. 1.°) nei punti che diremo rispettivamente $A''_0, A''_1, \ldots, A''_k$. Ora proiettiamo S_k da S''_k su S'_k; ne risulterà una omografia di S'_k in sè, nella quale sono omologhi un punto corrispondente ad un punto di S_k per la data omografia e la proiezione di questo punto, ed

in questa omografia sono uniti i $k+2$ punti $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k+1}$. Tale omografia è adunque l'identità (n. 6): e però S_k, S'_k sono sezioni della stella dello spazio S_{2k+1} di sostegno S''_k, o, come dicesi, sono *prospettivi dall'* S''_k. Tale prospettività può sostituirsi poi *con* $k+1$ *prospettività da punti* (n. 8, Cap. 2.°).

Si osservi che S''_k si appoggia non solo alle rette $A_0A'_0, \ldots, A_{k+1}A'_{k+1}$, ma a tutte le ∞^k rette che si ottengono congiungendo i punti corrispondenti di S_k ed S'_k; quindi, se si fa variare A''_{k+1} sopra $A_{k+1}A'_{k+1}$, si ottengono ∞^1 spazî a k dimensioni (S_k ed S'_k compresi) due qualunque dei quali sono prospettivi da un terzo pure qualunque.

Si osservi inoltre che, mentre quegli ∞^1 spazî a k dimensioni sono punteggiati proiettivamente dalle ∞^k rette suddette, due qualunque di queste sono anche punteggiate proiettivamente da quelli. Giacchè, se S_{2k-1} è lo spazio a cui appartengono le rette $A_0A'_0, \ldots, A_{k-1}A'_{k-1}$ (ad es.), ogni S_{2k} che lo congiunge con A''_k della retta $A_kA'_k$ contiene S''_k (contenendone $k+1$ punti indipendenti $A''_0, A''_1, \ldots, A''_k$) e quindi contiene anche A''_{k+1} di $A_{k+1}A'_{k+1}$: onde le punteggiate di sostegni $A_kA'_k$, $A_{k+1}A'_{k+1}$ descritte da A''_k, A''_{k+1}, al variare di S'_k in quella ∞^1, sono prospettive, essendo sezioni della stella (fascio) di S_{2k+1} che ha per sostegno l' S_{2k-1} suddetto.

La varietà (a $k+1$ dimensioni) riempita da quegli ∞^1 spazî a k dimensioni od anche da quell' ∞^k rette, può considerarsi come la generalizzazione, in un certo senso, della rigata quadrica dello spazio ordinario.

9. — Dal teorema dimostrato nel n.° precedente deduciamo subito che, almeno aumentando convenientemente le dimensioni dello spazio ambiente [1]), *ogni omografia fra due spazî* S_k *ed* S'_k *non indipendenti può considerarsi come il prodotto di due prospettività.* Infatti si aumenti, se occorre, la dimensione dello spazio ambiente, tanto da poter considerare un terzo spazio S''_k indipendente da S_k; e si stabilisca arbitrariamente una prospettività tra S''_k ed S'_k. Ne risulta una omografia tra S''_k ed S_k, che, per il detto teorema, è senz'altro una prospettività: quindi, come volevasi, l'omografia considerata può ottenersi effettuando successivamente due prospettività. Se a queste si vogliono sostituire prospettività da punti, la dimostrazione fatta mostra che ne può occorrere un numero

---

[1]) Ciò si fa, nel modo più semplice, accrescendo il numero delle coordinate, e considerando lo spazio dato come uno spazio fondamentale del nuovo spazio ambiente.

$\leq k+2$. Ma su ciò, senza accrescere la dimensione dello spazio ambiente, si troveranno nei due n.[i] seguenti risultati più precisi.

10. — Cominciamo dal notare che, se due spazî S_k, S'_k sono prospettivi e si tagliano in un S_h, i punti di questo S_h sono uniti. Viceversa: — *Se due spazî* S_k, S'_k *sono omografici e si tagliano in un* S_h $(0 \leq h \leq k-1)$ *tutto di punti uniti, essi sono prospettivi* —.

Supponiamo dapprima che sia $h=k-1$. Allora un S_1 di S_k esterno all' S_{k-1}, intersezione di S_k ed S'_k, incontra S_{k-1} in un punto che è unito; quindi questo S_1 ed il suo corrispondente S'_1 di S'_k si tagliano e sono prospettivi. Sia O il centro di prospettiva, punto esterno ad S_k (e parimente ad S'_k), altrimenti ogni raggio proiettante quindi anche S'_1 giacerebbe in S_k e per conseguenza in S_{k-1}, cioè coinciderebbe con S_1 (contro l'ipotesi che questo sia scelto esternamente all' S_{k-1}). Proiettando S_k da O sopra S'_k, si stabilisce fra S_k ed S'_k una prospettività in cui S_{k-1} è di punti uniti e ad S_1 corrisponde S'_1: ne risulta quindi, per la data omografia, una corrispondenza omografica di S'_k (ad es.) in sè, la quale deve essere l'identità, perchè in essa S_{k-1} ed S'_1 sono uniti punto per punto (n. 6). Adunque l'omografia data coincide colla detta prospettività.

Adesso supponiamo h qualunque $(0 \leq h < k-1)$. Sieno A_{h+1}, B_{h+1}, ..., C_{h+1}, $k-h$ spazî S_{h+1} condotti per l' S_h nell' S_k ed appartenenti a questo spazio, e sieno A'_{h+1}, B'_{h+1}, ..., C'_{h+1} i $k-h$ S'_{h+1}, corrispondenti per l'omografia data, i quali passeranno pure per l' S_h ed apparterranno ad S'_k. Allora, per il caso precedente, A_{h+1} ed A'_{h+1}, B_{h+1} e B'_{h+1}, ..., C_{h+1} e C'_{h+1} sono prospettivi da certi punti O_1, O_2, ..., O_{k-h} e lo spazio, a cui questi appartengono è un S_{k-h-1}. Infatti, se O_1, O_2, ..., O_{k-h} appartenessero ad un $S_{k-h-i-1}$ $(i>0)$, questo spazio, congiunto con S_k, darebbe un S_{2k-h-i} (al più), che dovrebbe contenere A'_{h+1}, B'_{h+1}, ..., C'_{h+1} e quindi anche S'_k, il che non può essere, perchè S_k ed S'_k appartengono ad un S_{2k-h}. Per una ragione analoga l' S_{k-h-1}, cui O_1, O_2, ..., O_{k-h} appartengono, non ha alcun punto comune con S_k od S'_k. Si può quindi proiettare, in S_{2k-h}, lo spazio S_k da S_{k-h-1} sopra S'_k: si ottiene una prospettività in cui S_h è di punti uniti, ed in cui evidentemente si corrispondono A_{h+1} ed A'_{h+1}, B_{h+1} e B'_{h+1}, ..., C_{h+1} e C'_{h+1}. Se ne conclude, come dianzi (per il n. 6), che questa prospettività coincide colla omografia data. Si avverta poi che la prospettività stessa è sostituibile con $k-h$ prospettività da punti.

Correlativamente: — *Due stelle, i cui sostegni* S_k, $S_{k'}$ *appartengano ad* *un* S_h, *sono prospettive quando tutti gli iperpiani comuni alle due stelle, cioè passanti per* S_h, *sono uniti.*

11. — Dimostriamo ora che *due spazî* S_k, S'_k *omografici e non coincidenti possono dedursi l'uno dall'altro al più con* $k+1$ *prospettività da punti.* Sia A un punto generico di S_k ed A' il suo corrispondente di S'_k; e sulla retta AA', esterna ad S_k ed S'_k, prendasi un punto O diverso da A ed A'. Si proietti S'_k da O sopra uno spazio S''_k dell' $S_{k+1} \equiv OS'_k$, avente il punto A comune con S_k ma distinto da questo spazio. Per l'omografia data risulteranno S_k ed S''_k omografici ed avranno unito il punto comune A. Prendasi allora una retta r di S_k generica per il punto A e sia r'' la retta corrispondente di S''_k, pure passante per A; le due punteggiate r, r'' saranno prospettive da un certo centro O' (esterno ad S_k ed S''_k): quindi se da O' si proietta S''_k sopra uno spazio S'''_k dell' $S_{k+1} \equiv O'S''_k$, passante per r, ma distinto da S_k, risulteranno di nuovo S_k ed S'''_k omografici ed avranno unita punto per punto la retta r. Così continuando (cioè facendo passare per r un piano generico di S_k e poi considerando il piano corrispondente di S'''_k; ecc.), si arriva alla dimostrazione del teorema, perchè si giungerà infine a due spazî omografici S_k ed $S_k^{(k+1)}$ che avranno unito punto per punto lo spazio S_{k-1} secondo cui s'intersecano: e tali spazî sono prospettivi da un punto (n. 10). Gli spazî successivamente prospettivi sono S'_k, S''_k, S'''_k, ..., $S_k^{(k+1)}$, S_k. Le prospettività (da punti) sono $k+1$; si riducono a $k-h$ se S_k, S'_k hanno un S_h di punti uniti *comune*, perchè, ripetendo il ragionamento precedente, si può partire da due S_{k+1} corrispondenti di S_k, S'_k passanti per l' S_h, cioè da due S_{h+1} prospettivi, ecc. Notisi che occorrono pure $k-h$ prospettività da punti se l' S_h di punti uniti è *spazio d'intersezione* di S_k, S'_k (n. 10). Però, quando quest'ultima condizione manca, cioè S_k, S'_k appartengono ad uno spazio di dimensione $< 2k-h$, non si può più sostituire alle $k-h$ prospettività da punti una sola prospettività da un S_{k-h-1}.

Infine si osservi che, avendosi due spazî omografici e coincidenti S_k, S'_k, proiettando S'_k da un punto O sopra un altro spazio S''_k (dell' $S_{k+1} \equiv OS'_k$), si deduce da ciò che si è ora dimostrato, occorrere per il passaggio da S_k ad S'_k al più $k+2$ prospettività da punti (in conformità al n. 9).

12. — Sieno M, N due punti di uno spazio S_r ed M', N' due punti di un altro spazio S'_r; e sieno riferite omograficamente le stelle M, M' e le stelle N, N', colla restrizione che le stelle MN, M'N' sieno riferite in una sola omografia subordinata di amendue le dette omografie. Dico

che *esiste una omografia ed una sola fra* S_r *ed* S'_r *nella quale le considerate omografie sono subordinate.*

Per dimostrarlo si estende immediatamente il ragionamento che suol farsi nell'ordinaria geometria proiettiva. Ad ogni punto X di S_r esterno alla retta MN si faccia corrispondere il punto X' di S'_r comune alle rette delle stelle M', N' che corrispondono alle MX, NX (rette certo incontrantesi, quando $r > 2$, per la restrizione suddetta); il qual punto X' sarà pure esterno ad M'N'. Viceversa, dato X' è individuato X. Se X descrive un S_{r-1} per M (o per N), X' descrive manifestamente un S'_{r-1} per M' (o per N'); e, se descrive un S_{r-1} non contenente M, N, si stabilisce una prospettività fra le due stelle M, N, onde nasce una proiettività fra le stelle M', N', anzi una prospettività per la ricordata restrizione e per il secondo teorema del n. 10: e quindi X' descrive pure un S'_{r-1} che prendiamo corrispondente a quell' S_{r-1}. Si completi ora la corrispondenza fra punti, osservando che gli S_{r-1} per un punto X di MN (diverso da M, N) devono avere per corrispondenti S'_{r-1} per un punto X' (che si dirà corrispondente ad X) di M'N', perchè ad r iperpiani generici per X non possono corrispondere r iperpiani individuanti un punto esterno ad M'N' (altrimenti, per ciò che si è detto, anche quelli dovrebbero individuare un punto esterno ad MN). Si ha adunque (n. 4) una omografia fra i due spazî S_r, S'_r che soddisfa alle condizioni imposte e che, dalla fatta costruzione, risulta essere la sola possibile, perchè è chiaro che qualunque omografia avente le date proiettività subordinate si può costruire nel modo esposto.

Si noti che questo teorema ed i successivi, valgono anche per le correlazioni, facendo soltanto un opportuno cambiamento di denominazioni (cfr. n. 5).

13. — Segue che, *per riferire omograficamente due spazî* S_r, S'_r, *si possono scegliere* $r+2$ *punti qualunque di* S_r, $r+1$ *dei quali non sieno mai in un iperpiano* [1]) *ed attribuir loro come corrispondenti* $r+2$ *punti di* S'_r *pure qualunque ma assoggettati alla stessa condizione. Ne risulta fra* S_r *ed* S'_r *una ed una sola omografia.*

Poichè il teorema è vero per $r=1$ (n. 1), si dimostrerà che è vero per qualunque valore r, ammettendolo per valori inferiori ad r. Sieno

[1]) Cosifatti $r+2$ punti si hanno prendendo $r+1$ punti indipendenti e poi un $(r+2)^{\text{esimo}}$ punto fuori degli $r+1$ iperpiani determinati da quelli presi ad r ad r.

$P_0, P_1, \ldots, P_{r+1}$ i punti dati di S_r; $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{r+1}$ i loro corrispondenti di S'_r. Si riferiscano omograficamente le stelle P_0, P'_0 (ad es.) facendo corrispondere alle rette $P_0P_1, \ldots, P_0P_{r+1}$ le $P'_0P'_1, \ldots, P'_0P'_{r+1}$ ed anche le stelle P_1, P'_1 (ad es.) facendo corrispondere alle rette $P_1P_0, \ldots, P_1P_{r+1}$ le $P'_1P'_0, \ldots, P'_1P'_{r+1}$; il che si può per l'ipotesi fatta. Ne deriva fra le stelle P_0P_1, $P'_0P'_1$ una sola omografia subordinata in cui ai piani $P_0P_1P_2$, $\ldots, P_0P_1P_{r+1}$ corrispondono i piani $P'_0P'_1P'_2, \ldots, P'_0P'_1P'_{r+1}$. Applicando adesso il teorema del numero precedente si arriva subito al risultato.

14. — Si può estendere ora facilmente il teorema del n. 12: cioè si può dimostrare che se S_{h-1}, S_{k-1} sono due spazî indipendenti di S_r, appartenenti quindi ad un S_{h+k-1}, ed S'_{h-1}, S'_{k-1}, due spazî pure indipendenti di S'_r, appartenenti quindi ad un S'_{h+k-1} ($h \leq r-1$, $k \leq r-1$, $h+k \leq r$) e se fra le stelle S_{h-1}, S'_{h-1} esiste una omografia e così pure fra le stelle S_{k-1}, S'_{k-1}, colla restrizione che le stelle S_{h+k-1}, S'_{h+k-1} sieno riferite in una sola omografia subordinata delle due precedenti, *esiste una ed una sola omografia fra S_r ed S'_r, nella quale le considerate omografie sono subordinate.*

Infatti un punto X preso genericamente in S_r congiunto con S_{h+k-1} dà un S_{h+k}, nel quale giacciono gli S_h, S_k congiungenti X con S_{k-1}, S_{h-1}. Per le date omografie ad S_h, S_k corrispondono in S'_r spazî S'_h, S'_k giacenti nell' S'_{h+k} (non nell' S'_{h+k-1}) corrispondente all' S_{h+k}: onde S'_h, S'_k hanno un punto X' comune che si fa corrispondere al punto X. Se X cade sopra S_{h-1} (e analogamente sopra S_{k-1}), il suo corrispondente X' cade nel punto in cui l' S'_k della stella S'_{k-1}, corrispondente all' $S_k \equiv XS_{k-1}$, incontra S'_{h-1}. Ed ora basta prendere in S_{h-1}, S_{k-1} rispettivamente h punti M e k punti N indipendenti e poi, in S_r, altri $r-h-k+2$ punti P, che con quelli formino $r+2$ punti ad $r+1$ ad $r+1$ indipendenti [1]. I loro corrispondenti che diremo M', N', P' sono nella stessa condizione; perchè, se (ad es.) i punti M', N' ed $r-h-k+1$ dei punti P' fossero in un S'_{r-1}, nel corrispondente S_{r-1} (per la omografia delle stelle S_{h+k-1} S'_{h+k-1}) dovrebbero trovarsi i corrispondenti di quei punti. Dopo ciò è evidente che l'omografia individuata dalle $r+2$ coppie (MM'), (NN'), (PP') è l'unica che soddisfi alle condizioni poste.

15. — In simil modo si vede che, avendosi due spazî S_k, S'_k di S_r, S'_r individuati rispettivamente dai punti $P_0, P_1, \ldots, P_k$; $P'_0, P'_1, \ldots, P'_k$ e

[1]) Cfr. nota precedente.

considerando gli spazî $S^{(i)}_{h-1}$, $S^{(i)'}_{h-1}$, $(i = 0, \ldots, h)$, individuati rispettivamente dai punti $P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_h$; $P'_0, \ldots, P'_{i-1}, P'_{i+1}, \ldots, P'_h$, se le $h+1$ coppie di stelle $S^{(i)}_{h-1}$, $S^{(i)'}_{h-1}$ sono riferite omograficamente colla restrizione che una sola omografia fra le stelle S_h, S'_h sia subordinata delle $i+1$ precedenti, *esiste una ed una sola omografia avente queste omografie per subordinate*.

Infatti, preso un punto X generico di S_r, si considerino gli $h+1$ spazî ad h dimensioni che lo proiettano dagli $S^{(i)}_{h-1}$ $(i = 0, 1, \ldots, h)$; essi sono tutti nell' S_{h+1} che proietta X da S_h: quindi gli $h+1$ spazî ad h dimensioni ad essi corrispondenti nelle omografie delle stelle $S^{(i)}_{h-1}$ $S^{(i)'}_{h-1}$, per la restrizione suddetta, giaceranno nell' S'_{h+1} corrispondente all' S_{h+1} nell'omografia delle stelle S_h, S'_h. Essi avranno quindi un punto X' comune che si fa corrispondere ad X. Se X cade in un punto P_i $(i = 0, 1, \ldots, h)$, il suo corrispondente X' cade nel punto P'_i. Ed ora agli h punti P_i si aggiungano $r-h+2$ punti così da formare $r+2$ punti che ad $r+1$ ad $r+1$ sieno indipendenti: i loro corrispondenti verificano la stessa proprietà; e le $r+2$ coppie di punti così ottenute individuano una omografia soddisfacente alle condizioni stabilite.

16. — Sulla determinazione delle omografie (o correlazioni) aggiungasi anche la seguente proprietà: — *Se si ha una omografia fra due stelle* S_{h-1}, S'_{h-1} *di* S_r, S'_r, *esiste una ed una sola omografia di cui quella è subordinata e di cui inoltre sono assegnate genericamente* $r+1$ *coppie di punti corrispondenti, su altrettante coppie, pure prese genericamente, di* S_h, S'_h *corrispondenti delle due stelle omografiche.*

Infatti, se si indicano con (PP') le dette $r+1$ coppie di punti, sieno S_{r-h-1}, S'_{r-h-1} gli spazî determinati rispettivamente da $r-h$ dei punti P e dai loro $r-h$ punti corrispondenti P'. Si riferiscano omograficamente le due stelle S_{r-h-1}, S'_{r-h-1}, assumendo come coppie di iperpiani corrispondenti le $h+1$ coppie di iperpiani che congiungono rispettivamente S_{r-h-1}, S'_{r-h-1} ai rimanenti $r+1-(r-h) = h+1$ punti P, presi ad h ad h, e ai loro corrispondenti P'; e come $(h+2)^{\text{esima}}$ coppia gli iperpiani $S_{r-1} \equiv S_{r-h-1} S_{h-1}$, $S'_{r-1} \equiv S'_{r-h-1} S'_{h-1}$. Dopo ciò si applica il teorema del n. 14, la restrizione ivi indicata essendo ora verificata dal corrispondersi questi ultimi due iperpiani.

17. — Abbiansi due spazî omografici distinti S_r, S'_r e siano $A_0, A_1, \ldots, A_{r+1}$, $r+2$ punti qualunque del primo, dei quali mai $r+1$ si trovino in uno stesso iperpiano, ed $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{r+1}$ i loro corrispondenti nel secondo.

Se si prendono in S_r per vertici della piramide fondamentale i punti $A_0, A_1, \dots, A_r$ e per punto unità A_{r+1}, e, analogamente, in S'_r si prendono $A'_0, A'_1, \dots, A'_r$ per vertici della piramide fondamentale ed A'_{r+1} per punto unità, e se inoltre si indicano con $x_0, x_1, \dots, x_r$ le coordinate correnti in S_r e con $y_0, y_1, \dots, y_r$ quelle in S'_r, così che A_i, A'_i $(i = 0, 1, \dots, r)$ abbiano le stesse coordinate (cioè tutte nulle meno l'i^{esima}), è evidente (n. 2) che le relazioni

V. S. fig 30, [illegible]

$$x_i = y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

stabiliscono fra S_r ed S'_r una corrispondenza omografica, nella quale si corrispondono i punti A_i, A'_i $(i = 0, 1, \dots, r+1)$. Tale corrispondenza coincide quindi (n. 13) con quella già supposta fra S_r ed S'_r. D'altra parte, se si cambiano negli spazî considerati le piramidi fondamentali, le antiche coordinate si esprimono per le nuove linearmente ed omogeneamente: dunque segue senz'altro che: — *Analiticamente una corrispondenza omografica tra due spazî S_r, S'_r si traduce in $r+1$ relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti tra le coordinate di due punti corrispondenti; precisamente, dette $x_0, x_1, \dots, x_r$ le coordinate di un punto di S_r ed $y_0, y_1, \dots, y_r$ quelle del punto corrispondente di S'_r, si hanno fra di esse delle formole del tipo*

$$\sum_{k=0}^{k=r} b_{ik} x_k = \sum_{k=0}^{k=r} a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \dots, r) \tag{1}$$

essendo[1] $|b_{ik}| \neq 0$, $|a_{ik}| \neq 0$; *od anche, più semplicemente, del tipo*

$$\rho x_i = \sum_{k=0}^{k=r} a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \dots, r) \tag{2}$$

ρ essendo un fattore di proporzionalità ed avendosi inoltre $|a_{ik}| \neq 0$.

Ad analoga conclusione si giunge per una correlazione, dando alle x_i (ad es.) il significato di coordinate d'iperpiani.

18. — Si è veduto che, prendendo convenientemente le piramidi fondamentali, le formole dell'omografia fra due spazî distinti S_r, S'_r possono ridursi alla forma *(canonica* o *ridotta)*

$$x_i = y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

---

[1]) Colla scrittura $|b_{ik}|$ (e similmente $|a_{ik}|$) si indica, come è noto, il determinante $\Sigma \pm b_{00} b_{11} \dots b_{rr}$.

Similmente sieno

$$x^*_i = y^*_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le formole dell'omografia fra due altri spazî distinti S^*_r, $S^{*\prime}_r$ ad r dimensioni. Per le trasformazioni omografiche di S_r in S^*_r e di S'_r in $S^{*\prime}_r$, date rispettivamente dalle formole

$$x_i = x^*_i \;,\; y_i = y^*_i$$

la prima omografia si trasforma nella seconda. Ciò si esprime dicendo: — *Tutte le omografie (e analogamente le correlazioni) fra spazî distinti ad r dimensioni sono proiettivamente identiche.* — Il che significa che: — *Una omografia (e parimenti una correlazione) fra spazî distinti non ha invarianti assoluti* —.

19. — Sarà utile notare altre formole, le quali, come le (2) che scriveremo semplicemente così

(3) $$\rho x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \dots, r),$$

possono servire a rappresentare un'omografia. Intanto, se con A_{ik} si indica il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante $|a_{ik}|$ e con σ un fattore di proporzionalità, dalle precedenti risolute rispetto alle y, si hanno le altre

(4) $$\sigma y_i = \sum_k A_{ki} x_k \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Le (3) (4) corrispondono a due modi diversi di concepire una omografia, cioè come passaggio dai punti di S'_r ai loro corrispondenti di S_r ovvero come passaggio da questi a quelli: i quali due modi si indicano come due omografie di cui l'una è inversa dall'altra. Se l'una si indica con Ω, l'altra si indica con Ω^{-1}. Il loro prodotto è l'identità.

Inoltre, se con $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ indichiamo le coordinate di un iperpiano qualunque ξ di S_r, passante pel punto x di coordinate $x_0, x_1, \dots, x_r$, si ha,

$$\sum \xi_i x_i = 0 \;,$$

e quindi, per le (3), $\sum_i \xi_i \sum_k a_{ik} y_k = 0 \quad \sum_k y_k \sum_i a_{ik} \xi_i = 0$

(5) $$\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i y_k = 0 \,,$$

e similmente, dicendo η un piano per y si trova, dalle (4),

$$\sum_{k,i} A_{ki} x_k \eta_i = 0 . \tag{6}$$

Cosicchè, se diconsi *coniugati* un iperpiano di S_r (o di S'_r) e un punto di S'_r (o di S_r) quando il punto corrispondente al punto giace nell'iperpiano o, ciò che è lo stesso, l'iperpiano corrispondente all'iperpiano passa per il punto, la (5) (o la (6)) lega le coordinate di un punto di S'_r (o di S_r) alle coordinate di ogni iperpiano coniugato ad esso di S_r (o di S'_r). La (5), supponendo fisso l'iperpiano ξ, cioè fisse le sue coordinate ξ_i, è soddisfatta dalle coordinate dei punti y coniugati a ξ ed è quindi l'equazione dell'iperpiano, che diremo η, di S'_r corrispondente all'iperpiano ξ di S_r: onde le coordinate di η sono

$$\sigma' \eta_i = \sum_k a_{ki} \xi_k \qquad (i = 0 , 1 , \ldots , r) , \tag{7}$$

σ' essendo un fattore di proporzionalità. Parimenti dalla (6) si ricava

$$\rho' \xi_i = \sum_k A_{ik} \eta_k \qquad (i = 0 , 1 , \ldots , r) \tag{8}$$

che si ottengono anche, risolvendo le (7). Le (7), (8) formano le cosidette *sostituzioni trasposte* delle (3), (4) rispettivamente.

Si hanno considerazioni e formole analoghe per una correlazione.

✱ 20. — Si vogliono ora studiare le corrispondenze definite dalle formole

v. a. I 1935

$$\rho x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i = 0 , 1 , \ldots , r)$$

nella ipotesi, esclusa fin qui, che sia il determinante $|a_{ik}| = 0$; corrispondenze che si diranno *omografie (o correlazioni) singolari* [1]), e precisamente *di specie h* se il detto determinante è di caratteristica $r - h + 1$ ($h \geq 1$).

---

[1]) Supponendo che nelle formole

$$\sum_k b_{ik} x_k = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i = 0 , 1 , \ldots , r)$$

sia nullo soltanto uno dei determinanti $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$, si ottiene da esse una omografia singolare della natura di quelle che qui si vogliono considerare. Se invece $|a_{ik}| = |b_{ik}| = 0$, la corrispondenza da esse determinata si può dire ancora *omografia singolare*, ma è di natura diversa dalle precedenti. Cfr. DEL PRETE, *Le corrispondenze proiettive degeneri* (Rend. Ist. lomb., 30 (2), 1897).

Per semplicità indichiamo con un solo simbolo ciascuna delle forme lineari dei secondi membri delle equazioni precedenti, cioè poniamo

$$u_i = \sum a_{ik} y_k \quad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

Per essere $r-h+1$ la caratteristica del determinante di queste forme, se ne possono prendere fra esse soltanto $r-h+1$ linearmente indipendenti [1]): quindi, se supponiamo, per fissar le idee, che tali sieno le $u_0, u_1, \ldots, u_{r-h}$, le equazioni suddette possono scriversi così:

$$(9)\quad \begin{cases} \rho x_0 = u_0 \\ \rho x_1 = \quad u_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rho x_{r-h} = \qquad\qquad u_{r-h} \\ \rho x_{r-h+1} = \lambda_{00} u_0 + \lambda_{01} u_1 + \ldots + \lambda_{0,r-h} u_{r-h} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rho x_r = \lambda_{h-1,0} u_0 + \lambda_{h-1,1} u_1 + \ldots + \lambda_{h-1,r-h} u_{r-h} \end{cases}$$

indicando con le λ delle costanti opportune. Un punto y qualunque dell'S'_{h-1}, di S'_r, rappresentato dalle $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, ..., $u_{r-h} = 0$, annulla colle sue coordinate tutti i secondi membri: onde le coordinate del punto x corrispondente sono date dalle $\rho x_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, per le quali deve essere $\rho = 0$ e quindi il punto x indeterminato. Come prima proprietà dell'omografia singolare di specie h abbiamo adunque che: — *Esiste nell'* S'_r *uno spazio* S'_{h-1}, *detto spazio singolare, ad ogni punto del quale corrispondono tutti i punti di* S_r.

Prendasi ora un punto y fuori di S'_{h-1}, tale cioè che per le sue coordinate le $u_0, u_1, \ldots, u_{r-h}$ non sieno tutte nulle. Le stesse formole (9) mostrano che il punto x corrispondente giace in un certo S_{r-h} determinato dai punti $(1, 0, \ldots, 0, \lambda_{00}, \ldots, \lambda_{h-1,0})$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, \lambda_{01}, \ldots, \lambda_{h-1,1})$, ..., $(0, 0, \ldots, 1, \lambda_{0,r-h}, \ldots, \lambda_{h-1,r-h})$. Anzi tale punto x non solo corrisponde al considerato punto y, ma a tutti i punti y soddisfacenti alle

$$\frac{x_0}{u_0} = \frac{x_1}{u_1} = \ldots = \frac{x_{r-h}}{u_{r-h}}$$

1) Cfr. CAPELLI *l. c.* n. 440.

cioè (supposto, per es., $u_0 \neq 0$ e quindi $x_0 \neq 0$) soddisfacenti alle

$$u_0 x_1 - u_1 x_0 = 0 \ , \ u_0 x_2 - u_2 x_0 = 0 \ , \ \ldots \ , \ u_0 x_{r-h} - u_{r-h} x_0 = 0 \, .$$

che sono (come subito si vede per l'indipendenza delle $u_0, u_1, \ldots, u_{r-h}$) $r-h$ equazioni linearmente indipendenti e quindi rappresentano un S'_h, che passa evidentemente per lo spazio singolare S'_{h-1}. Per conseguenza: — *Esiste nell'* S_r *uno spazio* S_{r-h}, *detto pure spazio singolare, ad ogni punto del quale corrispondono tutti i punti di un* S'_h *passante per lo spazio singolare* S'_{h-1} *di* S'_r.

In tal modo viene stabilita una corrispondenza tra i punti di S_{r-h} e gli S'_h della stella di S'_r avente per sostegno lo spazio S'_{h-1}: *la quale corrispondenza è una omografia* (non singolare). Infatti i valori delle $u_0, u_1, \ldots, u_{r-h}$ per le coordinate di un punto y esterno ad S'_{h-1} sono, per le (9), coordinate omogenee in S_{r-h} del punto x corrispondente ad y, ma si possono anche considerare come coordinate omogenee, nella stella S'_{h-1}, dell'S'_h, che passa per y: il che si giustifica, ad es., colla trasformazione di coordinate (in S'_r) data dalle formole

V. S.

$$z_0 = u_0 \, , \, z_1 = u_1 \, , \, \ldots \, , \, z_{r-h} = u_{r-h} \, , \, z_{r-h+1} = y_{r-h+1} \, , \, \ldots \, , \, z_r = y_r \, .$$

(13)

Per questa trasformazione S'_{h-1} diventa uno spazio fondamentale e le $z_0, z_1, \ldots, z_{r-h}$ (cioè le $u_0, u_1, \ldots, u_{r-h}$) sono coordinate omogenee dei punti dello spazio fondamentale opposto od anche degli S'_h che passano per essi e per l'S'_{h-1} suddetto.

21. — Le cose precedenti, che possono facilmente invertirsi, forniscono un mezzo ben semplice per costruire una omografia singolare di specie h fra due spazî S_r, S'_r. Si prenda in S_r uno spazio qualunque ad $r-h$ dimensioni, S_{r-h}, ed in S'_r una stella, il cui sostegno sia uno spazio qualunque ad $h-1$ dimensioni, S'_{h-1}; poi si stabilisca una omografia (non singolare) perfettamente arbitraria tra lo spazio S_{r-h} e la stella S'_{h-1}. Allora si ha subito una omografia singolare di specie h fra i due spazî S_r, S'_r, quando ad ogni punto dell'S'_{h-1} di S'_r si facciano corrispondere tutti i punti di S_r e ad un punto di S'_r, fuori di S'_{h-1}, si faccia corrispondere quel punto di S_{r-h}, che, nell'omografia (non singolare) ora detta, corrisponde all'S'_h, della stella S'_{h-1}, passante per il punto.

22. — Delle formole del n. 19, dedotte dalle (3), le (5) (7) valgono anche se $|a_{ik}| = 0$. Facendo sulla (7) la discussione precedente si arriva ad un risultato correlativo a quello ottenuto, cioè si trova *che in una omografia singolare di specie h fra due spazî S_r, S'_r esistono due stelle singolari d'iperpiani Σ_{h-1}, Σ'_{r-h}. Ad ogni iperpiano di Σ_{h-1} corrispondono tutti gli iperpiani di S'_r e ad ogni iperpiano di Σ'_{r-h} corrispondono in S_r tutti gli iperpiani di una stella Σ_h contenente Σ_{h-1}. Di più la corrispondenza che in tal modo vien fissata fra gli iperpiani di Σ'_{r-h} e le stelle Σ_h passanti per Σ_{h-1} è una omografia (non singolare).*

Tuttociò segue subito anche direttamente dalle proprietà del n. 20. Invero un iperpiano di S_r che passa per S_{r-h} e quindi contiene i punti di S_r cui corrispondono tutti i punti di S'_r, ha per corrispondenti tutti gl'iperpiani di S'_r; mentre un iperpiano che tagli S_{r-h} in un S_{r-h-1} ha per corrispondente un iperpiano della stella S'_{h-1} (luogo degli S'_h di questa stella corrispondenti ai punti dell' S_{r-h-1} nell' omografia detta nel n. 20): e questo iperpiano non varia se quell'iperpiano varia passando sempre per l' S_{r-h-1}. Donde si deduce anche che *il sostegno di Σ_{h-1} è lo spazio singolare S_{r-h} ed il sostegno di Σ'_{r-h} è lo spazio singolare S'_{h-1}* ed inoltre che *l'omografia (non singolare) del n. 20 coincide con quella indicata nel n.° presente,* gli spazî corrispondenti della prima essendo i sostegni delle stelle corrispondenti della seconda.

✱ 23. — Per avere la rappresentazione analitica di una omografia di specie h in forma semplice *(forma canonica* o *ridotta)* si prendano, per es., i vertici $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{h-1}$ della piramide fondamentale di S'_r nello spazio singolare S'_{h-1} e gli altri $A'_h, A'_{h+1}, \ldots, A'_r$ comunque (fuori di S'_{h-1}); e allora nello spazio S_r si prendano per vertici della piramide fondamentale punti corrispondenti di quelli, cioè $A_0, A_1, \ldots, A_{h-1}$ comunque (fuori di S_{r-h}) ed $A_h, A_{h+1}, \ldots, A_r$ in S_{r-h} corrispondenti ai punti $A'_h, A'_{h+1}, \ldots, A'_r$. Le formole dell'omografia assumono, come nel caso generale, l'aspetto $\rho x_i = a_{ii} y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$: ma c'è da introdurre il fatto che, quando sia $y_h = y_{h+1} = \ldots = y_r = 0$, le x_i sono indeterminate, cioè $\rho = 0$, il che esige $a_{ii} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, h-1)$. Di più, scelto in S'_r (ad es.) un punto unità U', se U è il suo corrispondente (in S_{r-h}), per punto unità in S_r si può scegliere un punto generico dell' $S_h \equiv U A_0 A_1 \ldots A_{h-1}$;

dopo di che risulta $a_{ii}=1$ $(i=h, h+1, ..., r)$. Le formole sono adunque [1]

$$\rho x_i = 0 \quad (i=0, \dots, h-1)$$
$$\rho x_i = y_i \quad (i=h, \dots, r).$$

Dalle quali si conclude, come nel n. 18, che *le omografie singolari della stessa specie h fra spazî distinti sono proiettivamente identiche:* e quindi che *una tale omografia non ha invarianti assoluti.*

24. — Come già avvertimmo più volte, per le correlazioni fra spazî distinti non v'è che da cambiare denominazioni. *Una correlazione singolare di specie h fra due spazî distinti* S_r, S'_r, *possiede in essi rispettivamente due spazî fondamentali* S_{h-1}, S'_{h-1} *così che ad ogni punto di* S_{h-1} *(o di* S'_{h-1}*) corrispondono tutti gli iperpiani di* S'_r *(o di* S_r*). Inoltre ad ogni punto esterno ad* S_{h-1} *(ad es.) corrisponde un solo iperpiano per* S'_{h-1}, *ma questo iperpiano corrisponde a tutti i punti dell'* S_h *che congiunge quel punto all'* S_{h-1}, *l'iperpiano e l'* S_h *corrispondendosi in una proiettività non singolare (nella quale pure corrispondono gli* S'_h *passanti per* S'_{h-1}, *come inviluppo di iperpiani, agli iperpiani passanti per* S_{h-1}, *come luogo degli* S_h *ad essi corrispondenti):* ecc..

---

[1]) Quindi, indicando con x, ξ un punto di S_r e un iperpiano di S'_r coniugati, l'omografia di specie h è data anche dall'equazione

$$x_h \xi_h + x_{h+1} \xi_{h+1} + \dots + x_r \xi_r = 0,$$

che è la (5) del n. 19 nel presente caso.

Capitolo 4.°

Omografie di uno spazio S_r in sè.

$*$ 1. — In una omografia Ω fra due spazî sovrapposti S_r, S'_r è fondamentale il problema della determinazione dei punti (o iperpiani) uniti cioè di quei punti (o iperpiani) che coincidono coi loro corrispondenti, punti (o iperpiani) che sono pure uniti per l'omografia inversa Ω^{-1}.

Sieno, riferite alla stessa piramide fondamentale e allo stesso punto unità, x_i, y_i le coordinate di due punti corrispondenti e siano le equazioni dell'omografia

$$\rho x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, r). \tag{1}$$

Le coordinate dei punti uniti sono date dalle

$$\rho x_i = \sum_k a_{ik} x_k , \tag{2}$$

le quali esigono che sia

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \ldots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \ldots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r0} & a_{r1} & \ldots & a_{rr} - \rho \end{vmatrix} = 0 , \tag{3}$$

per ogni valore di ρ soddisfacente a questa equazione, le (2) essendo risolubili con valori non tutti nulli delle x_i.

Per procedere con chiarezza supponiamo che l'equazione $D(\rho) = 0$ abbia m radici *distinte* $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(m)}$ $(m \leq r+1)$, e indichiamo con $r - h^{(i)} + 1$ $(h^{(i)} \geq 1)$ la caratteristica del determinante $D(\rho^{(i)})$ cioè del determinante $D(\rho)$ in cui si è posto $\rho = \rho^{(i)}$. Ciò significa che $\rho^{(i)}$ annulla tutti i minori di $D(\rho)$ di ordine $r - h^{(i)} + 2$ e quindi tutti quelli di ordine superiore: anzi, perchè i minori di $D(\rho)$ di un ordine qualunque hanno per derivate combinazioni lineari omogenee dei minori di un ordine immediatamente inferiore [1]), la radice $\rho^{(i)}$ sarà radice almeno doppia di tutti i minori (eguagliati a zero) di ordine $r - h^{(i)} + 3$, e così, risalendo, sarà radice multipla almeno secondo $h^{(i)}$ dell'equazione $D(\rho) = 0$. Segue di qui che

$$h' + h'' + \dots h^{(m)} \leq r + 1, \tag{4}$$

e che, se vale il segno $=$, i numeri $h', h'', \dots, h^{(m)}$ sono precisamente le multiplicità rispettive delle radici $\rho', \rho'', \dots, \rho^{(m)}$ di $D(\rho) = 0$, mentre, se vale il segno $<$, uno almeno di quei numeri è inferiore alla moltiplicità della relativa radice.

D'altra parte, per essere $r - h^{(i)} + 1$ la caratteristica di $D(\rho^{(i)})$, il sistema (2) si riduce a sole $r - h^{(i)} + 1$ equazioni linearmente indipendenti, ossia è soddisfatto dalle coordinate di tutti i punti di un $S_{h^{(i)}-1}$. Dunque alle radici $\rho', \rho'', \dots, \rho^{(m)}$ dell'equazione $D(\rho) = 0$ corrispondono altrettanti spazî di punti uniti ad $h' - 1$, $h'' - 1$, ..., $h^{(m)} - 1$ dimensioni, che indicheremo costantemente con $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$, e diremo *spazî fondamentali dell'omografia*. Per la diseguaglianza (4), la somma delle loro dimensioni aumentate ciascuna di una unità non supera la dimensione dello spazio ambiente aumentata parimenti di una unità.

* 2. — Sia S_q $(q \leq r)$ lo spazio a cui appartengono gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$: per l'omografia data Ω, ad S_q corrisponderà uno spazio che, dovendo contenere i detti spazî fondamentali, coinciderà con esso: onde, per la Ω, S_q sarà trasformato omograficamente in sè stesso. In questa omografia gli spazî fondamentali sono tutti e soli gli spazî $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$: dunque, per l'ultima osservazione del numero precedente,

$$h' + h'' + \dots + h^{(m)} \leq q + 1 .$$

V. a Ma (n.° 12, Cap. 1)

$$h' + h'' + \dots + h^{(m)} \geq q + 1 ;$$

quindi si ha proprio

$$h' + h'' + \dots + h^{(m)} = q + 1 ,$$

---

1) Cfr. CAPELLI, *l. c.*, pag. 356, 1.

ossia il teorema di Sègre: — *Gli spazî fondamentali di una omografia di uno spazio in sè sono indipendenti* —. Se nella (4) ha luogo il segno $=$ si ha $q=r$, cioè i detti spazî fondamentali appartengono allo spazio ambiente S_r, ed allora l'omografia si dice *generale:* mentre, se nella (4) ha luogo il segno $<$, quegli spazî appartengono ad uno spazio di dimensione $<r$, ed allora l'omografia si dice *particolare* [1]).

* 3. — Ora prendiamo le formule (n. 17, Cap. 3°) (15)

$$(5) \qquad \mu\,\eta_i = \sum_k a_{ki}\,\xi_k \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,r)\,,$$

che dànno le coordinate di un iperpiano η di S'_r mediante quelle dell'iperpiano corrispondente ξ di S_r (cioè rappresentano l'omografia inversa Ω^{-1}) e su esse procediamo come sulle (1): otterremo gli iperpiani uniti della omografia. È chiaro che per μ si trova la stessa equazione (3) prima trovata per ρ, e quindi se ne conclude *l'esistenza di m stelle indipendenti di iperpiani uniti* $\Sigma_{h'-1}\,,\Sigma_{h''-1}\,,\ldots,\Sigma_{h^{(m)}-1}$. Indicheremo sempre i sostegni di queste stelle con $S_{r-h'}\,,S_{r-h''}\,,\ldots,S_{r-h^{(m)}}$, e diremo *coniugati* uno spazio $S_{h^{(i)}-1}$ e una stella $\Sigma_{h^{(i)}-1}$ corrispondenti alla stessa radice $\rho^{(i)}$ della (3). Si noti che lo spazio $S_{r-h^{(i)}}$ $(i=1\,,2\,,\ldots,m)$ è dall'omografia data trasformato in sè stesso, poichè tutti gli iperpiani per esso sono uniti.

* 4. — Per trovare le relazioni che passano tra uno spazio $S_{h^{(i)}-1}$ e la stella coniugata $\Sigma_{h^{(i)}-1}$, consideriamo due punti corrispondenti $x\,,y$ qualunque della omografia considerata e, sulla loro congiungente, il punto z, le cui coordinate sono fornite dalle formule

$$z_l = x_l - \rho^{(i)} y_l \qquad (l=0\,,1\,,\ldots,r):$$

o, per le (1), dalle

$$z_l = \sum_k a_{lk}\,y_k - \rho^{(i)} y_l \qquad (l=0\,,1\,,\ldots,r)\,.$$

Poichè il modulo della sostituzione lineare rappresentata da queste formule è $D(\rho^{(i)})$ e quindi è di caratteristica $r-h^{(i)}+1$, la corrispondenza

1) Nel teorema enunciato si comprende anche il caso di un solo spazio fondamentale S_{h-1} (estendendo convenzionalmente a questo caso la definizione di spazî indipendenti). Allora deve essere, l'omografia non essendo identica, $h<r+1$, e quindi l'omografia stessa è particolare.

che si ottiene tra il punto y e il punto z è una omografia singolare di specie $h^{(i)}$ (n. 20, Cap. 3.°). Gli spazî singolari di questa omografia sono $S_{h-1}^{(i)}$ ed $S_{r-h}^{(i)}$ poichè, per es., i punti dello spazio singolare dello spazio descritto da y si ottengono dalle equazioni

$$\sum_k a_{lk} y_k - \rho^{(i)} y_l = 0 \qquad (l = 0 , 1 , \dots , r)$$

e quindi sono i punti di $S_{h-1}^{(i)}$: e dualmente per $\Sigma_{h-1}^{(i)}$ di sostegno $S_{r-h}^{(i)}$. Segue che, se y è un punto fuori di $S_{h-1}^{(i)}$, il punto corrispondente z è un punto di $S_{r-h}^{(i)}$, sulla retta congiungente y col suo punto corrispondente x in Ω, e che questo punto z non varia quando y varî in un $S'_{h}{}^{(i)}$ passante per l'$S_{h-1}^{(i)}$ e, conseguentemente, x varî nell'$S_h^{(i)}$ (passante pure per l'$S_{h-1}^{(i)}$) che gli corrisponde nella omografia Ω_*^{-1}. Ricordando inoltre che z ed $S'_{h}{}^{(i)}$ od $S_h^{(i)}$ sono corrispondenti in una proiettività, si conclude quest'altro teorema di Segre [1]: — *Due spazî corrispondenti, nella data omografia,* $S_h^{(i)}$ *ed* $S'_{h}{}^{(i)}$ *che passano per lo spazio fondamentale* $S_{h-1}^{(i)}$, *sono prospettivi da un punto del sostegno* $S_{r-h}^{(i)}$ *della stella coniugata* $\Sigma_{h-1}^{(i)}$ *ed esiste proiettività fra i punti di questo sostegno ed i corrispondenti* $S_h^{(i)}$ *od* $S'_{h}{}^{(i)}$ *passanti per* $S_{h-1}^{(i)}$.

Considerisi l'$S_h^{(i)}$ congiungente $S_{h-1}^{(i)}$ con un punto P di un altro spazio fondamentale $S_{h-1}^{(j)}$, punto necessariamente esterno ad $S_{h-1}^{(i)}$ (n. 2). Essendo P unito, l'$S_h^{(i)}$ si trasforma in sè e quindi, per il teorema dimostrato, le coppie dei suoi punti corrispondenti sono tutte allineate con un punto z di $S_{r-h}^{(i)}$, ossia in $S_h^{(i)}$ si ha una stella z di rette unite: ma in $S_h^{(i)}$ anche la stella P è di rette unite (perchè ogni retta incontra $S_{h-1}^{(i)}$ in un punto unito): dunque $z = $ P, altrimenti ogni punto di $S_h^{(i)}$, potendosi ottenere come intersezione di due rette unite, sarebbe manifestamente unito [2]. I punti di $S_{h-1}^{(j)}$ giacciono dunque in $S_{r-h}^{(i)}$ e si ha il teorema: — *Lo spazio* $S_{r-h}^{(i)}$ *contiene tutti gli spazî fondamentali diversi da* $S_{h-1}^{(i)}$ —.

---

[1]) Nella Nota, *Sugli spazî fondamentali di un' omografia* (Rendiconti dei Lincei, 1886).

[2]) Insomma si ha un'omologia di centro P e di asse d'omologia $S_{h-1}^{(i)}$, di che si dirà fra poco (n. 11).

Anzi questi spazî appartengono o no ad $S_{r-h^{(i)}}$ secondochè l'omografia è generale o particolare, perchè dalla (4) segue che corrispondentemente $r-h^{(i)}+1$ è eguale o maggiore della somma delle dimensioni degli spazî stessi.

* 5. — Aggiungasi che, se l'omografia è generale, l' $S_{h^{(i)}-1}$ non incontra $S_{r-h^{(i)}}$. Invece, se l'omografia è particolare, vedremo (n. 15) che ogni spazio $S_{h^{(i)}-1}$ corrispondente ad una radice $\rho^{(i)}$ di $D(\rho)=0$, la quale abbia una multiplicità $>h^{(i)}$ (e per una omografia particolare, giusta il n. 1, ciò avviene almeno una volta), sega lo spazio $S_{r-h^{(i)}}$ (potendo anche essere tutto contenuto in esso).

Sia P un punto comune ad $S_{h^{(i)}-1}$ ed $S_{r-h^{(i)}}$. Per il teorema del n.° precedente, P sarà centro di prospettiva di due $S_{h^{(i)}}$ corrispondenti passanti per $S_{h^{(i)}-1}$ e quindi per P, e però coincidenti, perchè ogni S_1 che passa per P e per due punti corrispondenti giace in amendue. Si ha cioè un caso limite del caso di dianzi, ossia una omografia di un $S_{h^{(i)}}$ in sè, nel quale esiste un $S_{h^{(i)}-1}$ di punti uniti ed i punti corrispondenti sono allineati con un punto P dell' $S_{h^{(i)}-1}$ stesso [1]). Siccome non può esservi nell' $S_{h^{(i)}}$ alcun altro punto unito (per la stessa ragione del caso ora citato), è evidente che in $S_{h^{(i)}}$ ogni S_1 uscente da P ed esterno all' $S_{h^{(i)}-1}$ contiene una omografia subordinata con un solo punto unito. Adunque *in una omografia particolare esistono necessariamente di tali* S_1.

Possiamo trarre di qui una conseguenza importante, cioè, estendendo ad un S_r la definizione di omografia ciclica data per un S_1 e ricordando che una omografia di un S_1 in sè con un solo punto unito non può essere ciclica (n. 3, cap. 3.°), possiamo affermare che *una omografia ciclica di un* S_r *in sè non può essere particolare.*

* 6. — Dalle cose dette nel n. 4 e dalle analoghe derivanti dalle (5) segue subito che, se x, y sono due punti corrispondenti nella data omografia Ω, i punti della loro congiungente che hanno le coordinate

$$x_i-\rho' y_i\ ;\ x_i-\rho'' y_i\ ;\ \dots\ ;\ x_i-\rho^{(m)} y_i \qquad (i=0,1,\dots,r)$$

giacciono rispettivamente negli spazî $S_{r-h'}, S_{r-h''}, \dots, S_{r-h^{(m)}}$: e, dual-

[1]) Cioè una omologia in cui il centro sta sull'asse d'omologia, il che sarà pure considerato in seguito.

mente, se η, ξ sono due iperpiani corrispondenti nell'omografia Ω^{-1}, gli iperpiani del loro fascio aventi rispettivamente le coordinate

$$\eta_i - \rho' \xi_i \ ; \ \eta_i - \rho'' \xi_i \ ; \ \dots \ ; \ \eta_i - \rho^{(m)} \xi_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

passano per gli spazi $S_{k'-1}, S_{k''-1}, \dots, S_{k^{(m)}-1}$. Ma, prendendo le coordinate nella punteggiata (ovvero nel fascio) i detti punti (o iperpiani) hanno sempre le stesse coordinate, cioè $0, \infty, \rho', \dots, \rho^{(m)}$: dunque *le punteggiate formate da due punti corrispondenti in Ω e dagli m punti ove la loro congiungente taglia i sostegni delle stelle fondamentali d'iperpiani sono proiettive fra loro, e proiettive ai fasci formati da due iperpiani corrispondenti in Ω^{-1} e dagli m iperpiani che dalla loro intersezione proiettano gli spazi fondamentali di punti rispettivamente coniugati* [1]).

Corollario di questa proprietà è che il rapporto di due radici qualunque ρ', ρ'', per es., di $D(\rho) = 0$ è un invariante assoluto della omografia data Ω. Infatti al rapporto $\frac{\rho'}{\rho''}$ si può dare il significato di rapporto anarmonico, dicendo che esso è, ad es., il rapporto anarmonico di due punti corrispondenti e dei due punti ove la loro congiungente incontra $S_{r-k'}$, $S_{r-k''}$; quindi è chiaro che, riferendo proiettivamente lo spazio, trasformato omograficamente in sè da Ω, ad un altro spazio, il rapporto $\frac{\rho'}{\rho''}$ non varia, perchè punti corrispondenti vanno in punti corrispondenti e sostegni di stelle fondamentali vanno pure in tali sostegni.

Dei rapporti delle $\rho', \rho'', \dots, \rho^{(m)}$, soltanto $m - 1$ sono indipendenti, per es.,

$$\frac{\rho''}{\rho'}, \frac{\rho'''}{\rho'}, \dots, \frac{\rho^{(m)}}{\rho'}:$$

---

[1]) Caso particolarissimo è il teorema di S_3: — *I quattro punti in cui una retta incontra le faccie di un tetraedro hanno lo stesso rapporto anarmonico dei quattro piani che da una retta ne proiettano i vertici* —. Basta considerare l'omografia (cfr. n. 8) avente quel tetraedro per fondamentale (cioè i vertici e le faccie di esso per elementi uniti) e due punti (o piani) della retta come corrispondenti, ed osservare che ogni retta che congiunge due punti corrispondenti è anche intersezione di piani corrispondenti, e viceversa.

quindi *l'omografia data ha* $m-1$ *invarianti assoluti indipendenti*, che, come risulterà dal seguito, sono i soli invarianti assoluti della omografia [1]).

7. Sarà utile che ci fermiamo a dimostrare direttamente che, per una sostituzione lineare sulle variabili x_i, y_i, le radici dell'equazioni $D(\rho)$ non variano [2]).

Possiamo prendere le formule della omografia sotto la forma

$$\sum_k b_{ik} x_k = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i=0,1,\ldots,r)$$

per modo che

$$D(\rho) = |a_{ik} - \rho b_{ik}|.$$

Facciamo sulle variabili x_i, y_i la stessa sostituzione lineare a modulo $|l_{kh}|$ non nullo,

$$(6) \qquad x_k = \sum_h l_{kh} x'_h \;,\; y_k = \sum_h l_{kh} y'_h \qquad (k=0,1,\ldots,r):$$

l'omografia data si trasforma nell'altra

$$\sum_h b'_{ih} x'_h = \sum_h a'_{ih} y'_h \qquad (i=0,1,\ldots,r)$$

avendo posto

$$b'_{ih} = \sum_k b_{ik} l_{kh} \;,\; a'_{ih} = \sum_k a_{ik} l_{kh} \qquad (i,h=0,1,\ldots,r),$$

e il $D(\rho)$ si trasforma in

$$D'(\rho) = |a'_{ih} - \rho b'_{ih}|.$$

Poichè si ha

$$a'_{ih} - \rho b'_{ih} = \sum_k l_{kh} (a_{ik} - \rho b_{ik}),$$

---

1) Si avverta che nessuna delle $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(m)}$ è zero: altrimenti si avrebbe $D(0) = |a_{ik}| = 0$ (cioè una omografia singolare di uno spazio in sè), il che fu escluso (n. 1).

2) O che non variano i loro rapporti, quando nelle seguenti (6) che definiscono la sostituzione lineare, si voglia tener conto anche di fattori di proporzionalità.

un minore qualunque di $D'(\rho)$, per es.

$$\begin{vmatrix} a'_{00}-\rho b'_{00} & \dots & a'_{0t}-\rho b'_{0t} \\ a'_{10}-\rho b'_{10} & \dots & a'_{1t}-\rho b'_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{t0}-\rho b'_{t0} & \dots & a'_{tt}-\rho b'_{tt} \end{vmatrix}$$

è eguale al prodotto delle due matrici

$$\begin{vmatrix} a_{00}-\rho b_{00} & \dots & a_{0r}-\rho b_{0r} \\ a_{10}-\rho b_{10} & \dots & a_{1r}-\rho b_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{t0}-\rho b_{t0} & \dots & a_{tr}-\rho b_{tr} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} l_{00} & \dots & l_{r0} \\ l_{01} & \dots & l_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{0t} & \dots & l_{rt} \end{vmatrix} ,$$

e quindi si può esprimere come una combinazione lineare omogenea dei minori dello stesso ordine del determinante $D(\rho)$. Segue da ciò che una radice $\rho = \rho^{(i)}$, μ^{pla} per tutti i minori [1]) di un certo ordine di $D(\rho)$, è μ^{pla} almeno anche per tutti i minori dello stesso ordine di $D'(\rho)$. Ma il ragionamento può invertirsi, risolvendo le (6) e ritornando dalla omografia ottenuta alla data: dunque quella radice μ^{pla} per i minori di un certo ordine di $D(\rho)$ è proprio μ^{pla} anche per i minori dello stesso ordine di $D'(\rho)$, con che è dimostrato l'asserto: anzi è dimostrata una proprietà più particolare che occorre avvertire.

S'indichino con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{h^{(i)}}$ le multiplicità della radice $\rho^{(i)}$ per il determinante $D(\rho)$ e per i suoi minori di ordine $r, r-1, \dots, r-h^{(i)}+2$ successivamente $(\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{h^{(i)}})$ e si ponga:

$$e_1 = \mu_1 - \mu_2 \ , \ e_2 = \mu_2 - \mu_3 \ , \dots , \ e_{h^{(i)}_{-1}} = \mu_{h^{(i)}_{-1}} - \mu_{h^{(i)}} \ , \ e_{h^{(i)}} = \mu_{h^{(i)}} .$$

Le espressioni

$$\left(\rho - \rho^{(i)}\right)^{e_1} , \left(\rho - \rho^{(i)}\right)^{e_2} , \dots , \left(\rho - \rho^{(i)}\right)^{e_{h^{(i)}}}$$

si diranno, col Weierstrass, *i divisori elementari* di $D(\rho)$ corrispondenti

[1]) Come sempre, si sottintenda «eguagliati a zero».

alla radice $\rho^{(i)}$. Or bene: la dimostrazione superiore prova che $D(\rho)$ *e* $D'(\rho)$ *hanno gli stessi divisori elementari.*

* 8. — Conviene adesso che ci limitiamo a considerare soltanto le omografie generali per passare poi allo studio di quelle particolari.

Già osservammo che una omografia generale avente gli spazî fondamentali $S_{h'-1}$, $S_{h''-1}$, ..., $S_{h^{(m)}-1}$ è caratterizzata dall'essere $h' + h'' + \dots + h^{(m)} = r+1$, cioè *dall'appartenere quegli* m *spazî fondamentali allo spazio ambiente* S_r; onde $m-1$ *qualunque di essi appartengono al sostegno della stella coniugata allo spazio fondamentale rimanente.*

Se si prendono gli h' vertici $A_0, A_1, \dots, A_{h'-1}$ della piramide fondamentale in $S_{h'-1}$, gli h'' vertici $A_{h'}, A_{h'+1}, \dots, A_{h'+h''-1}$ in $S_{h''-1}$, e così via, le formule dell'omografia divengono del tipo

$$\rho x_i = a_{ii}\, y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Risolvendo su di esse il problema dei punti uniti e ricordando le ipotesi fatte, si esprimono subito le a_{ii} per gli invarianti assoluti $\rho' : \rho'' : \dots : \rho^{(m)}$ dell'omografia e si trovano così le formole ridotte o canoniche (17)

$$(7)\qquad \begin{cases} \rho x_0 = \rho' y_0 \\ \rho x_1 = \rho' y_1 \\ \dots\dots\dots \\ \rho x_{h'-1} = \rho' y_{h'-1} \\ \rho x_{h'} = \rho'' y_{h'} \\ \rho x_{h'+1} = \rho'' y_{h'+1} \\ \dots\dots\dots \\ \rho x_r = \rho^{(m)} y_r\,. \end{cases}$$

Le quali mostrano che *una omografia generale è individuata dai suoi spazî fondamentali e dagli invarianti assoluti, e che così quelli (purchè indipendenti ed appartenenti allo spazio ambiente), come questi (purchè finiti e diversi da zero) possono assegnarsi arbitrariamente* [1]).

---

[1]) È ben sottinteso, qui ed in seguito, che deve essere indicato lo spazio (o stella) fondamentale, a cui si riferisce ciascuno dei numeri esprimenti coi loro rapporti gli invarianti assoluti.

Gli invarianti assoluti (cfr. anche n. 6) possono essere sostituiti da una coppia di punti (o iperpiani) corrispondenti.

9. — Inoltre, se si definisce come *caratteristica* della omografia generale, che ha per spazî fondamentali $S_{h'-1}$, $S_{h''-1}$, ..., $S_{h^{(m)}-1}$, l'insieme dei numeri, che indicano le dimensioni di questi,

$$[(h'-1)\ ,\ (h''-1)\ ,\ \ldots\ ,\ (h^{(m)}-1)]\ ,$$

è chiaro che *condizione necessaria e sufficiente perchè due omografie generali sieno proiettivamente identiche è che abbiano la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti.* In vero le due omografie si potranno rappresentare amendue colle formule (7), per l'una essendovi le x_i, y_i, per l'altra, nuove variabili x'_i, y'_i; ed allora, per dimostrare il teorema, basta fare la trasformazione proiettiva data dalle $x_i = x'_i$ o $y_i = y'_i$; la quale fa corrispondere rispettivamente agli $r+1$ vertici di riferimento ed al punto unità dello spazio in cui si considera la prima omografia, gli omonimi punti dello spazio in cui si considera la seconda.

Se si osserva poi che, nel primo (ad es.) di questi due spazî, ciascuno degli $h^{(i)}$ punti fondamentali che appartengono allo spazio fondamentale $S_{h^{(i)}-1}$ può prendersi in $\infty^{h^{(i)}-1}$ modi diversi, mentre il punto unità può prendersi dovunque nello spazio ambiente, e quindi in ∞^r modi diversi, si trova ancora che due *omografie generali proiettivamente identiche possono trasformarsi l'una nell'altra per mezzo di* $\infty^{\Sigma h^{(i)}(h^{(i)}-1)+r} = \infty^{\Sigma h^{(i)^2}-1}$ *omografie distinte.*

$\Sigma h^{(i)}(h^{(i)}-1)+r = \Sigma h^{(i)2} - \Sigma h^{(i)} + r$

10. — Ecco una costruzione geometrica di una omografia generale di cui sieno dati gli spazî fondamentali e gli invarianti assoluti [1]).

Facciamo dapprima il caso in cui gli spazî fondamentali sieno tutti degli S_0, cioè soltanto $r+1$ punti uniti (indipendenti) $A_0, A_1, \ldots, A_r$ dello spazio ambiente S_r, e supponiamo che i relativi invarianti assoluti siano dati dai rapporti $\rho' : \rho'' : \ldots : \rho^{(r+1)}$: vogliamo di un punto M di S_r costruire il suo corrispondente M'. Gli iperpiani che proiettano, ad es., A_{r-1}, A_r, M, M' dall' S_{r-2} individuato dai punti $A_0, A_1, \ldots, A_{r-2}$ costituiscono un gruppo di rapporto anarmonico dato $\frac{\rho^{(r+1)}}{\rho^{(r)}}$ (n.° 6): onde si può costruire

[1]) Veggasi nota precedente.

senz' altro l' iperpiano che dal detto S_{r-2} proietta M'. Ciò si ripeta opportunamente altre $r-1$ volte (ad es. prendendo successivamente A_{r-2}, A_r; A_{r-3}, A_r; ...; A_0, A_r): si otterranno r iperpiani corrispondenti ad altrettanti per M ed individuanti M'.

Se invece non tutti gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$ sono degli S_0, si può procedere nel modo seguente per costruire di un punto M il corrispondente M'. Conducasi per M lo spazio S_{m-1} che incontra in un punto ciascuno di quegli spazî fondamentali (n.° 17, cap. 1.°), il quale spazio S_{m-1}, essendo questi punti d' appoggio indipendenti ed uniti, è trasformato in sè dall' omografia di S_r da costruirsi: sicchè il corrispondente M' di M si troverà costruendo il corrispondente di M in detta omografia subordinata. Ora per questo basta riportarsi al caso precedente, perchè l' omografia di S_{m-1} in sè ha per spazî fondamentali i detti m punti d' appoggio e per invarianti assoluti gli stessi della omografia di S_r, come subito si vede, ad es., tagliando con S_{m-1} due iperpiani corrispondenti di S_r e gli iperpiani del loro fascio che passano per $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$ e ricordando il n.° 6.

* 11. — Fermiamoci a considerare il caso di una omografia generale di S_r in sè con due soli spazî fondamentali, i quali (essendo $h'+h''=r+1$) si potranno indicare con S_{h-1}, S_{r-h}. Evidentemente (n. 8) questi saranno pure i sostegni delle stelle fondamentali; sicchè non solo tutti i punti di S_{h-1}, S_{r-h}, ma anche tutti gli iperpiani, e quindi tutti gli spazî passanti per essi sono uniti. Sono pure uniti gli S_1 che congiungono due punti corrispondenti, perchè s' appoggiano ad S_{h-1} e ad S_{r-h}, il rapporto anarmonico dei due punti corrispondenti e dei due punti d' appoggio essendo (n. 6) l' unico invariante assoluto dell' omografia; e correlativamente.

In particolare, se $h=1$ si ha quella speciale omografia che ha nome di *omologia*, avente un *centro* S_0 di omologia ed un *asse* S_{r-1} d' omologia. Dati il centro e l' asse e una coppia di punti corrispondenti allineati col centro (o d' iperpiani corrispondenti segantisi sull' asse) l' omologia è individuata, come si vede subito prendendo $r+1$ punti generici sull' asse ed applicando il teorema del n. 6, Cap. 3.°. Così pure si trova, come nella geometria proiettiva ordinaria, (mostrando che le rette congiungenti i punti corrispondenti a due a due s' incontrano e ricorrendo poi al teorema del n. 16, Cap. 1.°) che, se una omografia di uno spazio in sè ha un S_{r-1}

di elementi uniti, ha una stella S_0 pure di elementi uniti, e correlativamente, cioè si ha una omologia [1]).

Aggiungasi che la proprietà del n. 4, per una omografia con due spazî fondamentali S_{h-1}, S_{r-h}, consiste in ciò che ogni punto di uno di questi spazî, ad es. S_{r-h}, è centro di omologia dell'S_h passante per il punto e per l'altro spazio S_{h-1}, questo essendo l'asse di omologia.

* 12. — Vedemmo (n. 5) che le omografie cicliche sono omografie generali. Si possono quindi prendere per esse le formole ridotte (7), e si trova che, se l'omografia ciclica è d'ordine n, cioè da un punto (non unito) si ritorna ad esso soltanto dopo n suoi successivi corrispondenti (i quali n punti si dice che costituiscono un ciclo), ρ', ρ'', ..., $\rho^{(m)}$ e quindi *gli invarianti assoluti debbono essere radici n^{esime} dell'unità e reciprocamente.* **Perchè una omografia sia ciclica basta che un punto particolare (non unito) dia origine ad un ciclo.**

Adunque le formule di una omografia ciclica d'ordine n si possono scrivere nella forma

$$x_i = e_i y_i \ , \ (e_i^n = 1) , \quad (i = 0 , 1 , \dots , r) .$$

Il numero degli spazî fondamentali deve essere $\leq n$, come è evidente, e ≥ 2, perchè una omografia generale con un solo spazio fondamentale è l'identità (cfr. nota al n. 2).

[1]) Si noti però che, se l'S_0 è esterno all'S_{r-1}, si ha il caso generale trattato sopra; mentre, se S_0 è di S_{r-1}, si ha una omologia che è una omografia particolare (n. 15 e seg.).

Noteremo anche che sussistono dimostrazione e teorema analoghi a quelli del n. 11, cap. 3.°. Si ha cioè che *ogni omografia fra due spazî sovrapposti* S_r, S'_r *può ottenersi con, al più, $r+1$ omologie (generali):* e si dimostra, prendendo due punti corrispondenti A, A', un punto S_0 generico sulla A A' ed un S_{r-1} generico, e assumendo A, A', come corrispondenti, l'S_0 come centro e l'S_{r-1} come asse di una omologia. Per questa lo spazio S'_r si trasforma in un altro (ad esso sovrapposto) S''_r, che sarà quindi omografico ad S_r, ed in tale omografia il punto A sarà unito. Poi si prende una retta r qualunque di S_r uscente da A e la sua corrispondente r'' di S''_r, pure uscente da A e prospettiva a quella nell'omografia fra S_r, S''_r, e si considera il loro centro di prospettiva S'_0 come centro, un iperpiano per il punto A come asse ed r, r'' come rette corrispondenti di una seconda omologia, ecc..

*13. — Se $n=2$ si hanno le omografie cicliche di 2.° ordine, dette anche *omografie involutorie*, perchè ad un punto qualunque corrisponde un medesimo punto in S_r ed in S'_r, cioè $\Omega=\Omega^{-1}$. Esse hanno precisamente due spazï fondamentali e sono quindi le omografie considerate nel n. 11, per le quali l'invariante assoluto $=-1$: onde risultano individuate dati i due spazï fondamentali [1]). Se questi sono S_{h-1}, S_{r-h} le formule dell'omografia possono scriversi

$$x_i=-y_i \quad (i=0,1,\ldots,h-1)$$
$$x_i=y_i \quad (i=h,h+1,\ldots,r),$$

cioè si ottengono cambiando i segni ad h (o ad $r-h+1$) coordinate.

Se $h=1$ si ha *l'omologia involutoria* od *armonica*. Se $h>1$, *l'omografia involutoria si può ottenere come prodotto di h* (o di $r-h$) *omologie involutorie*. È evidente infatti che l'omografia involutoria definita dalle ultime formule è il prodotto delle h omologie involutorie (prese in qualunque ordine) date dalle formule, per $t=0,1,\ldots,h-1$,

$$x_t=-y_t$$
$$x_i=y_i \quad (i=0,1,\ldots,t-1,t+1,\ldots,r);$$

che si ottengono cioè cambiando il segno ad una per volta delle prime h coordinate. I centri di omologia sono gli h punti fondamentali contenuti in S_{h-1}, cioè h punti indipendenti $C_0, C_1, \ldots, C_{h-1}$ di questo spazio e gli assi di omologia sono gli iperpiani $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{h-1}$ passanti per S_{r-h} e per i detti punti presi ad $h-1$ ad $h-1$ (π_i per $C_0,\ldots,C_{i-1},C_{i+1},\ldots,C_{h-1}$).

La proprietà si ottiene subito anche per via sintetica. Un punto P di una retta C_i B, essendo B un punto di S_{r-h}, ha per corrispondente nella data omografia il punto P' coniugato armonico di P rispetto a C_i, B ed ha per corrispondente P' anche nell'omologia armonica di centro C_i e di asse π_i, mentre nelle altre omologie, giacendo la retta C_i B sui loro assi, P e P' sono uniti. Risulta quindi che, nel prodotto della omografia involutoria data e delle h omologie involutorie, gli spazï che proiettano da S_{r-h} gli h punti $C_0, C_1, \ldots, C_{h-1}$ sono di punti uniti e per conseguenza (n. 6, cap. 3.°) quel prodotto è l'identità.

---

[1]) In S_3 si hanno l'omologia armonica e la cosidetta *involuzione gobba* (*geschaart-involutorische System*).

14. — Sull'argomento precedente aggiungeremo ancora le osservazioni seguenti utili in appresso.

Abbiansi in S_r, $r+1$ punti indipendenti, e si indichino con $0, 1, \dots, r$. Se $i_0 i_1 \dots i_r$ è una permutazione qualunque di questi numeri, l'omografia involutoria, di cui gli spazï fondamentali S_{h-1}, S_{r-h} sono quelli determinati rispettivamente dagli h punti $i_0, i_1, \dots, i_{h-1}$ e dagli $r-h+1$ rimanenti $i_h, i_{h+1}, \dots, i_r$, si rappresenterà indifferentemente con uno dei due simboli $(i_0 i_1 \dots i_{h-1})$, $(i_h i_{h+1} \dots i_r)$. Si hanno tutti i casi possibili, se r è pari, per $h \leq \frac{r}{2}$ e, se r è dispari, per $h \leq \frac{r+1}{2}$.

Tutte le omografie involutorie ora definite formano colla trasformazione identica un gruppo; cioè il prodotto di un numero qualunque di esse è una delle medesime. Ciò si rileva immediatamente dalla rappresentazione analitica, presi i detti $r+1$ punti come vertici della piramide fondamentale, perchè ciascuna delle omografie involutorie risultando dal cambiar segno ad un certo numero di coordinate, il prodotto di un numero qualunque di esse avrà lo stesso carattere.

Ovvero si può notare che ciascuna delle considerate omografie proviene, per il n.° precedente, dal prodotto di un certo numero (in qualsiasi ordine) delle omologie armoniche $(0), (1), \dots, (r)$. Il prodotto di un numero qualunque di quelle è quindi un prodotto di queste, da cui si possono eliminare due omologie collo stesso simbolo, il cui prodotto è l'identità, ed il sistema di tutte le $r+1$ omologie, il cui prodotto è pure l'identità (essendo $(0)(1)\dots(r-1)(r) = (0\,1 \dots r-1)(r) = (r)(r)$): e però ecc. Ad es. il prodotto delle $(i_0 i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$, $(i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7)$, $(i_5 i_6 i_7 i_8)$ è la $(i_0 i_1 i_5 i_8)$.

L'ordine del gruppo, cioè il numero delle dette omografie involutorie, compresa l'identità, è

$$\frac{1}{2}\left[\binom{r+1}{1} + \binom{r+1}{2} + \dots + \binom{r+1}{r}\right] + 1 = \frac{1}{2}\left(2^{r+1} - 2\right) + 1 = 2^r.$$

Osserviamo ancora che, se per una omografia del gruppo ad un punto P corrisponde P′ ed a P′, per un'altra omografia, P″, al punto P corrisponde P″ per una terza omografia che è il prodotto di quelle due. Ne discende chiaramente che i punti corrispondenti ad un punto P per tutte le omografie del gruppo formano un sistema di 2^r punti (compreso P) che si trasforma in sè per ogni omografia del gruppo stesso.

15. — Passiamo ora a trattare delle *omografie particolari*, ossia di quelle per cui, mantenute le solite notazioni, sia $h'+h''+\ldots+h^{(m)}<r+1$, tali cioè (n. 2) che la radice $\rho^{(i)}$ di $D(\rho)=0$ abbia, almeno per un valore di i, multiplicità maggiore di $h^{(i)}$. Per fissar le idee, supponiamo che la radice ρ' sia λ^{upla} per $D(\rho)=0$, con $\lambda>h'$; e scriviamo le formule (5) che legano le coordinate η_i e ξ_i di due iperpiani corrispondenti di S'_r ed S_r, assumendo i vertici $A_0, A_1, \ldots, A_{r-h'}$ della piramide fondamentale nello spazio $S_{r-h'}$ sostegno della stella coniugata ad $S_{h'-1}$. Se si esprime che ogni iperpiano per $S_{r-h'}$ è unito, cioè che le suddette formule devono essere soddisfatte per la sostituzione $\xi_i=\eta_i=0$ $(i=0,1,\ldots,r-h')$ e $\xi_i=\eta_i$ qualunque $(i=r-h'+1, r-h'+2, \ldots, r)$, si trova che esse sono del tipo:

$$\begin{array}{ll}
\rho\eta_0 & = a_{00}\xi_0+\ldots+a_{r-h',0}\xi_{r-h'} \\
\cdots & \cdots \\
\rho\eta_{r-h'} & = a_{0,r-h'}\xi_0+\ldots+a_{r-h',r-h'}\xi_{r-h'} \\
\rho\eta_{r-h'+1} & = a_{0,r-h'+1}\xi_0+\ldots+a_{r-h',r-h'+1}\xi_{r-h'}+\mu\xi_{r-h'+1} \\
\rho\eta_{r-h'+2} & = a_{0,r-h'+2}\xi_0+\ldots+a_{r-h',r-h'+2}\xi_{r-h'} \qquad +\mu\xi_{r-h'+2} \\
\cdots & \cdots \\
\rho\eta_r & = a_{0r}\xi_0+\ldots+a_{r-h',r}\xi_{r-h'} \qquad\qquad +\mu\xi_r;
\end{array}$$

e, se inoltre si risolve su di esse il problema degli iperpiani uniti, si trova $\mu=\rho'$. Invece delle precedenti si può considerare la loro sostituzione trasposta che dà le coordinate di un punto x di S_r espresse per quelle del corrispondente punto y di S'_r, cioè,

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\rho x_0 & = a_{00}y_0+\ldots+a_{0,r-h'}y_{r-h'}+\ldots\ldots+a_{0r}y_r \\
\cdots & \cdots \\
\rho x_{r-h'} & = a_{r-h',0}y_0+\ldots+a_{r-h',r-h'}y_{r-h'}+\ldots\ldots+a_{r-h',r}y_r \\
\rho x_{r-h'+1} & = \qquad\qquad \rho' y_{r-h'+1} \\
\cdots & \cdots \\
\rho x_r & = \qquad\qquad\qquad \rho' y_r.
\end{array}\right.$$

Posto

$$D'(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00}-\rho & a_{01} & \dots & a_{0,r-h'} \\ a_{10} & a_{11}-\rho & \dots & a_{1,r-h'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-h',0} & a_{r-h',1} & \dots & a_{r-h',r-h'}-\rho \end{vmatrix},$$

il $D(\rho)$ è dato dalla

$$D(\rho) = (\rho' - \rho)^{h'} D'(\rho):$$

e, siccome ρ' è radice λ^{upla} di $D(\rho)=0$, dovrà ρ' essere radice $(\lambda - h')^{\text{upla}}$ di $D'(\rho)=0$. Il determinante $D'(\rho)$ non è altra cosa che il $D(\rho)$ relativo all'omografia dello spazio $S_{r-h'}$ in sè stesso, subordinata all'omografia data e rappresentata dalle formole seguenti, che provengono dalle (8) col farvi $x_i = y_i = 0 \quad (i = r - h' + 1, \dots, r)$:

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= a_{00} y_0 + \dots + a_{0,r-h'} y_{r-h'} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \rho x_{r-h'} &= a_{r-h',0} y_0 + \dots + a_{r-h',r-h'} y_{r-h'}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che, se indichiamo con $r - h' - h'_1 + 1$ la caratteristica del determinante nullo di ordine $r - h' + 1$, $D'(\rho')$, alla radice ρ' corrisponde uno spazio fondamentale $S_{h_1'-1}$ di $S_{r-h'}$ $(1 \leq h_1' \leq \lambda - h')$. Gli altri spazî fondamentali, corrispondenti alle altre radici $\rho'', \dots, \rho^{(m)}$ di $D'(\rho)=0$, sono evidentemente gli spazî fondamentali $S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$ dell'omografia di S_r in sè stesso; e poichè punti uniti nell'omografia di $S_{r-h'}$ in sè stesso sono tali anche in quell'omografia di S_r, risulta senz'altro che $S_{h'_1-1}$ *è l'intersezione di* $S_{r-h'}$ *con* $S_{h'-1}$. Il che del resto si può anche verificare subito direttamente, poichè le equazioni di $S_{h'-1}$ sono, per le (8)

$$\begin{aligned} \rho' x_0 &= a_{00} x_0 + \dots + a_{0,r-h'} x_{r-h'} + \dots + a_{0r} x_r \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \rho' x_{r-h'} &= a_{r-h',0} x_0 + \dots + a_{r-h',r-h'} x_{r-h'} + \dots + a_{r-h',r} x_r \end{aligned}$$

e quelle di $S_{r-h'}$ sono

$$x_{r-h'+1} = 0\ , \dots ,\ x_r = 0\ ;$$

onde la loro intersezione è lo spazio rappresentato in $S_{r-h'}$ dalle equazioni

$$\begin{aligned} \rho' x_0 &= a_{00} x_0 + \dots + a_{0,r-h'} x_{r-h'} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho' x_{r-h'} &= a_{r-h',0} x_0 + \dots + a_{r-h',r-h'} x_{r-h'} \,, \end{aligned}$$

cioè appunto lo spazio $S_{h'_1-1}$.

Diciamo $S_{r-h'-h'_1}$ il sostegno dello spazio coniugato ad $S_{h'_1-1}$ in $S_{r-h'}$, e procediamo sull'omografia di $S_{r-h'}$ in sè stesso in modo analogo a quello che abbiamo tenuto per l'omografia di S_r in sè stesso. Degli $r-h'+1$ vertici della piramide fondamentale di S_r da prendersi in $S_{r-h'}$ se ne scelgano $r-h'-h'_1+1$, ad es., $A_0, A_1, \dots, A_{r-h'-h'_1}$ in $S_{r-h'-h'_1}$; allora nell'$S_{r-h'}$ (e quindi nell'S_r) le formule dell'omografia si semplicizzano in un modo che ci è ormai noto, ed il $D'(\rho)$ diventa

$$D'(\rho) = (\rho' - \rho)^{h'_1} D''(\rho) \,,$$

avendo posto

$$D''(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \dots & a_{0,r-h'-h'_1} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \dots & a_{1,r-h'-h'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-h'-h'_1,0} & a_{r-h'-h'_1,1} & \dots & a_{r-h'-h'_1,r-h'-h'_1} - \rho \end{vmatrix} \,;$$

onde

$$D(\rho) = (\rho' - \rho)^{h'+h'_1} D''(\rho) \,;$$

e $D''(\rho) = 0$ sarà l'equazione $D(\rho) = 0$ relativa all'omografia subordinata dello spazio $S_{r-h'-h'_1}$ in sè stesso.

Se $\lambda > h' + h'_1$, le radici di $D''(\rho) = 0$ saranno $\rho', \rho'', \dots, \rho^{(m)}$, e detta $r - h' - h'_1 - h'_2 + 1$ $(1 \leq h'_2 \leq \lambda - h' - h'_1)$ la caratteristica del determinante nullo d'ordine $r - h' - h'_1 + 1$, $D''(\rho')$, gli spazî fondamentali dell'omografia di $S_{r-h'-h'_1}$ in sè saranno l'intersezione $S_{h'_2-1}$ dell'$S_{r-h'-h'_1}$ stesso con $S_{h'_1-1}$ e gli spazî $S_{h''-1}, S_{h'''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$. Se invece $\lambda = h' + h'_1$ non esiste in $S_{r-h'-h'_1}$ alcun spazio fondamentale corrispondente alla radice ρ' ed il processo si arresta. Suppongasi il primo caso, cioè $\lambda > h' + h'_1$. Allora, se $S_{r-h'-h'_1-h'_2}$ è il sostegno dello spazio coniugato ad $S_{h'_2-1}$ nell'omografia in sè di $S_{r-h'-h'_1}$, scegliamo i vertici $A_0, A_1, \dots, A_{r-h'-h'_1-h'_2}$ della piramide fondamentale (che sono fra quelli da prendersi in $S_{r-h'-h'_1}$) nello spazio $S_{r-h'-h'_1-h'_2}$: si avrà

$$D''(\rho) = (\rho' - \rho)^{h'_2} D'''(\rho)$$

posto

$$D'''(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \dots & a_{0,\, r-h'-h'_1-h'_2} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \dots & a_{1,\, r-h'-h'_1-h'_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-h'-h'_1-h'_2,\, 0} & a_{r-h'-h'_1-h'_2,\, 1} & \dots & a_{r-h'-h'_1-h'_2,\, r-h'-h'_1-h'_2} - \rho \end{vmatrix};$$

e per conseguenza

$$D(\rho) = (\rho' - \rho)^{h'+h'_1+h'_2} D'''(\rho),$$

onde $\lambda \geq h' + h'_1 + h'_2$.

Sia, per fissar le idee, $\lambda = h' + h'_1 + h'_2$, cioè ρ' non più radice di $D'''(\rho) = 0$ [1]. Ciò essendo, lo spazio $S_{r-h'-h'_1-h'_2}$ sarà trasformato omograficamente in sè stesso e non avrà più alcun spazio fondamentale corrispondente alla radice ρ': quindi l'operazione sarà arrestata e dopo le dette successive semplificazioni il $D(\rho)$ della omografia avrà assunto l'aspetto [2]:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-h'-h'_1-h'_2,\, 0} & \dots & a_{r-h'-h'_1-h'_2,\, r-h'-h'_1-h'_2} - \rho & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \rho' - \rho & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \rho' - \rho & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho' - \rho \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Non è dubbio che a ciò si deve pervenire, tutto al più quando si giunga a trovare ρ' radice $(r+1)^{\text{uple}}$ di $D(\rho) = 0$, nel qual caso si ha un solo spazio fondamentale. Già avvertimmo (nota al n. 2) che, reciprocamente, se esiste un solo spazio fondamentale $S_{h'-1}$, deve essere $\lambda = r + 1 > h'$.

[2]) Tralasciamo per semplicità di indicare i termini superiori alla diagonale principale del determinante (alcuni dei quali sono diversi da zero, altri sono nulli) perchè la loro considerazione non occorre per il ragionamento che segue.

Naturalmente anche le formole dell'omografia avranno subìto delle successive semplificazioni; ma, come esse si scrivono immediatamente quando si conosca il $D(\rho)$ e quindi il modulo, è inutile fermarsi su di esse.

Or bene, nel determinante (9), nelle linee $(r-h'-h_1'-h'_2+2)^{esima}$, ..., $(r-h'-h'_1+1)^{esima}$ si ponga ρ'_2 al posto di ρ'; nelle linee $(r-h'-h'_1+2)^{esima}$, ..., $(r-h'+1)^{esima}$, si ponga ρ'_1 al posto di ρ' (intendendo che ρ'_2, ρ'_1 non annullino $D'''(\rho)$ e di più che sieno dapprima diversi fra loro e da ρ'), e nelle linee seguenti si lasci inalterato il ρ'. Il $D(\rho)$ varierà, e, corrispondentemente ad esso, varierà l'omografia relativa dello spazio S_r in sè stesso: in particolare, dopo tale variazione, in essa vi saranno degli spazï fondamentali corrispondenti alle radici diverse ρ', ρ'_1, ρ'_2 del nuovo determinante $D(\rho)=(\rho'-\rho)^{h'}(\rho'_1-\rho)^{h'_1}(\rho'_2-\rho)^{h'_2}D'''(\rho)$. Queste radici sono multiple per esso rispettivamente secondo i numeri h', h'_1, h'_2, giacchè $D'''(\rho)\neq 0$ per $\rho=\rho'$, $\rho=\rho'_1$, $\rho=\rho'_2$; mentre le radici stesse rendono manifestamente il $D(\rho)$ di caratteristica $r-h'+1$, $r-h'_1+1$, $r-h'_2+1$, cioè corrispondono a spazï fondamentali ad $h'-1$, h'_1-1, h'_2-1 dimensioni. Si faccia ora tendere con continuità ρ'_2 verso ρ'_1 e ρ'_1 verso ρ': lo spazio ad h'_2-1 dimensioni tenderà ad immergersi nello spazio ad h'_1-1 dimensioni, questo nello spazio ad $h'-1$ dimensioni, e l'omografia stessa tenderà a confondersi con quella data.

Come abbiamo operato sopra $D(\rho)$ operiamo sopra $D'''(\rho)$, che è relativo all'omografia di $S_{r-h'-h'_1-h'_2}$ in sè, considerando successivamente gli altri spazï fondamentali $S_{h'''-1}$, $S_{h''''-1}$, ..., $S_{h^{(m)}-1}$ in esso contenuti. Verremo in fine ad ottenere una omografia generale che ha per limite la data. Osservando inoltre che, se alcuni spazï fondamentali di punti vengono a sovrapporsi, la stessa circostanza deve presentarsi pure per le stelle coniugate d'iperpiani (ed anche, in senso inverso, per i loro sostegni), perchè dipendono dalle stesse radici di $D(\rho)=0$, si ha adunque l'importante teorema: — *Ogni omografia particolare può considerarsi come caso limite di una omografia generale, nella quale gli spazï (e le stelle) fondamentali vengono in vario modo a sovrapporsi* —.

Uno spazio fondamentale $S_{h^{(i)}-1}$ di una omografia si dirà d'ora innanzi, col Predella [1]), *multiplo* o *semplice* secondochè in esso sono o no venuti

[1]) *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Annali di Matem., 17 (2), 1889-90). Nella nota successiva *Sulla teoria generale delle omografie* (Atti della R. Accad. di Torino, 27, 1891-92), Predella espone la

a sovrapporsi altri spazî fondamentali, cioè secondochè la moltiplicità di $\rho^{(i)}$ per $D(\rho)$ è $=$ o $> h^{(i)}$, o anche secondochè $S_{h-1}^{(i)}$ sega o no il sostegno $S_{r-h^{(i)}}$ della stella coniugata. Per uno spazio multiplo $S_{h-1}^{(i)}$ il modo di sovrapposizione è caratterizzato dall'analisi esposta, la quale mostra che, se $S_{h-1}^{(i)}$ sega $S_{r-h^{(i)}}$ in $S_{h_1-1}^{(i)}$, se $S_{h_1-1}^{(i)}$ sega in $S_{h_2-1}^{(i)}$ il sostegno $S_{r-h^{(i)}-h_1^{(i)}}$ della stella coniugata nell'omografia di $S_{r-h^{(i)}}$, ecc., sono precisamente gli spazî $S_{h-1}^{(i)}, S_{h_1-1}^{(i)}, S_{h_2-1}^{(i)}, \ldots$ quelli che sono venuti a sovrapporsi, ciascuno essendo spazio subordinato del precedente o coincidendo con esso.

16. — Intendendo appunto che uno spazio fondamentale sia sostituito dagli spazî fondamentali semplici che sono venuti a confondersi in esso, si ha che (n. 1) *per una omografia qualunque (generale o particolare) la somma delle dimensioni, ciascuna accresciuta di una unità, degli spazî fondamentali (reali, imaginarî o sovrapposti) è eguale alla dimensione dello spazio ambiente aumentata di una unità.*

Si estende pure la nozione di caratteristica data per una omografia generale (n. 9). Anzitutto chiamasi *gruppo caratteristico* o *caratteristica di uno spazio fondamentale multiplo* l'insieme dei numeri

$$(h'-1\,,h'_1-1\,,\ldots,h'_p-1)$$

$(h' \geq h'_1 \geq \ldots \geq h'_p)$ rappresentanti le dimensioni degli spazî fondamentali venuti successivamente ad immergersi in esso; denominazione che si adotterà anche per uno spazio semplice, nel qual caso il gruppo caratteristico si limita ad un solo numero, quello che ne indica la dimensione. Si dice poi *caratteristica di una omografia* l'insieme delle caratteristiche dei suoi spazî fondamentali, cioè

$$[(h'-1\,,h'_1-1\,,\ldots,h'_p-1)\;(h''-1\,,h''_1-1\,,\ldots,h''_q-1)\ldots(h^{(m)}-1\,,h_1^{(m)}-1\,,\ldots,h_s^{(m)}-1)]$$

ove $p \geq 0\,, q \geq 0\,, \ldots, s \geq 0$.

Quando gli spazî vengono in vario modo a sovrapporsi, e *soltanto allora*, le corrispondenti radici di $D(\rho)$ divenendo eguali, alcuni degli invarianti assoluti divengono eguali tra loro ed all'unità. Rimangono quindi i soli

teoria delle omografie particolari senza alcuna considerazione di limite, introducendo gli spazî multipli direttamente, col concetto esposto alla fine di questo n. .

invarianti assoluti dati dalle radici distinte del $D(\rho)$. Il numero di quelli indipendenti è sempre eguale al numero dei gruppi caratteristici diminuito di uno.

Si dimostrerà che per le omografie particolari vale il teorema già dimostrato per le generali (n. 9): essere proiettivamente identiche due omografie aventi la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti. La dimostrazione (come per le omografie generali) sarà conseguenza immediata delle formule ridotte o canoniche di una omografia particolare, formule utili e notevoli per sè, che ora andiamo a stabilire.

17. — Indichiamo, come sempre, con $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$ gli spazî fondamentali distinti dell'omografia considerata e con S_{g-1} lo spazio a cui essi appartengono, onde

$$g = h' + h'' + \ldots + h^{(m)}.$$

Supponiamo inoltre, mantenendo le denominazioni del numero precedente, che nello spazio $S_{h'-1}$ sieno venuti a sovrapporsi successivamente gli spazî fondamentali (semplici) $S_{h'-1}, S_{h'_1-1}, \ldots, S_{h'_p-1}$, nello spazio $S_{h''-1}$ gli spazî $S_{h''-1}, S_{h''_1-1}, \ldots, S_{h''_q-1}, \ldots$, e nello spazio $S_{h^{(m)}-1}$ gli spazî $S_{h^{(m)}-1}, S_{h_1^{(m)}-1}, \ldots, S_{h_s^{(m)}-1}$: potendo essere, ad es., $p = 0$, cioè $S_{h'-1}$ semplice, ovvero $p > 0$, cioè $S_{h'-1}$ multiplo, ma non tutti i numeri $p, q, \ldots, s$ nulli.

Poniamo [1]):

$$\begin{aligned} g' &= h' + h'_1 + \ldots + h'_p \\ g'' &= h'' + h''_1 + \ldots + h''_q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^{(m)} &= h^{(m)} + h_1^{(m)} + \ldots + h_s^{(m)} \end{aligned}$$

onde (n. 16)

$$g' + g'' + \ldots + g^{(m)} = r + 1 : \tag{10}$$

e consideriamo una omografia generale che abbia per limite l'omografia particolare data e nella quale quindi esistano spazî fondamentali $S^*_{h'-1}$,

[1]) Risulta dal n. 15 che $g', g'', \ldots, g^{(m)}$ sono le multiplicità delle radici $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(m)}$ di $D(\rho) = 0$.

$S^*_{h'_1-1}, \ldots, S^*_{h'_p-1}, S^*_{h''-1}, S^*_{h''_1-1}, \ldots, S^*_{h''_q-1}, \ldots, S^*_{h^{(m)}-1}, S^*_{h_1^{(m)}-1}, \ldots, S_{h_s^{(m)}-1}$, fra di loro affatto distinti. Gli spazï $S^*_{h'-1}, S^*_{h'_1-1}, \ldots, S^*_{h'_p-1}$ apparterranno ad uno spazio $S^*_{g'-1}$; $S^*_{h''-1}, S^*_{h''_1-1}, \ldots, S^*_{h''_q-1}$ ad uno spazio $S^*_{g''-1}$, e così via; e gli spazï $S^*_{g'-1}, S^*_{g''-1}, \ldots, S^*_{g^{(m)}-1}$ saranno trasformati omograficamente in sè stessi ed apparterranno allo spazio ambiente S_r. Quando l'omografia generale tende all'omografia particolare, gli spazï $S^*_{g'-1}, S^*_{g''-1}, \ldots, S^*_{g^{(m)}-1}$ tendono a certe posizioni limiti $S_{g'-1}, S_{g''-1}, \ldots, S_{g^{(m)}-1}$ che si diranno, col Predella, rispettivamente *spazï caratteristici* degli spazï fondamentali multipli $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$, coincidendo $S_{g^{(i)}-1}$ con $S_{h^{(i)}-1}$ se questo spazio fondamentale è semplice. È chiaro che, come $S^*_{g'-1}, S^*_{g''-1}, \ldots, S^*_{g^{(m)}-1}$ per l'omografia generale suddetta, così anche $S_{g'-1}, S_{g''-1}, \ldots, S_{g^{(m)}-1}$ sono trasformati omograficamente in sè stessi per l'omografia particolare data, e che in ciascuno vi è un solo spazio fondamentale: ad es., in $S_{g'-1}$ lo spazio $S_{h'-1}$ col gruppo caratteristico $(h'-1, h'_1-1, \ldots, h'_p-1)$. Anzi si rileva dalla stessa considerazione al limite che lo spazio a cui appartengono $S_{g'-1}, S_{g''-1}$ (ad es.) è trasformato in sè e contiene i due soli spazï fondamentali $S_{h'-1}, S_{h''-1}$ aventi respettivamente i gruppi caratteristici $(h'-1, h'_1-1, \ldots, h'_p-1)$, $(h''-1, h''_1-1, \ldots, h''_q-1)$: ecc.. Ne risulta che i detti spazï caratteristici sono indipendenti, perchè se, ad es., $S_{g'-1}$ tagliasse lo spazio a cui appartengono gli altri, lo spazio d'intersezione sarebbe trasformato omograficamente in sè e quindi conterrebbe almeno un punto unito, che dovrebbe essere di $S_{h'-1}$ e di alcuno degli spazï $S_{h''-1}, S_{h'''-1}, \ldots, S_{h^{(m)}-1}$: assurdo (n. 2). Segue per la (10) che *gli spazï caratteristici* $S_{g'-1}, S_{g''-1}, \ldots, S_{g^{(m)}-1}$ *appartengono ad* S_r.

18. — Ora negli spazï caratteristici fisseremo opportunamente coppie di punti corrispondenti, e questa determinazione ci condurrà al risultato cercato. Dapprima, considerando (ad es.) lo spazio $S_{g'-1}$ ed osservando che degli spazï $S_{h'_p-1}, S_{h'_{p-1}-1}, \ldots, S_{h'-1}$ ciascuno è contenuto nel susseguente, si prendano h' punti indipendenti in $S_{h'-1}$,

$$A_0, \ldots, A_{h'_p-1}, A_{h'_p}, \ldots, A_{h'_{p-1}-1}, A_{h'_{p-1}}, \ldots, A_{h'-1},$$

così che $A_0, \ldots, A_{h'_p-1}$ sieno h'_p punti indipendenti di $S_{h'_p-1}$; $A_0, \ldots, A_{h'_p-1}, A_{h'_p}$,

..., $A_{h'_{p-1}-1}$ sieno h'_{p-1} punti indipendenti di $S_{h'_{p-1}-1}$; ecc.. Poi, riprendendo la considerazione dell'omografia generale che ha per limite la data, diciamo $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ lo spazio cui appartengono $S^*_{h'_p-1}$, $S^*_{h'_{p-1}-1}$. Poichè lo spazio $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ è trasformato in sè coi due soli spazî fondamentali $S^*_{h'_p-1}$, $S^*_{h'_{p-1}-1}$, ogni punto di $S^*_{h'_p-1}$, per es., sarà centro di prospettiva di due $S^*_{h'_{p-1}}$ di $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ corrispondenti passanti per $S^*_{h'_{p-1}-1}$ [1]. Andando al limite, $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ tenderà ad un certo spazio $S_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ pure trasformato omograficamente in sè stesso e contenuto in $S_{g'-1}$; ed $S^*_{h'_p-1}$, $S^*_{h'_{p-1}-1}$ tenderanno agli spazî $S_{h'_p-1}$, $S_{h'_{p-1}-1}$: onde gli h'_p punti indipendenti $A_0, \ldots, A_{h'_p-1}$ di $S_{h'_p-1}$ saranno centri di prospettiva di altrettante coppie di spazî ad h'_{p-1} dimensioni, corrispondenti nella data omografia, contenuti in $S_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ e passanti tutti per $S_{h'_{p-1}-1}$ [2]. Diciamo B_i, B'_i due punti corrispondenti generici degli spazî prospettivi ad h'_{p-1} dimensioni di cui A_i è il centro di prospettiva ed osserviamo che gli $h'_p + h'_{p-1}$ punti

$$(11) \qquad \begin{cases} A_0 \ldots A_{h'_p-1} \quad A_{h'_p} \ldots A_{h'_{p-1}-1} \\ B_0 \ldots B_{h'_p-1} \end{cases}$$

sono punti indipendenti dello spazio $S_{h'_p+h'_{p-1}-1}$, perchè i punti $B_0, \ldots, B_{h'_p-1}$ determinano h'_p spazî ad h'_{p-1} dimensioni nella stella di sostegno $S_{h'_{p-1}-1}$, i quali sono indipendenti come $A_0, \ldots, A_{h'_{p-1}-1}$ (perchè ad essi corrispondono in una certa proiettività) e quindi appartengono ad $S_{h'_p+h'_{p-1}-1}$. Di

---

[1] Precisamente i due $S_{h'_{p-1}}$ sono coincidenti, cioè si ha una omologia generale (ultimo alinea del n. 11); ma preferiamo qui adoperare la parola *prospettività* per uniformità di linguaggio.

[2] Anche qui si tratta di coppie di spazî coincidenti, e però di omologie (particolari) aventi il centro sull'asse: e analogamente in seguito in altri casi.

più si rammenti che un punto B_i della seconda linea del sistema (11), il suo corrispondente B'_i nell'omografia ed il punto A_i che gli sta sopra sono tre punti allineati.

Adesso ripetiamo l'operazione precedente, considerando daccapo l'omografia generale che ha per limite la data, ed in essa lo spazio $S^*_{h'_p+h'_{p-1}+h'_{p-2}-1}$ cui appartengono gli spazï $S^*_{h'_p-1}$, $S^*_{h'_{p-1}-1}$, $S^*_{h'_{p-2}-1}$, o, ciò che fa lo stesso, $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$, $S^*_{h'_{p-2}-1}$, e che è trasformato in sè, avendo $S^*_{h'_p-1}$, $S^*_{h'_{p-1}-1}$, $S^*_{h'_{p-2}-1}$ come spazï fondamentali. In esso il sostegno dello spazio coniugato ad $S^*_{h'_{p-2}-1}$ è $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$: onde, passando al limite, $S^*_{h'_p+h'_{p-1}+h'_{p-2}-1}$ tenderà ad uno spazio $S_{h'_p+h'_{p-1}+h'_{p-2}-1}$, che sarà trasformato in sè per l'omografia data e che conterrà lo spazio $S_{h'_p+h'_{p-1}-1}$ posizione limite di $S^*_{h'_p+h'_{p-1}-1}$. Adunque gli $h'_p+h'_{p-1}$ punti (11) di questo spazio saranno centri di prospettiva di altrettante coppie di spazï ad h'_{p-2} dimensioni corrispondenti nella data omografia e passanti per $S_{h'_{p-2}-1}$. I punti $A_0, A_1, \dots, A_{h'_p-1}$ sono precisamente centri di prospettiva delle coppie di spazï ad h'_{p-2} dimensioni ottenuti proiettando da $S_{h'_{p-2}-1}$ le coppie di punti B_0 e B'_0, B_1 e B'_1, ..., $B_{h'_p-1}$ e $B'_{h'_p-1}$; quindi, se diciamo B_i e B'_i ($i = h'_p, \dots, h'_{p-1}-1$) due punti corrispondenti generici degli spazï prospettivi di cui il centro di prospettiva è A_i; e diciamo inoltre C_i e C'_i ($i = 0, \dots, h'_p - 1$) due punti corrispondenti generici degli spazï prospettivi di cui il centro di prospettiva è B_i, otteniamo il seguente quadro di punti

$$(12) \qquad \begin{cases} A_0 \dots A_{h'_p-1} \; A_{h'_p} \dots A_{h'_{p-1}-1} \dots A_{h'_{p-2}-1} \\ B_0 \dots B_{h'_p-1} \; B_{h'_p} \dots B_{h'_{p-1}-1} \\ C_0 \dots C_{h'_p-1} \end{cases}$$

nel quale ogni punto (della seconda e terza linea) è allineato con quello che gli è immediatamente superiore e col suo corrispondente. Inoltre gli $h'_p+h'_{p-1}+h'_{p-2}$ punti del quadro (12) sono, per una ragione analoga a quella detta dianzi, altrettanti punti indipendenti di $S_{h'_p+h'_{p-1}+h'_{p-2}-1}$.

Così proseguendo, si arriva infine a stabilire un quadro

$$
(13)\qquad \begin{cases}
A_0 \ldots A_{h'_p-1} \ldots A_{h'_{p-1}-1} \ldots A_{h'_2-1} \ldots A_{h'_1-1} \ldots A_{h'-1} \\[6pt]
B_0 \ldots B_{h'_p-1} \ldots B_{h'_{p-1}-1} \ldots B_{h'_2-1} \ldots B_{h'_1-1} \\[6pt]
C_0 \ldots C_{h'_p-1} \ldots C_{h'_{p-1}-1} \ldots C_{h'_2-1} \\[6pt]
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\[6pt]
D_0 \ldots D_{h'_p-1}
\end{cases}
$$

di g' punti indipendenti dello spazio caratteristico $S_{g'-1}$, tale che ogni punto, a cominciare dalla seconda linea, è allineato con quello che gli è immediatamente superiore e col suo corrispondente, mentre i punti della prima linea sono uniti. Si dice che un punto del quadro ed il suo corrispondente (coincidente con esso, se il punto è unito) costituiscono una *coppia caratteristica* dello spazio $S_{g'-1}$, mentre si chiama *gruppo caratteristico* di $S_{g'-1}$ l'insieme dei soli punti del quadro stesso [1]).

Si costruiscano ora in egual modo gruppi caratteristici degli altri spazî caratteristici. Siccome ogni tale gruppo è di punti appartenenti al relativo spazio caratteristico e tutti questi spazî appartengono ad S_r (n. 17), gli $r+1$ punti risultanti dal riunire tutti i gruppi caratteristici saranno $r+1$ punti indipendenti di S_r, e quindi potranno assumersi come vertici della piramide fondamentale. Ciò facendo, vediamo come si modificano le formule, o, ciò che è lo stesso, il modulo dell'omografia

$$
(14)\qquad \begin{vmatrix}
a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0i} & \ldots & a_{0r} \\
a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r0} & a_{r1} & \ldots & a_{ri} & \ldots & a_{rr}
\end{vmatrix}.
$$

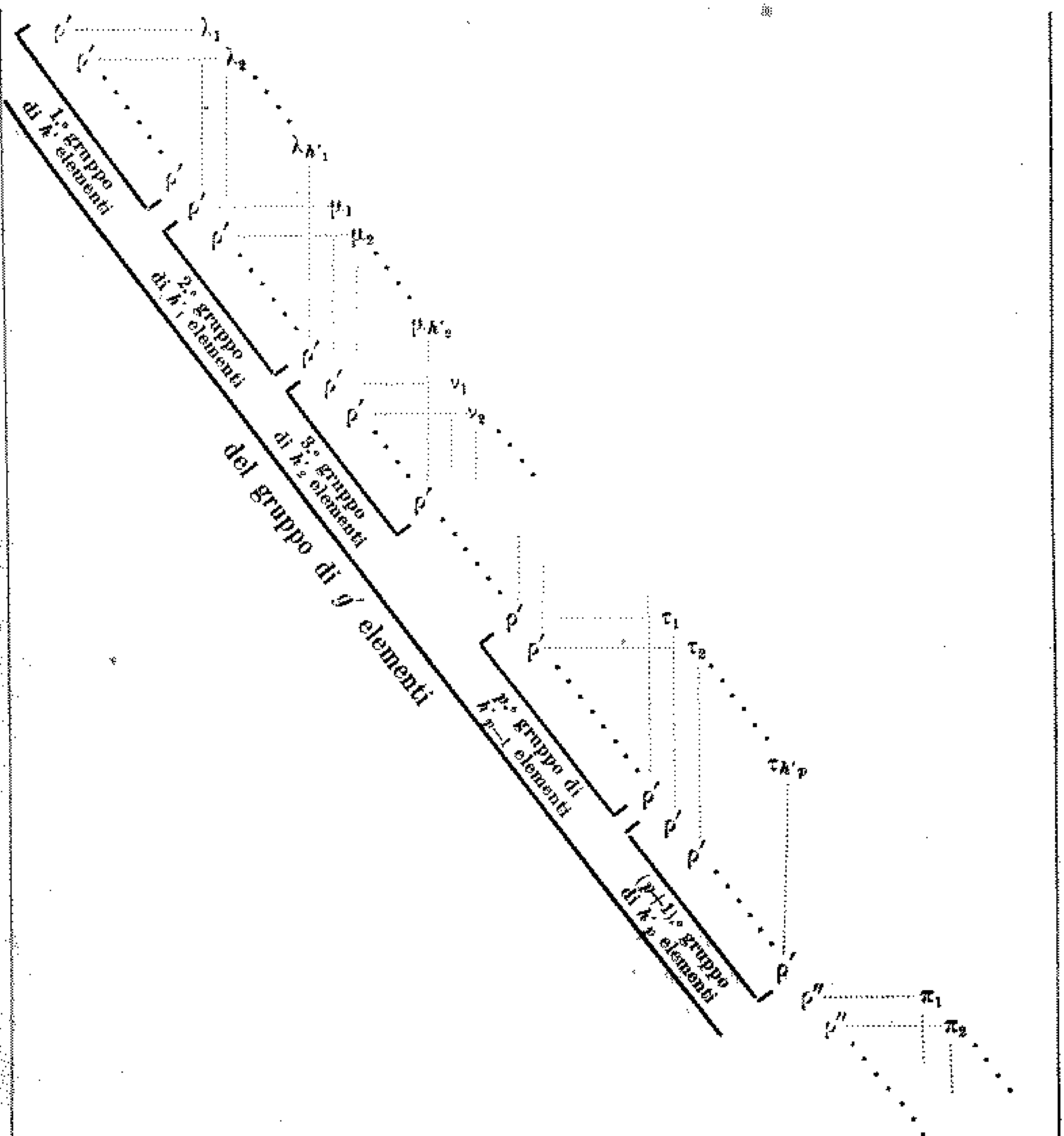
[1]) Per dare un significato intuitivo alle coppie caratteristiche si pensi che $S_{h'_1-1}$ sia caduto in $S_{h'-1}$, muovendosi h'_1 suoi punti (indipendenti) in determinate direzioni, uscenti da $A_0, \ldots, A_{h'_1-1}$; e che si sieno prese su tali direzioni rispettivamente h'_1 coppie (generiche) di punti corrispondenti $(B_0 B'_0), \ldots, (B_{h'_1-1} B'_{h'_1-1})$: analogamente quando $S_{h'_2-1}$ cade in $S_{h'_1-1}$; ecc.

19. — Supponiamo di prendere come vertici $(100\ldots0)$, $(010\ldots0)$, $(001\ldots0)$,... della piramide fondamentale successivamente i punti della 1.ª,..., $(p+1)^{ma}$ linea del 1.° quadro (13), che dà il gruppo caratteristico di $S_{g'-1}$, e poi i punti della 1.ª,..., $(q+1)^{ma}$ linea del 2.° quadro che dà il gruppo caratteristico di $S_{g''-1}$, e così via.

Poichè i termini $a_{0i}, a_{1i}, \ldots, a_{ri}$ della $(i+1)^{ma}$ colonna del modulo (14) sono le coordinate del punto corrispondente all' $(i+1)^{mo}$ vertice della piramide fondamentale, è chiaro che, per essere uniti nella omografia considerata i punti $A_0, \ldots, A_{h'-1}$ del 1.° quadro (13), saranno nulli tutti i termini delle prime h' colonne del modulo dell'omografia medesima, tranne quelli situati sulla diagonale principale. Poi al punto B_0 di cui tutte le coordinate sono nulle tranne l' $(h'+1)^{ma}$ corrisponde il punto B'_0, il quale, trovandosi sulla congiungente il 1.° coll' $(h'+1)^{mo}$ vertice della piramide fondamentale, ha tutte le coordinate nulle tranne la 1.ª e l' $(h'+1)^{ma}$ (che, col loro rapporto, dànno la coordinata di B'_0 sopra la retta $A_0 B_0$): cosicchè nell' $(h'+1)^{ma}$ colonna del modulo in discorso saranno nulli tutti i termini tranne il 1.° e l' $(h'+1)^{mo}$. Similmente nelle colonne $(h'+2)^{ma}$,..., $(h'+h'_1)^{ma}$ mancheranno tutti i termini, tranne rispettivamente il 2.° e l' $(h'+2)^{mo}$,..., l' $h'_1{}^{mo}$ e l' $(h'+h'_1)^{mo}$. Ripetendo per i punti C,..., D di (13) quello che abbiamo detto per i punti B si trovano immediatamente ed analogamente le successive colonne del modulo fino alla g'^{ma}. Osservando poi che lo spazio fondamentale $S_{h'-1}$ $(x_{h'}=\ldots=x_r=0)$ è l'unico spazio fondamentale (multiplo) dell'omografia subordinata di $S_{g'-1}$ $(x_{g'}=\ldots=x_r=0)$, si trova subito che tutti i termini della diagonale principale delle prime g' colonne sono eguali fra loro ed a ρ'.

Ripetansi le precedenti considerazioni sul 2.° quadro contenente il gruppo caratteristico di $S_{g''-1}$, e così di seguito. Si giunge alla seguente semplice regola per ottenere il cercato modulo della data omografia: — *Si prenda il modulo ridotto della omografia generale di cui l'omografia particolare considerata è limite, nel quale cioè tutti gli elementi sono nulli, tranne quelli della diagonale principale, di cui i primi h' sono eguali fra loro, i successivi h'_1 sono eguali fra loro, ecc. Di questi elementi i primi g' si facciano eguali a ρ', i successivi g'' eguali a ρ'', ecc.: poi si trasporti verticalmente verso l'alto il 2.° gruppo (di h'_1 elementi della diagonale) di h' posti; il 3.° gruppo (di h'_2 elementi) di h'_1 posti,..., il $(p+1)^{mo}$ gruppo (di h'_p elementi) di h'_{p-1} posti, e si attribuiscano agli elementi trasportati valori $\lambda_1,\ldots,\lambda_{h'_1}$; $\mu_1,\ldots,\mu_{h'_2}$;...; $\tau_1,\ldots,\tau_{h'_p}$ arbitrari ma diversi da zero. Si ripeta* *la stessa cosa per i successivi g'' elementi: ecc.*. Tuttociò è chiaramente espresso dal seguente schema del modulo [1]):

(15)



1) In questo schema le sole punteggiate grosse indicano termini diversi da zero. Le punteggiate fine sono semplici indicazioni di allineamenti, cioè in esse

ove deve ripetersi pei gruppi di $g'', \ldots, g^{(m)}$ elementi ciò che ivi è indicato per il gruppo di g' elementi.

20. — Come avvertimmo nel numero precedente, le $\frac{\lambda_1}{\rho'}, \ldots, \frac{\lambda_{h'_1}}{\rho'}$ sono le coordinate rispettive di $B'_0, \ldots, B'_{h'_1-1}$ sopra le rette $A_0B_0, \ldots, A_{h'_1-1}B_{h'_1-1}$; così $\frac{\mu_1}{\rho'}, \ldots, \frac{\mu_{h'_2}}{\rho'}$ sono le coordinate rispettive di $C'_0, \ldots, C'_{h'_2-1}$ sopra le rette $B_0C_0, \ldots, B_{h'_2-1}C_{h'_2-1}$; ecc.. Queste coordinate e quindi le $\lambda_1, \ldots, \lambda_{h'_1}; \mu_1, \ldots, \mu_{h'_2}$; ... si possono ritenere arbitrarie quando si ritenga arbitrario il punto unità sulle rette $A_0B_0, \ldots, A_{h'_1-1}B_{h'-1}$; $B_0C_0, \ldots, B_{h'_2-1}C_{h'_2-1}$; ... della piramide di riferimento. Per ciò si osservi che il punto unità sopra A_0B_0 (ad es.) è il punto ove questa retta taglia l'S_{r-1} determinato dal punto unità di S_r e dai rimanenti vertici della piramide. Per conseguenza, dopo aver date genericamente le $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, il punto unità di S_r deve essere scelto in uno spazio comune a (n. 17)

$$h'_1+h'_2+\ldots+h'_p+h''_1+h''_2+\ldots+h''_q+\ldots+h_1^{(m)}+h_2^{(m)}+\ldots+h_s^{(m)}=r+1-g$$

dati S_{r-1}, e però in un dato spazio S_{g-1} [1]).

Inoltre ciascuno dei punti $A_0, \ldots, A_{h'_p-1}$ dipende da h'_p-1 parametri, ciascuno dei punti $A_{h'_p}, \ldots, A_{h'_{p-1}-1}$ da $h'_{p-1}-1, \ldots$, ciascuno dei punti $A_{h'_1}, \ldots, A_{h'-1}$ da $h'-1$, perchè quei punti sono contenuti rispettivamente negli spazî $S_{h'_p-1}, S_{h'_{p-1}-1}, \ldots, S_{h'-1}$: dunque in tutto essi dipendono da

$$h'_p(h'_p-1)+(h'_{p-1}-h'_p)(h'_{p-1}-1)+\ldots+(h'-h'_1)(h'-1)$$

parametri. Poi ciascuno dei punti $B_0, \ldots, B_{h'_p-1}$ dipende da h'_{p-1} parametri, perchè può prendersi ad arbitrio (n. 18) in un certo spazio ad h'_{p-1} dimensioni (determinato una volta scelti i punti A); ciascuno dei punti $C_0, \ldots, C_{h'_p-1}, B_{h'_p}, \ldots, B_{h'_{p-1}-1}$ dipende, per una ragione analoga, da h'_{p-2} parametri; ...; ciascuno dei punti $D_0, \ldots, D_{h'_p-1}, \ldots, C_{h'_3}, \ldots, C_{h'_2-1}$,

---

e nei posti rimanenti i termini sono nulli. Notisi ancora che (ad es.) gli elementi λ e gli elementi μ sono su parallele alla diagonale principale, diverse se $h' \neq h'_1$ e coincidenti se $h' = h'_1$.

[1]) Il dubbio che i detti S_{r-1} abbiano a comune uno spazio di dimensione $>g-1$, si elimina prendendo posizioni particolari dei piani stessi, per es. quelle passanti per $B_0, \ldots, B_{h'_1}$; $C_0, \ldots, C_{h'_2}$; ... onde si hanno iperpiani fondamentali, i quali sono indipendenti (in Σ_r).

$B_{h'_2}, \ldots, B_{h'_1-1}$ dipende da h' parametri: cioè in tutto questi punti dipendono da

$$h'_p\, h'_{p-1} + h'_{p-1}\, h'_{p-2} + \ldots + h'_1\, h'$$

parametri. Si può adunque dire che il quadro (13) relativo alle coppie caratteristiche dello spazio $S_{g'-1}$ può costruirsi in

$$\infty^{h'_p(h'_p-1)+h'_{p-1}(h'_{p-1}-1)+\ldots+h'(h'-1)+h'_p+h'_{p-1}+\ldots+h'_1}$$

modi distinti.

Ne segue, facendo il ragionamento per tutti gli altri quadri, tenendo conto dell'osservazione fatta al principio di questo n. e ricordando le relazioni del n. 17, che *il modulo dell'omografia particolare, prendendo convenientemente i vertici della piramide fondamentale ed il punto unità può ridursi alla forma* (15) *(ove le $\lambda, \mu, \nu, \ldots,$ hanno valori prefissati arbitrarî, diversi da zero) in $\infty^{\Sigma h(h-1)+r}$ modi differenti*, essendo

$$\sum h(h-1) = h'(h'-1) + \ldots + h'_p(h'_p-1) + h''(h''-1) + \ldots + h''_q(h''_q-1) + \ldots + \\ + h^{(m)}(h^{(m)}-1) + \ldots + h^{(m)}_s(h^{(m)}_s-1).$$

Valgono quindi per le omografie particolari considerazioni analoghe a quelle fatte nel n. 9 per le omografie generali, e si trova così la proprietà comune alle une ed alle altre: *Due omografie qualunque aventi la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti, sono proiettivamente identiche, e reciprocamente: e di più si può passare dall'una all'altra con $\infty^{\Sigma h(h-1)+r} = \infty^{\Sigma h^2-1}$ trasformazioni lineari distinte, i numeri $h-1$ essendo quelli che compariscono nella caratteristica, cioè le dimensioni degli spazî fondamentali (distinti o sovrapposti).* Nel quale enunciato la proiettività o trasformazione lineare ha il significato di omografia, ma acquista quello di correlazione se in uno dei due spazî si scambiano le denominazioni di punti e di iperpiani.

E qui è opportuna, anche per l'avvenire, l'osservazione seguente. Una omografia fra punti e la stessa omografia fra iperpiani, considerata però inversamente, non solo hanno la stessa caratteristica, come risulta dal n. 15, ove fu appunto osservato che al sovrapporsi di certi spazî fondamentali corrisponde il sovrapporsi delle stelle fondamentali ad esse coniugate, ma hanno altresì gli stessi invarianti assoluti, come appare dal loro significato geometrico detto nel n. 6. Sicchè, per il teorema precedente, vi saranno infinite correlazioni con cui si passa da una omografia alla sua inversa o, come dicesi brevemente, *una omografia è (in infiniti modi) correlativa alla sua inversa.*

E, dopo ciò, si può anche notare che, nel teorema superiore, la proiettività o trasformazione lineare può avere il significato di correlazione (senza fare scambio in alcun spazio delle denominazioni di punto e d'iperpiano) pur di sostituire ad una delle omografie la sua inversa: e ciò si intenda detto anche per il seguito.

21. — Alle proprietà ultime del n. 8 valevoli per una omografia generale, corrispondono, per una particolare, le seguenti.

Una omografia particolare è individuata noti i suoi spazï caratteristici (che, quando gli spazï fondamentali sono semplici, divengono questi spazï medesimi) ed in essi le coppie caratteristiche, cioè i punti del quadro (13) e degli analoghi, ed i loro punti corrispondenti, e noti inoltre gli invarianti assoluti. Ciò segue immediatamente dall'osservare che nel modulo (15) figurano appunto soltanto questi invarianti e le coordinate $\frac{\lambda_1}{\rho'}, \frac{\lambda_2}{\rho'}, \ldots, \frac{\lambda_{h'_1}}{\rho'}, \frac{\mu_1}{\rho_1}, \frac{\mu_2}{\rho_1}, \ldots$ dei punti $B'_0, B'_1, \ldots, B'_{h'_1}, C'_0, C'_1, \ldots$ (sulle rette $A_0B_0, A_1B_1, \ldots, A_{h'_1-1}B_{h'_1-1}, B_0C_0, B_1C_1, \ldots$).

Come per una omografia generale, così per una particolare si possono dare arbitrariamente *la caratteristica* $[(h'-1, \ldots, h'_p-1) \ldots (h^{(m)}-1, \ldots, h^{(m)}_s-1)]$, *le h essendo numeri interi positivi assoggettati alle sole condizioni* $h'+h'_1+\ldots+h'_p+\ldots+h^{(m)}+h^{(m)}_1+\ldots+h^{(m)}_s=r+1$, $h' \geq h'_1 \geq \ldots \geq h'_p$; $\ldots$; $h^{(m)} \geq h^{(m)}_1 \geq \ldots \geq h^{(m)}_s$; *e gli invarianti assoluti*. Per individuare una omografia generale occorre inoltre fissare gli spazï fondamentali (arbitrariamente, ma appartenenti ad S_r): invece per una particolare occorre inoltre *fissare gli spazï caratteristici (arbitrariamente, ma appartenenti ad S_r) ed in essi le $r+1$ coppie caratteristiche*, come si è detto innanzi. Invero, assunti come punti fondamentali i punti (13) e gli analoghi, e considerata l'omografia di modulo (15), è facile verificare a posteriori che questa soddisfa alle condizioni volute. Dapprima si noti che il $D(\rho)$ relativo si ottiene dal modulo sostituendo $\rho'-\rho, \ldots, \rho^{(m)}-\rho$ a $\rho', \ldots, \rho^{(m)}$; ed allora si verifica subito che le sue radici sono appunto $\rho', \ldots, \rho^{(m)}$. Indi si moltiplichino rispettivamente e successivamente le linee di $D(\rho)$ per $x_0, x_1, \ldots, x_r$: sommando ed eguagliando a zero, e poscia ponendo $\rho=\rho', \ldots, \rho=\rho^{(m)}$, si hanno le equazioni degli spazï fondamentali. Così per $\rho=\rho'$ si vede subito che le equazioni si riducono a $x_{h'}=0, \ldots, x_r=0$, cioè si ottiene lo spazio fondamentale $S_{h'-1}$. Per vedere che esso e gli altri sono spazï fondamentali multipli, basta considerare, invece della suddetta omografia, l'omografia generale il cui modulo si ricava da (15) cambiando ρ' in ρ'_1 nel gruppo di h'_1 elementi, ρ' in ρ'_2 nel gruppo di h'_2 elementi ,..., ρ' in

ρ'_p nel gruppo di h'_p elementi ed analogamente per gli altri spazî fondamentali. Facendo successivamente $\rho = \rho'$, $\rho = \rho'_1, \ldots, \rho = \rho'_p$ si trovano spazî fondamentali distinti $S_{h'-1}, S_{h'_1-1}, \ldots, S_{h'_p-1}$: ad es. $S_{h'_1-1}$ è dato dalle equazioni $(\rho'_1 - \rho')\, x_0 + \lambda_1 x_{h'} = 0$, $(\rho'_1 - \rho')\, x_1 + \lambda_2 x_{h'+1} = 0, \ldots$, $(\rho'_1 - \rho')\, x_{h'_1-1} + \lambda_{h'_1} x_{h'+h'_1-1} = 0$, $(\rho'_1 - \rho')\, x_{h'_1} = 0$, $(\rho'_1 - \rho')\, x_{h'_1+1} = 0, \ldots$, $(\rho'_1 - \rho')\, x_{h'-1} = 0$, $\mu_1 x_{h'+h'_1} = 0$, $\mu_2 x_{h'+h'_1+1} = 0, \ldots$ Ora, quando ρ'_p tende a ρ'_{p-1}, ρ'_{p-1} a $\rho'_{p-2}, \ldots$, e ρ'_1 a ρ', lo spazio $S_{h'_p-1}$ tende ad immergersi in $S_{h'_{p-1}-1}$, questo in $S_{h'_{p-2}-1} \ldots$ e finalmente $S_{h'_1-1}$ in $S_{h'-1}$: e così per gli altri spazî fondamentali. Adunque è dimostrato quanto si voleva.

22. — Diamo adesso, come per una omografia generale (n. 10), una costruzione geometrica di una omografia particolare, fissati gli spazî caratteristici $S_{g'-1}, S_{g''-1}, \ldots, S_{g^{(m)}-1}$, in essi le coppie caratteristiche e fissati inoltre gli invarianti assoluti.

Dapprima si costruisca di ogni punto di uno spazio caratteristico, $S_{g'-1}$ ad es., il suo corrispondente. Dall' unico spazio fondamentale di $S_{g'-1}$, che è lo spazio $S_{h'-1}$ dato dai punti $A_0, A_1, \ldots, A_{h'-1}$ del quadro (13), si proiettino i punti $B_0, \ldots, B_{h'_1-1}$, $C_0, \ldots, C_{h'_2-1}, \ldots, D_0, \ldots, D_{h'_p-1}$. Nella omografia da costruire, a questi spazî proiettanti $S_{h'}$ devono corrispondere gli spazî $S'_{h'}$ proiettanti (dallo stesso $S_{h'-1}$) i punti $B'_0, \ldots, B'_{h'_1-1}$, $C'_0, \ldots, C'_{h'_2-1}, \ldots, D'_0, \ldots, D'_{h'_p-1}$ dati come corrispondenti ai punti precedenti: anzi è chiaro che i primi devono essere prospettivi (od omologici) ai secondi, essendo $A_0, \ldots, A_{h'_1-1}$, $B_0, \ldots, B_{h'_2-1}, \ldots$ rispettivamente i centri di prospettiva. Ne segue che se un punto M di $S_{g'-1}$ appartiene ad uno dei suddetti $S_{h'}$, il suo corrispondente M' è senz' altro costruito. Se non appartiene, conduciamo per M in $S_{g'-1}$ un $S_{g'-h'-1}$, indipendente da $S_{h'-1}$, che incontrerà ciascuno di quegli $S_{h'}$ in un punto, e osserviamo che questi punti d'incontro apparterranno all' $S_{g'-h'-1}$ (n. 14, Cap. 1.°). Trovando i corrispondenti di questi punti, avremo l' $S'_{g'-h'-1}$ corrispondente, nel quale deve stare il corrispondente M' di M. Ripetasi questa costruzione ω volte e si avrà uno spazio di dimensione $S_{g'-\omega h'-1}$ contenente M', e, se $\omega \geq \dfrac{g'-1}{h'}$, si avrà proprio M'.

Costruite così le omografie subordinate degli spazî caratteristici $S_{g'-1}, S_{g''-1}, \ldots, S_{g^{(m)}-1}$, si costruisca anche l' omografia subordinata dello spazio S_{g-1}, al quale appartengono gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, S_{h''-1}$,

…, $S_{h-1}^{(m)}$: omografia che è evidentemente una omografia generale con questi spazî fondamentali e cogli invarianti assoluti dati (n. 10).

Dopo ciò si noti che un S_{r-1}, che non passi per $S_{g-1}, S_{h'-1}, \dots, S_{h-1}^{(m)}$ e quindi neppure per $S_{g'-1}, \dots, S_{g-1}^{(m)}$, sega $S_{g-1}, S_{g'-1}, \dots, S_{g-1}^{(m)}$ in $m+1$ spazî che appartengono all'S_{r-1} stesso. Se giacessero infatti in un S_{r-2}, congiunto questo con un altro punto di S_{g-1}, si avrebbe un S_{r-1} contenente S_{g-1} e quindi $S_{h'-1}, \dots, S_{h-1}^{(m)}$ ed allora anche $S_{g'-1}, \dots, S_{g-1}^{(m)}$ (perchè di questi verrebbe a contenere nuovi punti, cioè i nuovi che viene a contenere di $S_{h'-1}, \dots, S_{h-1}^{(m)}$): assurdo. Determinando gli spazî corrispondenti ai suddetti $m+1$ spazî d'intersezione, si trovano quindi $m+1$ spazî appartenenti all'S'_{r-1} corrispondente al considerato S_{r-1}. Di ogni punto (considerando gli S_{r-1} per esso) si sa adunque costruire il corrispondente.

23. — Come applicazione delle cose dette, diamo un'altra dimostrazione del teorema del n. 5. Se una omografia particolare potesse essere ciclica di ordine n, ripetendola n volte, cioè, come dicesi, facendone la potenza n^{esima}, si dovrebbe trovare l'identità. Ora, partendo dal modulo (15), si trova essere ciò impossibile. Infatti la potenza n^{esima} di questo modulo (che, come si sa, è appunto il modulo di detta potenza n^{esima}), quando si attribuiscano, per semplicità, alle costanti (arbitrarie, come vedemmo) $\lambda, \mu, \dots, \tau; \pi, \dots; \dots$ rispettivamente i valori $\rho'; \rho''; \dots$ prende l'aspetto

$$\begin{vmatrix}
n\rho'^n & \cdots & (n-1)\rho'^n & & & & & \\
& n\rho'^n & \cdots & (n-1)\rho'^n & & & & \\
& & \ddots & & \ddots & & & \\
& & & n\rho'^n & & & & \\
& & & & n\rho'^n & \cdots & & \\
& & & & & n\rho'^n & \cdots & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & n\rho^{(m)^n}
\end{vmatrix},$$

che non può evidentemente essere mai, qualsiasi $n(>1)$, il modulo dell' omografia identica.

24. — Ci proponiamo ora di mostrare che il teorema esprimente la condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie sieno proiettivamente identiche (n. 20) è, sotto altra forma, il seguente celebre teorema di Weierstrass [1]):

La condizione necessaria e sufficiente perchè due forme bilineari

$$f=\sum_{ik} a_{ik}x_i\xi_k \quad , \quad \varphi=\sum_{ik} b_{ik}x_i\xi_k$$

si trasformino in altre due

$$f'=\sum_{ik} a'_{ik}X_i\Xi_k \; , \quad \varphi'=\sum_{ik} b'_{ik}X_i\Xi_k$$

per una trasformazione lineare delle x nelle X e per un'altra trasformazione lineare delle ξ nelle Ξ, è che i due determinanti

$$|a_{ik}-\rho b_{ik}| \quad , \quad |a'_{ik}-\rho b'_{ik}| \; ,$$

supposti non identicamente nulli, abbiano gli stessi divisori elementari [2]).

Cominciamo dall'osservare che si può, senza alcuna limitazione, supporre diversi da zero tutti i determinanti $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$, $|a'_{ik}|$, $|b'_{ik}|$. Infatti, se ciò non è, siccome i determinanti $|a_{ik}-\rho b_{ik}|$, $|a'_{ik}-\rho b'_{ik}|$ non sono identicamente nulli, potremo (in infiniti modi) trovare due numeri α,β tali che risulti $|a_{ik}-\alpha b_{ik}|\neq 0$, $|a_{ik}-\beta b_{ik}|\neq 0$, ed insieme $|a'_{ik}-\alpha b'_{ik}|\neq 0$, $|a'_{ik}-\beta b'_{ik}|\neq 0$. Questi determinanti sono quelli delle forme bilineari $f+\alpha\varphi$, $f+\beta\varphi$, $f'+\alpha\varphi'$, $f'+\beta\varphi'$: ed è chiaro che le forme f,φ saranno trasformabili linearmente nelle f',φ' allora ed allora soltanto che le forme $f+\alpha\varphi$ ed $f+\beta\varphi$ saranno trasformabili linearmente nelle $f'+\alpha\varphi'$ ed $f'+\beta\varphi'$. D'altra parte i divisori elementari di

$$D_1(\rho)=|a_{ik}-\alpha b_{ik}-\rho(a_{ik}-\beta b_{ik})|=|(1-\rho)a_{ik}-(\alpha-\rho\beta)b_{ik}|$$

coincidono con quelli di

$$D'_1(\rho)=|a'_{ik}-\alpha b'_{ik}-\rho(a'_{ik}-\rho b'_{ik})|=|(1-\rho)a'_{ik}-(\alpha-\rho\beta)b'_{ik}|$$

se quelli di $|a_{ik}-\rho b_{ik}|$ coincidono con quelli di $|a'_{ik}-\rho b'_{ik}|$, poichè

[1]) *Gesammelte Werke*, II, pag. 19.

[2]) La nozione di divisori elementari fu già posta nel n. 7.

$D_1(\rho)$ e $D'_1(\rho)$ si ricavano da questi determinanti con una stessa sostituzione lineare del parametro ρ.

Adunque il teorema di Weierstrass è dimostrato in generale, se si dimostra nella ipotesi che i determinanti $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$, $|a'_{ik}|$, $|b'_{ik}|$ sieno tutti diversi da zero.

25. — In questa ipotesi poniamo l'enunciato del teorema di Weierstrass sotto un aspetto geometrico. Consideriamo cioè l'omografia

$$(16) \qquad \sum_i a_{ik} x_i = \sum_i b_{ik} y_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, r).$$

Moltiplicando i due membri per ξ_k e sommando, si ha identicamente, qualsiansi le ξ_k (essendo x, y due punti corrispondenti dell'omografia),

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi_k = \sum_{ik} b_{ik} y_i \xi_k ;$$

e quindi anche, effettuando le trasformazioni (a modulo non nullo) dette dal teorema di Weierstrass, cioè la stessa trasformazione lineare delle x_i nelle X_i e delle y_i nelle Y_i, ed altra qualsivoglia delle ξ_k nelle Ξ_k, si ha identicamente, qualunque sieno le Ξ_k,

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi_k = \sum_{ik} b'_{ik} Y_i \Xi_k ,$$

cioè, per i punti X, Y trasformati di x, y, sussistono le relazioni

$$(17) \qquad \sum_i a'_{ik} X_i = \sum_i b'_{ik} Y_i , \quad (k = 0, 1, \ldots, r)$$

che dànno quindi una omografia proiettivamente identica alla (16) [1].

Reciprocamente, se le omografie rappresentate dalle (16), (17) sono proiettivamente identiche, esisterà una trasformazione lineare delle x_i nelle X_i e la stessa delle y_i nelle Y_i che condurrà dall'una all'altra omografia. Se tale trasformazione lineare conduce precisamente dalle formule (16) alle (17), allora essa e la $\xi_k = \Xi_k$ trasformeranno le forme bilineari f, φ nelle f', φ'. Se invece la detta trasformazione conduce dalle (16) alle

[1]) Ovvero (più geometricamente) se le ξ_k sono coordinate di iperpiano in un altro spazio S'_r le $\Sigma a_{ik} x_i \xi_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i \xi_k = 0$ rappresentano due proiettività fra S_r ed S'_r, di cui la (16) è il prodotto. Queste due proiettività si trasformano nelle due $\Sigma a'_{ik} X_i \Xi_k = 0$, $\Sigma b'_{ik} X_i \Xi_k = 0$ delle quali la (17) è pure il prodotto.

$\sum_i \alpha_{is} X_i = \sum_i \beta_{is} Y_i$ $(s=0,1,\dots,r)$ equivalenti alle (17), queste si potranno dedurre da esse moltiplicando per opportune costanti λ_{sk} $(s=0,1,\dots,r)$ e sommando: cioè le (17) si potranno scrivere così:

$$\sum_{is} \alpha_{is} \lambda_{sk} X_i = \sum_{is} \beta_{is} \lambda_{sk} Y_i \qquad (k=0,1,\dots,r);$$

e per passare dalle f, φ alle f', φ' dovrà eseguirsi inoltre la trasformazione

$$\xi_k = \sum_s \lambda_{sk} \Xi_k .$$

Dunque le condizioni necessarie e sufficienti per la trasformabilità delle f, φ nelle f', φ' sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'identità proiettiva delle omografie (16), (17).

26. — Queste ultime condizioni abbiamo trovato (n. 20) consistere nell'eguaglianza degli invarianti assoluti, o meglio (cfr. nota [2]) al n. 7) nell'eguaglianza delle radici dei determinanti $D(\rho)=|a_{ik}-\rho b_{ik}|$, $D'(\rho)=|a'_{ik}-\rho b'_{ik}|$ [1]), ed inoltre nell'avere le due omografie la stessa caratteristica

$$[\,(h'-1\ ,\ h'_1-1\ ,\dots,\ h'_p-1)\dots(h^{(m)}-1\ ,\ h_1^{(m)}-1\ ,\dots,\ h_s^{(m)}-1)\,].$$

Adunque, se si dimostrerà che i numeri h (di ciascuna omografia) individuano i numeri e_i, esponenti dei divisori elementari (del determinante relativo a quell'omografia), e reciprocamente, sarà dimostrato il teorema di Weierstrass.

Considerando ad es. la (16) ed il gruppo caratteristico $(h'-1, h'_1-1, \dots, h'_p-1)$ dello spazio fondamentale corrispondente alla radice ρ' di $D(\rho)=0$, vediamo quali relazioni ci sono fra i numeri h di quel gruppo caratteristico ed i numeri e_i dei divisori elementari relativi a quella radice ρ.

Per questo, consideriamo l'omografia (16) come caso limite di una omografia generale. Sia $D_1(\rho)$ il determinante relativo ad essa ed $S_{h'-1}$

---

[1]) Veramente le equazioni delle omografie furono per tale dimostrazione prese nella forma $x'_k = \sum_i p_{ik} y'_i$, $X'_k = \sum_i q_{ik} Y'_i$, ma le radici, anzi i divisori elementari dei determinanti $D(\rho)$, $D'(\rho)$, non variano per una trasformazione lineare delle (16), (17) (nel caso presente la (16) si trasformi colle $x'_k = \sum_i a_{ik} x_i$, $y'_k = \sum_i a_{ik} y_i$ e analogamente la (17)), in virtù del n. 7. Avvertasi poi che in questo n. 7 è già data una dimostrazione diretta dell'essere *necessaria* la condizione espressa dal teorema di Weierstrass.

$S_{h'_1-1}, \dots, S_{h'_p-1}$, gli spazî fondamentali distinti corrispondenti alle sue radici $\rho', \rho'_1, \dots, \rho'_p$, spazî che tendono a sovrapporsi l'uno all'altro quando quelle radici si facciano tendere a ρ'. Intanto le multiplicità delle radici stesse per $D_1(\rho)$, per i suoi minori di ordine r, per quelli di ordine $r-1$, ... sono date dal seguente specchio:

	$D'(\rho)$	min. di ord. r	min. di ord. $r-1$	...	min. di ord. $r-h'_p+2$	min. di ord. $r-h'_p+1$	...	min. di ord. $r-h'_1+2$	min. di ord. $r-h'_1+1$	...	min. di ord. $r-h'+$
ρ'	h'	$h'-1$	$h'-2$	...	$h'-h'_p+1$	$h'-h'_p$	...	$h'-h'_1+1$	$h'-h'_1$	...	1
ρ'_1	h'_1	h'_1-1	h'_1-2	...	$h'_1-h'_p+1$	$h'_1-h'_p$	...	1	0	...	0
ρ'_2	h'_2	h'_2-1	h'_2-2	...	$h'_2-h'_p+1$	$h'_2-h'_p$	...	0	0	...	0
$\vdots$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
ρ'_{p-1}	h'_{p-1}	$h'_{p-1}-1$	$h'_{p-1}-2$	...	$h'_{p-1}-h'_p+1$	$h'_{p-1}-h'_p$	...	0	0	...	0
ρ'_p	h'_p	h'_p-1	h'_p-2	...	1	0	...	0	0	...	0.

Quando l'omografia generale tende a quella considerata, $D_1(\rho)$ tende al $D(\rho)$ relativo a quest'ultima e quindi la radice ρ' è multipla (riprendendo la notazione adottata nel n. 7) secondo

$$
\begin{array}{llllll}
g' = \mu_1 & = h' & + h'_1 & + \dots + h'_p & \text{per } D(\rho) & \\
\mu_2 & = (h'-1) & + (h'_1-1) & + \dots + (h'_p-1) & \text{per i min. di ord. } r & \text{di } D(\rho) \\
\mu_3 & = (h'-2) & + (h'_1-2) & + \dots + (h'_p-2) & \text{''} \quad r-1 & \text{''} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_{h'_p} & \multicolumn{3}{l}{= (h'-h'_p+1) + (h'_1-h'_p+1) + \dots + (h'_{p-1}-h'_p+1) + 1} & \text{''} \quad r-h'_p+2 & \text{''} \\
\mu_{h'_p+1} & = (h'-h'_p) & + (h'_1-h'_p) & + \dots + (h'_{p-1}-h'_p) & \text{''} \quad r-h'_p+1 & \text{''} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_{h'_1} & = (h'-h'_1+1)+1 & & & \text{''} \quad r-h'_1+2 & \text{''} \\
\mu_{h'_1+1} & = (h'-h'_1) & & & \text{''} \quad r-h'_1+1 & \text{''} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_{h'} & = 1 & & & \text{''} \quad r-h'+2 & \text{''}
\end{array}
$$

Facendo le differenze successive per trovare i numeri e_i, si ottiene

$$\begin{array}{l} e_1 = e_2 = \ldots = e_{h'_p} = p+1 \\ e_{h'_p+1} = e_{h'_p+2} = \ldots = e_{h'_{p-1}} = p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_{h'_2+1} = e_{h'_2+2} = \ldots = e_{h'_1} = 2 \\ e_{h'_1+1} = e_{h'_1+2} = \ldots = e_{h'} = 1 \end{array}$$ [1]:

si trova cioè che h'_p *dei numeri* e_i *(relativi alla radice* ρ'*) sono eguali a* $p+1$, $h'_{p-1} - h'_p$ *eguali a* p, $h'_{p-2} - h'_{p-1}$ *eguali a* $p-1$, ..., $h'_1 - h'_2$ *eguali a* 2 *ed* $h' - h'_1$ *eguali ad* 1. Ne segue immediatamente che viceversa dati i numeri e_i si trovano i numeri $h', h'_1, \ldots, h'_p$: giacchè h' *è il numero di tutti i numeri* e_i, h'_1 *è il numero di tutti i numeri* e_i *meno il numero di quelli eguali ad* 1, h'_2 *è il numero di tutti i numeri* e_i *meno il numero di quelli eguali ad* 1 *e* 2, ..., h'_p *è il numero di tutti i numeri* e_i *eguali a* $p+1$. Il numero $p+1$ indica il massimo valore dei numeri e_i od il numero degli spazî fondamentali coincidenti in $S_{h'-1}$. Se questo spazio è semplice, $p=0$, cioè i divisori elementari relativi sono tutti di 1.° grado, e viceversa.

Il teorema di Weierstrass (n. 24) è adunque dimostrato, anzi completato dall'osservazione (n. 20) che *la trasformazione delle* f, φ *nelle* f', φ' *si può fare in* $\infty^{\Sigma h(h-1)+r} = \infty^{\Sigma h^2 - 1}$ *modi diversi.*

27. — Segre [2]) parte appunto dal detto teorema per classificare le omografie. Dicendo $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{h^{(i)}}^{(i)}$ i gradi dei divisori elementari del determinante $D(\rho)$ corrispondenti alla sua radice $\rho^{(i)}$ (disposti come prima in ordine decrescente di grandezza), egli chiama *caratteristica* della considerata omografia l'insieme di questi numeri così raggruppati:

$$[(e'_1 e'_2 \ldots e'_{h'})(e''_1 e''_2 \ldots e''_{h''}) \ldots (e_1^{(m)} e_2^{(m)} \ldots e_{h^{(m)}}^{(m)})].$$

Le osservazioni del n. precedente mostrano come si passi immedia-

---

[1]) Notisi che resta anche dimostrato essere ciascuno degli esponenti $e_1, \ldots, e_{h'}$ dei divisori elementari eguale o maggiore del successivo.

[2]) *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie* ... (Mem. della R. Accad. dei Lincei, 19 (3), 1884). Cfr. anche il libro di MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Leipzig, Teubner, 1899), nel quale (§ 18) la trattazione di Segre è riportata con alcune modificazioni.

tamente da questa notazione a quella del Predella, da noi adottata, e viceversa. Ponendo nella stessa classe le omografie cogli stessi spazi fondamentali (distinti o sovrapposti) si hanno, ad es., nello spazio ordinario, secondo le due notazioni, i seguenti tipi di omografie:

1.ª classe.

(Predella)	[0000] ,	[(00) 00] ,	[(00) (00)] ,	[(000) 0] ,	[(0000)]
(Segre)	[1111] ,	[211] ,	[22] ,	[31] ,	[4]. → 1 punto 4

molteplicità — 1 punto doppio — 2 punti doppi — 1 punto triplo

2.ª classe.

(Predella)	[100] ,	[(10) 0] ,	[1 (00)] ,	[(100)]
(Segre)	[(11) 11] ,	[(21) 1] ,	[(11) 2] ,	[(31)] .

retta

3.ª classe.

(Predella)	[11] ,	[(11)]
(Segre)	[(11) (11)] ,	[(22)].

4.ª classe.

(Predella)	[20] ,	[(20)]
(Segre)	[(111) 1] ,	[(211)][1].

Per ciascuna notazione il numero degli invarianti assoluti è il numero dei gruppi caratteristici diminuiti di uno.

---

[1]) Veggansi nella Memoria di PREDELLA, citata nella nota al n. 15, le equazioni canoniche di queste omografie scritte secondo la regola data nel n. 19. Cfr. anche la nota al n. 41 dell'altro lavoro, ivi pure citato, del Predella stesso.

CAPITOLO 5.°

Correlazioni di uno spazio S_r in sè.

*1. — Sieno

$$(1) \qquad \rho \xi'_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

le formule che dànno una correlazione (che supponiamo non singolare: onde $|a_{ik}| \neq 0$) di uno spazio in sè, cioè di uno spazio S_r in un altro S'_r ad esso sovrapposto, dicendo x_k le coordinate di un punto di S_r e ξ'_i le coordinate dell' iperpiano corrispondente di S'_r (riferite alla medesima piramide fondamentale ed a punto e iperpiano unità armonici (cfr. n. 4, Cap. 2.°)).

La risoluzione del così detto problema d'incidenza, cioè la determinazione dei punti dello spazio che esistono nei loro iperpiani corrispondenti è immediata. Invero, se un punto x sta nel corrispondente iperpiano ξ' deve essere

$$\sum_i x_i \xi'_i = 0$$

cioè, per le (1),

$$(2) \qquad \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 .$$ la quale scritta per esteso è l'equazione di una quadrica

Siccome un punto x' di S'_r è legato al corrispondente iperpiano ξ di S_r dalle (n. 19, Cap. 3°)

$$(3) \qquad \sigma \xi_i = \sum_k a_{ki} x'_k \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

si perviene alla stessa equazione (2) se si considera un punto x' di S'_r che giace nell'iperpiano ξ corrispondente di S_r. Escludendo che la (2) sia identicamente soddisfatta (cioè che si abbia $a_{ik}+a_{ki}=0$), caso che si tratterà in seguito, e ricordando una denominazione già introdotta (n. 18, Cap. 2.°), si conclude che *il luogo dei punti di S_r o di S'_r che giacciono negli iperpiani ad essi corrispondenti, è la quadrica-luogo* F_2 *rappresentata dall'equazione* (2).

Dualmente si ha la *quadrica-inviluppo* Φ_2 definita dalla

$$\sum_{ik} A_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = 0\ ,$$

ove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante $|a_{ik}|$, come *totalità degli iperpiani di* S_r *o di* S'_r *che passano pei punti ad essi corrispondenti.*

Le F_2, Φ_2 sogliono chiamarsi *quadriche d'incidenza.*

* 2. — Risolviamo ora il problema degli elementi involutorî. *

I due punti corrispondenti ad un iperpiano variabile ξ (considerato sia in S_r, sia in S'_r) descrivono due figure omografiche, nelle quali è chiaro (facendo muovere questo iperpiano intorno ad un punto) che sono pure corrispondenti i due iperpiani che corrispondono ad un punto variabile (considerato sia in S_r, sia in S'_r). Questa omografia, i cui elementi corrispondenti sono quelli che corrispondono ad un medesimo elemento nella correlazione considerata e nella sua inversa, omografia la quale è adunque il quadrato della correlazione, dicesi *appartenente* alla correlazione stessa. I punti e gli iperpiani uniti dell'omografia sono tutti e soli i punti e gli iperpiani involutorî della correlazione, cioè quelli che hanno il medesimo corrispondente in essa e nella sua inversa.

Analiticamente si ha dal confronto delle (1), (3), che l'omografia appartenente ad una correlazione è data dalle formule

$$\sum_k a_{ik}\,x_k = \tau \sum_k a_{ki}\,x'_k \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,r)$$

(e dualmente); e quindi che le coordinate dei punti involutorî (punti uniti dell'omografia) devono soddisfare, indicando con ρ un fattore di proporzionalità non nullo, alle $\sum_k a_{ik}\,x_k = \rho \sum_k a_{ki}\,x_k$, cioè alle

$$\sum_k (a_{ik} - \rho a_{ki})\,x_k = 0 \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,r) \tag{4}$$

(e dualmente per gli iperpiani uniti).

* Un punto dicesi involutorio, quando punto come x e x' ha per corrisp. lo stesso iperpiano e questo si dice pure involutorio.

Adunque i *punti e gli iperpiani involutorî di una correlazione, come punti ed iperpiani uniti della omografia appartenente alla correlazione, si distribuiscono in altrettanti spazî e stelle corrispondentemente alle radici* $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(m)}$ *dell'equazione*

$$D(\rho) = |a_{ik} - \rho a_{ki}| = 0. \tag{5}$$

indipendenti

I detti spazî e stelle di elementi involutorî si diranno *fondamentali* anche per la correlazione.

✳ 3. — Moltiplicando le (4) successivamente per $x_0, x_1, \ldots, x_r$ e sommando, si ottiene

$\sum_{ik} (a_{ik} - \rho a_{ki}) x_k x_i = 0$

$$\sum_{ik} a_{ik} x_k x_i = \rho \sum_{ik} a_{ki} x_k x_i$$

ossia essendo $a_{ik} = a_{ki}$

$$(1 - \rho) \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 .$$

Dunque, se $\rho \neq 1$, le coordinate di un punto involutorio x devono soddisfare alle $\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0$, mentre ciò potrà non avvenire se $\rho = 1$. Ne consegue *che ogni spazio fondamentale di punti della correlazione, che non corrisponda alla radice* $\rho = 1$, *è situato sulla quadrica* F_2.

Dualmente per le stelle fondamentali di iperpiani.

✳ 4. — Prima di esaminare più da vicino le mutue relazioni degli spazî e delle stelle fondamentali, fermiamoci a considerare le *correlazioni involutorie*, cioè le correlazioni nelle quali tutti gli elementi sono involutorî, onde l'omografia appartenente alla correlazione riducesi all'identità.

Dovranno le (4) ridursi ad identità nelle coordinate per un valore di ρ che sia radice della (5); quindi, per tale valore di ρ, dovranno sussistere le $(r+1)^2$ relazioni

$$a_{ik} - \rho a_{ki} = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r).$$

Se uno almeno, a_{ii}, degli elementi principali del determinante $|a_{ik}|$ è diverso da zero, segue subito dalla relazione $a_{ii} - \rho a_{ii} = 0$, compresa nelle precedenti, che deve essere $\rho = 1$. Se invece tutti gli elementi principali sono nulli, qualcuno degli altri elementi del determinante $|a_{ik}|$ deve essere diverso da zero: sia, per es., $a_{ik} \neq 0$ $(i \neq k)$. Allora dalla relazione $a_{ik} = \rho a_{ki}$, compresa nelle precedenti, risulta che ρ ed a_{ki} sono diversi da zero, e quindi, moltiplicando la stessa relazione per l'analoga $a_{ki} = \rho a_{ik}$, pure compresa in quelle, si ottiene $\rho^2 = 1$, donde $\rho = \pm 1$.

Per $\rho = 1$ le suddette $(r+1)^2$ relazioni divengono $a_{ik} - a_{ki} = 0$: per $\rho = -1$, $a_{ik} + a_{ki} = 0$. Si hanno adunque due casi di correlazioni involutorie: in uno il determinante $|a_{ik}|$ è simmetrico, e la correlazione dicesi *sistema polare* o *polarità*, nell'altro lo stesso determinante è emisimmetrico, e la correlazione suol dirsi *sistema nullo* o *correlazione focale*.

Nelle correlazioni involutorie la distinzione dei due spazî sovrapposti S_r, S'_r è superflua. Vi si parla solo di punto ed iperpiano corrispondenti, che diremo, in amendue i casi, *polo* ed *iperpiano polare*. Dalle proprietà generali della correlazione segue subito il cosidetto teorema di reciprocità: — *Se un punto giace nell'iperpiano polare di un altro, viceversa questo giace nell'iperpiano polare di quello* —. I due punti (od iperpiani) si dicono *coniugati* (n. 19, Cap. 3.°).

Nel sistema polare le due quadriche d'incidenza F_2, Φ_2 sono fra loro aderenti (cioè gli iperpiani della seconda sono tangenti alla prima), il che, insieme ad altre proprietà, si vedrà in seguito (Cap. 6.°).

Qui noteremo invece qualche proprietà del sistema nullo.

* 5. — Dapprima osserviamo che nel sistema nullo, la (2) essendo identicamente soddisfatta, ogni punto giace nel suo iperpiano polare. Viceversa, se in una correlazione ogni punto giace nell'iperpiano corrispondente (di S_r o di S'_r), la (2) deve essere una identità e quindi la correlazione è un sistema nullo.

Il determinante $|a_{ik}|$ della trasformazione, che dà il sistema nullo, è emisimmetrico e però, se $r+1$ è dispari, il determinante stesso è nullo [1]), ed in generale di caratteristica r. Adunque, *se un sistema nullo di S_r non è singolare, deve essere r impari*. Se r è pari esso è necessariamente singolare ed in generale di 1.ª specie. Ma si può precisare di più. Abbiasi un sistema nullo singolare di specie h (cioè il determinante $|a_{ik}|$ sia di caratteristica $r-h+1$): esso deve possedere (n. 24, Cap. 3.°), per il fatto della involutorietà, un solo spazio fondamentale S_{h-1}, i cui punti hanno per iperpiani polari tutti gli iperpiani dello spazio, mentre nella stella S_{h-1} deve esistere un sistema nullo non singolare, nel quale un S_h abbia per iperpiano polare quell'iperpiano che è polare dei punti dell'S_h nel considerato sistema nullo. Siccome quella stella è uno spazio

---

[1]) Cfr., ad es., PASCAL, *Determinanti* (Milano, Hoepli, 1897), § 16.

ad $r-h$ dimensioni, per la proprietà precedente, risulta così che *se un sistema nullo di* S_r *è singolare di specie* h, $r-h$ *deve essere impari.*

In un sistema nullo non singolare di S_r (r impari) gli iperpiani polari di un S_k formano un Σ_k ad esso proiettivo. Se S_{r-k-1} è il sostegno di Σ_k, segue subito dal teorema di reciprocità che *ogni punto di uno dei due spazî* S_k, S_{r-k-1} *ha il suo iperpiano polare passante per l'altro.* Questi spazî S_k, S_{r-k-1} si dicono *polari* o *coniugati* nel sistema nullo.

Ai punti di un S_k si facciano corrispondere gli S_{k-1} sezioni dell'S_k cogli iperpiani polari dei punti stessi (o, come può dirsi, si seghi con S_k il sistema nullo): si ottiene evidentemente in S_k un sistema nullo, il quale, se k è pari, è necessariamente singolare, in generale di 1.ª specie; onde i detti S_{k-1} sezione devono passare per un punto e quindi l'S_{r-k-1}, polare di S_k, deve avere questo punto comune collo stesso S_k. Adunque *due spazî polari* S_k, S_{r-k-1}, *se* k *è pari, hanno un punto comune*, ed in generale non più, mentre, se k è impari, non hanno in generale punto comune. Ciò può vedersi anche sulle equazioni del sistema nullo (segando per semplicità con un S_k fondamentale), ad es. sulle formule ridotte o canoniche, che ora ci proponiamo di determinare.

* 6. — Supponiamo dapprima che il sistema nullo di S_r non sia singolare; onde (n. 5) $r=2n+1$. Prendasi un punto qualunque A_0 e sia α_0 il suo iperpiano polare; poi un secondo punto A_1 in α_0 e sia α_1 il suo iperpiano polare passante per A_0, A_1 [1]); indi un terzo punto A_2, indipendente da A_0, A_1, nella intersezione di α_0, α_1, e sia α_2 il suo iperpiano polare passante per A_0, A_1, A_2; e così di seguito, fino a prendere un $(n+1)^{\text{esimo}}$ punto A_n, indipendente da $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ nella intersezione di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ e ad indicare con α_n il suo iperpiano polare passante per $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Questi punti appartengono allora ad uno spazio S_n che è pure spazio d'intersezione di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Dopo ciò, considerisi lo spazio S_{n+1} intersezione di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, che contiene S_n e quindi i punti $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ed in esso si prenda un punto A_{n+1} indipendente da questi punti, cioè esterno ad S_n e quindi ad α_n, e sia α_{n+1} il suo iperpiano polare che passerà per $A_0, \ldots, A_{n-1}$, A_{n+1}, mentre α_n passa per $A_0, \ldots, A_n$ ed $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ passano per $A_0, \ldots, A_{n+1}$. Poi si consideri lo spazio S_{n+2} intersezione di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ che contiene S_{n+1} e quindi i punti $A_0, \ldots, A_{n+1}$ ed in esso si prenda un

[1]) Qui e nel seguito del ragionamento si tenga presente il teorema di reciprocità (n. 4), oltre al fatto del trovarsi ogni polo nel proprio iperpiano polare.

punto A_{n+2} indipendente da questi punti, cioè esterno ad S_{n+1} e quindi ad α_{n-1}, il qual punto sia inoltre della intersezione di α_n, α_{n+1}; il che si può, perchè tale intersezione taglia S_{n+2} in un S_n che non può stare nell' S_{n+1}, altrimenti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ (passando per un medesimo S_n) non sarebbero indipendenti come sono i loro poli: e sia α_{n+2} l' iperpiano polare di A_{n+2}, iperpiano che passerà per $A_0, \ldots, A_{n-2}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$, mentre α_{n+1} passerà per $A_0, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}, A_{n+2}$; α_n per $A_0, \ldots, A_n, A_{n+2}$; α_{n-1} per $A_0, \ldots, A_{n+1}$, e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ per $A_0, \ldots, A_{n+2}$. Indi si consideri lo spazio S_{n+3} intersezione di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}$, che contiene S_{n+2} e quindi i punti $A_0, \ldots, A_{n+2}$, ed in esso si prenda un punto A_{n+3} indipendente da questi punti, cioè esterno ad S_{n+2} e quindi ad α_{n-2}, il qual punto sia inoltre della intersezione di $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$; il che si può, perchè questa intersezione taglia S_{n+3} in un S_{n-1} che non può stare nell' S_{n+2}, altrimenti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$ (passando per un medesimo S_{n-1}) non sarebbero indipendenti come sono i loro poli: e sia α_{n+3} l'iperpiano polare di A_{n+3}, iperpiano che passerà per $A_0, \ldots, A_{n-3}, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$, mentre α_{n+2} passerà per $A_0, \ldots, A_{n-2}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}$; α_{n+1} per $A_0, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}$ A_{n+2}, A_{n+3}; α_n per $A_0, \ldots, A_n, A_{n+2}, A_{n+3}$; α_{n-1} per $A_0, \ldots, A_{n+1}, A_{n+3}$; α_{n-2} per $A_0, \ldots, A_{n+2}$, ed $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}$ per $A_0, \ldots, A_{n+3}$. Così si continui. Si arriverà infine ad α_{2n+1} iperpiano polare di un punto A_{2n+1} (che si potrà scegliere sopra un S_1), il qual iperpiano passerà per tutti i punti A escluso A_0, mentre α_{2n} passerà per tutti i punti A escluso A_1; α_{2n-1} per tutti i punti A escluso A_2; ecc..

Siamo adunque pervenuti a costruire $2n+2$ punti indipendenti $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+1}$, tali che i loro iperpiani polari $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1}$ sono le faccie della piramide da essi determinata e precisamente le faccie opposte ai punti stessi (presi in ordine inverso) $A_{2n+1}, A_{2n}, \ldots, A_0$. Segue immediatamente che, presa questa come piramide fondamentale (e soltanto per una così fatta piramide), le formule del sistema nullo divengono del tipo:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} \rho\xi_0 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad -a_0 x_{2n+1} \\ \rho\xi_1 & = & \qquad\qquad\qquad +a_1 x_{2n} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho\xi_n & = & \qquad\quad \pm a_n x_{n+1} \\ \rho\xi_{n+1} & = & \qquad \mp a_n x_n \\ \ldots & & \ldots\ldots \\ \rho\xi_{2n} & = & -a_1 x_1 \\ \rho\xi_{2n+1} & = & +a_0 x_0 \end{array}\right.$$

In queste formule per le $a_0, a_1, \ldots, a_n$ si possono scegliere numeri arbitrarî (diversi da zero), vincolando la posizione degli elementi unità. Così facendo nelle (6) le sostituzioni $x_i = k_i x'_i$, $\xi_i = \frac{1}{k_i} \xi'_i$ (affinchè la condizione d'incidenza sia sempre $\Sigma x'_i \xi'_i = 0$), al posto di $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vengono $k_0 k_{2n+1} a_0, k_1 k_{2n} a_1, \ldots, k_{n+1} k_n a_n$, che si possono porre proporzionali a quantità qualsiansi (diverse da zero). Per es., possiamo supporre nelle (6) tutte le $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eguali all'unità.

Le equazioni di un sistema nullo (non singolare) si possono scrivere nella forma (6), fissando a piacere le $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (cioè i loro rapporti), in $\infty^{(n+1)(2n+3)} = \infty^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}}$ modi diversi, perchè delle $2n+1$ coordinate del punto unità ne restano così indeterminate $n+1$ ed inoltre perchè i punti $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{2n+1}$ della piramide fondamentale, per la costruzione esposta avanti, si possono scegliere rispettivamente in spazî a $2n+1, 2n, \ldots, n+1, n+1, \ldots, 1$ dimensioni.

I sistemi nulli non singolari di spazî ad r dimensioni sono proiettivamente identici. Ciò segue subito scrivendo per due tali sistemi le (6), ove si prendano per ambedue le medesime arbitrarie $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Allora l'omografia con cui si passa dalla piramide fondamentale e dal punto unità di uno spazio alla piramide fondamentale ed al punto unità dell'altro spazio conduce da un sistema nullo all'altro. Conforme a ciò che si è detto sopra, esistono $\infty^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}}$ omografie (ed altrettante correlazioni) con cui si può passare da un sistema nullo ad un altro.

* 7. — Supponiamo ora che il sistema nullo di S_r sia singolare di specie h, onde si può porre (n. 5) $r-h=2n+1$. Se S_{h-1} è lo spazio singolare del sistema nullo, nella stella che ha per sostegno questo spazio si ha un sistema nullo non singolare: quindi è pure non singolare il sistema nullo che si ottiene segando con un S_{r-h} indipendente dall'S_{h-1}, cioè facendo corrispondere un S_0 ed un S_{r-h-1} dell'S_{r-h}, i quali, congiunti coll'S_{h-1}, dànno un S_h ed un S_{r-1} corrispondenti della stella. Cosicchè, scelti in S_{r-h} i vertici $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+1}$ della piramide fondamentale, giusta la costruzione del n. precedente, ed i vertici $A_{2n+2}, \ldots, A_r$ comunque in S_{h-1}, le formule del considerato sistema nullo in S_r devono assumere l'aspetto:

$$
\begin{aligned}
\rho\xi_0 &= && && -a_0 x_{2n+1} \\
\rho\xi_1 &= && && +a_1 x_{2n} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\rho\xi_{2n} &= && -a_1 x_1 \\
\rho\xi_{2n+1} &= +a_0 x_0 \\
\rho\xi_{2n+2} &= 0 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\rho\xi_r &= 0\,,
\end{aligned}
$$

sulle quali si possono fare considerazioni analoghe a quelle del n. precedente. In particolare si ha che i *sistemi nulli singolari della stessa specie h degli spazî ad r dimensioni sono proiettivamente identici.*

* 8. — Dalla considerazione dei sistemi nulli discende naturalmente quella dei complessi lineari di rette di S_r, dei quali faremo qui un breve cenno.

Sieno x, x' due punti coniugati in un sistema nullo qualsiasi (cfr. n. 4), cioè $x'(x)$ giaccia nell'iperpiano corrispondente ad $x(x')$, o, ciò che è lo stesso, la retta xx' esista nella intersezione degli iperpiani corrispondenti ad x, x'. Le coordinate dei punti x, x' soddisfano ad una equazione

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, x'_k = 0 \qquad (a_{ik} = -a_{ki})\,;$$

dalla quale segue che le $\frac{r(r+1)}{2}$ coordinate (omogenee) della retta xx', $p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i$ (vincolate, come vedemmo nel n. 17, Cap. 2.°, da $\frac{r(r+1)}{2} - (2r-2) - 1 = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ relazioni quadratiche) soddisfano alla

$$\sum_{ik} a_{ik}\, p_{ik} = 0\,.$$

Viceversa, si può ritornare da questa alla precedente. Dicendo *complesso lineare di rette* la totalità ∞^{2r-3} delle rette, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione lineare, si vede adunque che un tale complesso è *la totalità delle rette congiungenti le coppie di punti coniugati in un sistema nullo,* cioè congiungenti i punti dello spazio coi punti degli iperpiani ad essi rispettivamente corrispondenti nel sistema nullo.

Un complesso lineare è, in generale, individuato da $\frac{r(r+1)}{2} - 1 = \frac{(r-1)(r+2)}{2}$ *delle sue rette,* quanti sono i rapporti indipendenti dei coefficienti a_{ik} della sua equazione.

Come per un sistema nullo (cfr. n. 5), così per un complesso lineare generale (cioè dato da una equazione i cui coefficienti a_{ik} sieno presi genericamente) devono distinguersi i casi di r pari e di r impari. Se r è impari il sistema nullo non è singolare e quindi le rette del complesso uscenti da *ogni* punto di S_r riempiono un S_{r-1}.

Invece, se r è pari, il sistema nullo è singolare di 1.ª specie, cioè contiene un punto fondamentale (coniugato a tutti i punti di S_r); quindi fanno parte del complesso tutte le rette di S_r partenti da quel punto, che dicesi *centro*. Tutte le rette del complesso che escono da un altro punto qualunque X sono in un S_{r-1} che passa per il centro, nel quale S_{r-1} stanno pure tutte le rette del complesso uscenti da ogni punto della retta congiungente X col centro. Ne segue facilmente che ogni retta del complesso proiettata dal centro dà un S_2 tutto di rette del complesso. Cosicchè, proiettando il complesso dal centro S_0 sopra un S_{r-1}, non passante per esso, si ottengono in questo ∞^{2r-5} rette, costituenti un complesso lineare generale, perchè, come è evidente, questo nasce dal sistema nullo che si ottiene come sezione, mediante l'S_{r-1}, del sistema nullo non singolare che si ha nella stella S_0. Si può dire quindi che $\frac{(r-1)(r+2)}{2}$ rette di S_r (r pari) individuano in generale un punto, dal quale esse sono proiettate in altrettante rette di un complesso lineare di S_{r-1}.

Comunque sia r, pari od impari, quando $r-h$ è impari, un sistema nullo può essere singolare di specie h, cioè avere un S_{h-1} fondamentale. Si ha allora un complesso, al quale appartengono tutte le rette di S_r che incontrano questo S_{h-1}, che diremo ancora *centro;* e si trovano proprietà analoghe a quelle dette sopra per $h=1$ e che tralasciamo di enunciare. Noteremo soltanto che, se $h-1=r-2$, il complesso lineare è costituito da tutte e sole le rette che incontrano il centro S_{r-2}. Così, per $r=2$, si ha il fascio di rette (solo caso possibile), per $r=3$ ed $r=4$, si hanno i complessi costituiti dalle rette incontranti un S_1 ed un S_2 (soli casi particolari rispettivamente possibili) [1].

Dalle equazioni ridotte di un complesso (n. 6, 7), nelle quali i coefficienti $a_0, -a_1, \ldots, \mp a_n$ si indichino con $b_0, b_1, \ldots, b_n$, si trae poi che l'equazione di un complesso lineare si può scrivere sempre nella forma

$$b_0 p_{0.2n+1} + b_1 p_{1.2n} + \ldots + b_n p_{n.n+1} = 0$$

---

[1]) Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni,* (Atti dell'Ist. ven., 2 (7), 1891, pag. 855).

avendo posto $r-h=2n+1$ ed intendendo che h possa avere anche il valore zero, nel qual caso si ha il complesso lineare generale dello spazio a $2n+1$ dimensioni.

9. — Rivolgasi ora di nuovo l'attenzione alle correlazioni, non involutorie nè singolari di uno spazio in sè, per approfondirne lo studio.

Dicasi γ una tale correlazione ed ω l'omografia ad essa appartenente. Questa essendo il quadrato della correlazione, cioè $\omega=\gamma^2$, si ha che $\omega\gamma=\gamma^3=\gamma\,.\,\gamma^2=\gamma\omega$ e quindi *una correlazione e l'omografia che le appartiene sono permutabili*, cioè ciascuna è trasformabile in sè mediante l'altra ($\omega=\gamma^{-1}\omega\gamma\,,\;\gamma=\omega^{-1}\gamma\,\omega$).

Ora una omografia ω che sia permutabile con una correlazione γ gode per questo solo fatto di notevoli proprietà. Dicasi γ' una correlazione che trasformi ω nella sua inversa ω^{-1} (n. 20, Cap. 4.°); allora, poichè la correlazione γ, per l'ipotesi, trasforma ω^{-1} (come ω) in sè, è evidente che l'omografia $\gamma'\gamma$, prodotto delle due correlazioni, trasforma ω in ω^{-1}. Dunque *ogni omografia ω permutabile con una correlazione γ è omografica (in infiniti modi) alla sua inversa ω^{-1}.*

Segue, dicendo $S_{h'-1}\,, S_{h''-1}\,,\dots, S_{h^{(m)}-1}$ gli spazî fondamentali ed $S_{r-h'}$, $S_{r-h''}\,,\dots, S_{r-h^{(m)}}$ i sostegni delle stelle fondamentali di ω (spazî e stelle pure fondamentali per ω^{-1}), che, se $x\,,y$ sono due punti corrispondenti di ω e $z'\,,z''\,,\dots,z^{(m)}$ i punti d'incontro di xy con $S_{r-h'}\,,S_{r-h''}\,,S_{r-h^{(m)}}$, i punti $x\,,y\,,z'\,,z''\,,\dots,z^{(m)}$ devono costituire (n. 6, Cap. 4.°) una forma proiettiva ai punti stessi, altrimenti disposti, ad $x\,,y$ corrispondendo rispettivamente $y\,,x$. Si ha cioè una involuzione di cui (xy) è una coppia e di cui le altre coppie debbono essere formate dai punti $z'\,,z''\,,\dots,z^{(m)}$, eccezion fatta eventualmente di uno o due di questi punti che fossero uniti per l'involuzione stessa. Se, ad es., $(z'z'')$ è una coppia di tale involuzione, ciò significa che nella trasformazione omografica $\gamma'\gamma$ di ω in ω^{-1} la stella $\Sigma_{h'-1}$ di sostegno $S_{r-h'}$ si è trasformata in $\Sigma_{h''-1}$ di sostegno $S_{r-h''}$ e questa in quella, e parimenti che si sono scambiati $S_{h'-1}\,,S_{h''-1}$. Onde il gruppo caratteristico di $S_{h'-1}$ (o di $\Sigma_{h'-1}$) dovrà essere eguale a quello di $S_{h''-1}$ (o di $\Sigma_{h''-1}$): ed inoltre, essendo (n. 2) $\rho'\,,\rho''$ le radici di $D(\rho)=0$ corrispondenti agli spazî fondamentali $S_{h'-1}\,,S_{h''-1}$, cioè (Cfr. il citato n. 6, Cap. 4.°) $\rho'\,,\rho''$ le coordinate dei punti $z'\,,z''$ sulla congiungente i punti $x\,,y$, assunti questi come $0\,,\infty$, deve essere $\rho'\rho''=1$ (nota seconda al n. 3, Cap. 3.°). Concludiamo che *per una omografia ω permutabile con una correlazione il $D(\rho)$ deve essere a radici reciproche, oltre, eventualmente, alle* *radici* $+1$, -1, *e che due spazî (o stelle) fondamentali corrispondenti a radici reciproche devono avere eguali gruppi caratteristici.*

Chiameremo *associati* due spazî (o stelle) fondamentali di ω, corrispondenti a radici reciproche $\rho^{(i)}, \frac{1}{\rho^{(i)}}$ e li indicheremo con $S_{h-1}^{(i)}, S'^{(i)}_{h-1}$ (o $\Sigma_{h-1}^{(i)}$, $\Sigma'^{(i)}_{h-1}$). Per la correlazione γ', due spazî associati $S_{h-1}^{(i)}, S'^{(i)}_{h-1}$ si mutano rispettivamente in $\Sigma_{h-1}^{(i)}, \Sigma'^{(i)}_{h-1}$ e, per l'omografia $\gamma'\gamma$, gli stessi spazî si mutano, secondo ciò che dicemmo innanzi, in $S'^{(i)}_{h-1}, S_{h-1}^{(i)}$: quindi, per la correlazione γ, le stelle $\Sigma_{h-1}^{(i)}, \Sigma'^{(i)}_{h-1}$ si mutano ordinatamente negli spazî $S'^{(i)}_{h-1}, S_{h-1}^{(i)}$, e viceversa. Adunque *uno spazio fondamentale* $S_{h-1}^{(i)}$ *dell'omografia* ω *(non corrispondente alla radice* $+1$ *o* -1*) si trasforma, per la correlazione* γ *permutabile con* ω, *nella stella* $\Sigma'^{(i)}_{h-1}$ *che è coniugata allo spazio* $S'^{(i)}_{h-1}$ *associato ad* $S_{h-1}^{(i)}$, *e viceversa.* E così $S'^{(i)}_{h-1}$ si trasforma nella stella $\Sigma_{h-1}^{(i)}$ coniugata ad $S_{h-1}^{(i)}$, e viceversa. Avvertasi che $S_{h-1}^{(i)}$ (n. 4, Cap. 4.°) esiste nel sostegno $S'^{(i)}_{r-h}$ della stella $\Sigma'^{(i)}_{h-1}$ (e così $S'^{(i)}_{h-1}$ in $S_{r-h}^{(i)}$).

10. — Venendo al caso nostro di una omografia ω appartenente ad una correlazione γ (non involutoria, nè singolare), *si hanno* adunque, *in* ω, *coppie di spazî (ed analogamente di stelle) fondamentali associati* $S_{h'-1}$, $S'_{h'-1}$; $S_{h''-1}$, $S'_{h''-1}$; ...; *i due spazî di ciascuna coppia essendo di eguale gruppo caratteristico e corrispondenti a radici reciproche* $\rho', \frac{1}{\rho'}$; $\rho'', \frac{1}{\rho''}$; ...; *di* $D(\rho)$, oltre gli spazî fondamentali (esistenti o no), S_{k-1}, S_{l-1}, corrispondenti rispettivamente alle radici -1, $+1$: spazî (e stelle) che sono detti fondamentali anche per γ (n. 2). I punti di uno spazio $S_{h-1}^{(i)}$ hanno nella correlazione γ per corrispondenti (in doppio modo) gli iperpiani della stella $\Sigma'^{(i)}_{h-1}$ coniugata in ω ad $S'^{(i)}_{h-1}$ (e viceversa), *i quali iperpiani passano per lo stesso spazio* $S_{h-1}^{(i)}$: mentre ciò non è in generale per i due spazî S_{k-1}, S_{l-1}, avendosi soltanto che ogni punto di S_{k-1} esiste nell'iperpiano corrispondente (in doppio modo) al punto, perchè S_{k-1} sta sulla quadrica F_2 (n. 3). Anzi, se S_{k-1}, S_{l-1} sono spazî semplici di ω e quindi non segano i sostegni delle stelle $\Sigma_{k-1}, \Sigma_{l-1}$ (loro corrispondenti in γ), è chiaro che si hanno in S_{k-1}, S_{l-1} due correlazioni involutorie non singolari (ad ogni punto corrispondendo rispettivamente le sezioni S_{k-2}, S_{l-2} coll'iperpiano corrispondente) che sono rispettivamente un sistema nullo ed un sistema polare: onde sègue che in quel caso k deve essere pari [1]).

---

[1]) E segue anche, quando esiste S_{k-1}, che *la quadrica* F_2 *è specializzata* k *volte ed ha* S_{k-1} *per spazio doppio* (Cfr. n. 5, Cap. 6): giacchè F_2 ha per equazione

11. — Possiamo distinguere le correlazioni in *generali* e *particolari* come le omografie che ad esse appartengono.

Di una correlazione generale a cui spettino gli spazï $S_{h'-1}$, $S'_{h'-1}$; $S_{h''-1}$, $S'_{h''-1}$; ...; $S_{h^{(m)}-1}$, $S'_{h^{(m)}-1}$; S_{k-1}; S_{l-1} corrispondenti alle radici ρ', $\frac{1}{\rho'}$; ρ'', $\frac{1}{\rho''}$; ...; $\rho^{(m)}$, $\frac{1}{\rho^{(m)}}$; -1; $+1$ del determinante $D(\rho)$, si può il modulo in forma ridotta o canonica scrivere così [2]):

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\begin{matrix} & & & & & \rho' \\ & & & & \iddots & \\ & & & \rho' & {\scriptstyle h'\text{ elem.}} & \\ & & 1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ 1 & {\scriptstyle h'\text{ elem.}} & & & & \end{matrix} & & & & & \\
& \begin{matrix} & & & & & \rho'' \\ & & & & \iddots & \\ & & & \rho'' & {\scriptstyle h''\text{ elem.}} & \\ & & 1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ 1 & {\scriptstyle h''\text{ elem.}} & & & & \end{matrix} & & & & \\
& & \ddots & & & \\
& & & \begin{matrix} & & & & & \rho^{(m)} \\ & & & & \iddots & \\ & & & \rho^{(m)} & {\scriptstyle h^{(m)}\text{ elem.}} & \\ & & 1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ 1 & {\scriptstyle h^{(m)}\text{ elem.}} & & & & \end{matrix} & & \\
& & & & \begin{matrix} & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & \iddots & {\scriptstyle k\text{ (pari) elem.}} & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \\ -1 & & & & & \end{matrix} & \\
& & & & & \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots {\scriptstyle\; l\text{ elem.}} & \\ & & & 1 \end{matrix}
\end{array}\right|$$

$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, ossia $\Sigma(a_{ik} + a_{ki}) x_i x_k = 0$ e quindi il suo discriminante è $|a_{ik} + a_{ki}|$, cioè quello che diventa $D(\rho)$ per $\rho = -1$.

[2]) S'intende, come altrove, che sono nulli tutti i termini non indicati con lettere, numeri o punteggiate grosse e quelli delle punteggiate fine, le quali servono solo per allineamenti.

Infatti l'omografia appartenente alla correlazione è una omografia generale coi detti spazï fondamentali (semplici) corrispondenti alle dette radici del $D(\rho)$, perchè il suo modulo risulta coi termini tutti nulli, tranne quelli della diagonale principale che sono ordinatamente

$$\rho' \dots \rho' \; \frac{1}{\rho'} \dots \frac{1}{\rho'} \; \rho'' \dots \rho'' \; \frac{1}{\rho''} \dots \frac{1}{\rho''} \dots \rho^{(m)} \dots \rho^{(m)} \; \frac{1}{\rho^{(m)}} \dots \frac{1}{\rho^{(m)}} \; -1 \; -1 \; \dots \; -1 \, 1 \, 1 \; \dots \; 1 \, .$$

Notisi che non solo deve essere k pari, ma, se r è pari, deve essere $l \neq 0$ ed impari. All'infuori di queste restrizioni, i numeri (interi) $h', h'', \dots, k, l$ ed i valori (non nulli) di $\rho', \rho'', \dots$ si possono prendere arbitrariamente.

12. — Aggiungiamo alcune osservazioni su quelle correlazioni particolari che si possono considerare come casi limiti delle generali (coi medesimi spazï fondamentali).

Uno spazio fondamentale (multiplo) di una tale correlazione particolare può nascere in due modi diversi. Può avvenire, mantenendo le indicazioni date avanti, che gli spazï $S_{h'-1}, S_{h''-1}, S_{h'''-1}, \dots$ cadano successivamente ciascuno nel precedente ($h' > h'' > h''' > \dots$), e quindi che si abbia $\rho' = \rho'' = \rho''' = \dots$; ma allora deve essere anche $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho'''} = \dots$ e però devono sovrapporsi anche gli spazï $S'_{h'-1}, S'_{h''-1}, S'_{h'''-1}, \dots$: si trova quindi che, se esiste uno spazio fondamentale corrispondente ad una radice ρ' diversa da ± 1, avente il gruppo caratteristico

$$(h'-1 \; , \; h''-1 \; , \; h'''-1 \; , \dots) \, , \tag{7}$$

esiste anche un altro spazio fondamentale corrispondente ad $\frac{1}{\rho'}$ collo stesso gruppo caratteristico (7), come già sappiamo dover essere per una correlazione qualunque.

Oppure può darsi che uno spazio fondamentale della correlazione particolare nasca da ciò che lo spazio S_{h-1} (così indichiamo indifferentemente lo spazio S_{l-1} o S_{k-1}), corrispondente a $+1$ o -1 di una correlazione generale, cada in uno spazio $S_{h^{(l)}-1}$ ed allora con questo deve coincidere anche lo spazio associato $S'_{h^{(l)}-1}$ $\left(\text{per essere } \rho^{(l)} = \frac{1}{\rho^{(l)}}\right)$ e parimenti lo spazio ottenuto cada in un altro $S_{h^{(l-1)}-1}$ col quale deve pure coincidere l'associato $S'_{h^{(l-1)}-1}$, e così di seguito; e poi che in S_{h-1} cadano altre coppie di spazï associati: cioè insomma che il gruppo caratteristico corrispondente allo spazio fondamentale sia

$$(8)\quad (h'-1\,,h'-1\,,h''-1,h''-1\,,\ldots,h^{(l)}-1\,,h^{(l)}-1\,,h-1\,,h^{(l+1)}-1\,,h^{(l+1)}-1\,,\ldots,h^{(l+m)}-1,h^{(l+m)}-$$

Può darsi solo il primo fatto ($m=0$), ovvero solo il secondo ($l=0$) o nessuno dei due ($l=0\,,m=0$) se lo spazio S_{h-1} è semplice per la correlazione particolare: e può anche darsi che non esista nella correlazione generale lo spazio S_{h-1}, corrispondente a $+1$ o -1, e che questo nasca dal sovrapporsi di coppie di spazï associati ($l=0\,,h=0$, o $m=0\,,h=0$). Ma qui si presenta ora un'osservazione che deriva dal seguente notevole teorema di Kronecher [1]: — *I divisori elementari del determinante caratteristico* $D(\rho)$ *di una correlazione qualunque corrispondenti a radici reciproche, diverse da* ± 1, *devono essere a coppie di egual grado, quelli di grado impari corrispondenti alla radice* -1 *a coppie di egual grado e quelli di grado pari corrispondenti alla radice* $+1$ *pure a coppie di egual grado* [2]).

La prima parte di questo teorema è soddisfatta senz'altro dal presentarsi a coppie i gruppi caratteristici (7), mentre la seconda parte (quella relativa alle radici ± 1) stabilisce una restrizione per i numeri $h'\,,h''\,,\ldots$ del gruppo caratteristico (8). In vero questo gruppo, scritto cogli esponenti dei divisori elementari (secondo la regola del n. 26, Cap. 4.°) è

$$(\overbrace{222\ldots}^{h'-h''}\;\overbrace{444\ldots}^{h''-h'''}\;\ldots\overbrace{2l\,,2l\,,\ldots}^{h^{(l)}-h}\;\overbrace{2l+1\,,2l+1\,,\ldots}^{h-h^{(l+1)}}\;\overbrace{2l+3\,,2l+3\,,\ldots}^{h^{(l+1)}-h^{(l+2)}}\ldots$$

$$\ldots\overbrace{2l+2m-1\,,2l+2m-1\,,\ldots}^{h^{(l+m-1)}-h^{(l+m)}}\;\overbrace{2l+2m+1\,,2l+2m+1\,,\ldots}^{h^{(l+m)}});$$

colla quale scrittura indichiamo che esistono $h'-h''$ divisori elementari di grado $=2$, $h''-h'''$ di grado $=4$, ecc. Dunque, per la detta seconda parte del teorema di Kronecker, se il gruppo (8) corrisponde alla radice

[1]) Berl. Monatsberichte, 1874, pag. 440 e seg. — Cfr. anche Segre, *Ricerche sulle omografie e correlazioni...*, (Mem. dell'Accad. di Torino, 37(2), 1885) n. 10.

[2]) Per il segno dato precedentemente a ρ, confrontando coi citati lavori di Kronecker e Segre, bisogna scambiare $+1$ con -1.

-1, devono essere numeri pari le differenze $h - h^{(l+1)}, \dots, h^{(l+m-1)} - h^{(l+m)}$ ed il numero $h^{(l+m)}$, ossia pari tutti i numeri $h, h^{(l+1)}, \dots, h^{(l+m)}$; e, se corrisponde alla radice $+1$, devono invece essere numeri pari le differenze $h' - h'', \dots, h^{(l)} - h$.

Si può dimostrare che viceversa ogni correlazione particolare che possegga soltanto spazî fondamentali di gruppi caratteristici (7), (8), colle restrizioni ora dette per il gruppo (8), necessarie per l'esistenza della correlazione, è limite di una correlazione generale (avente distinti gli spazî fondamentali che in quella sono in vario modo sovrapposti) [1].

Ricordiamo pure il teorema, dovuto a Kronecker, valevole per due correlazioni qualunque: — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due correlazioni sieno proiettivamente identiche è che sieno tali le omografie rispettivamente appartenenti ad esse.*

13. — Terminiamo l'argomento delle correlazioni di uno spazio in sè colla proprietà seguente. Vedemmo (cfr. n. 9) che due punti x, y corrispondenti ad un iperpiano in una correlazione γ e nella sua inversa, e le coppie dei punti d'intersezione della loro congiungente xy coi sostegni delle stelle associate formano una involuzione; correlativamente sono coppie di una involuzione i due iperpiani ξ, η corrispondenti in γ ad un punto e le coppie d'iperpiani che proiettano dalla loro intersezione $\xi\eta$ gli spazî associati $S_{h-1}^{(i)}, S'^{(i)}_{h-1}$. Queste involuzioni, possono mettersi in relazione con una certa serie di correlazioni.

Rappresentando γ colla $\Sigma a_{ik} x'_i x_k = 0$, onde la sua inversa sarà rappresentata dalla $\Sigma a_{ki} x'_i x_k = 0$, la serie di correlazioni, che si vuol considerare, è quella data, al variare di ρ, dalla

$$\sum_{ik} a_{ik} x'_i x_k - \rho \sum_{ik} a_{ki} x'_i x_k = \sum_{ik} (a_{ik} - \rho a_{ki}) x'_i x_k = 0,$$

---

[1] La verità di questa affermazione e dell'esistenza di correlazioni particolari (non soddisfacenti alle dette condizioni) che non si possono ritenere come limiti di correlazioni generali (cogli stessi spazî fondamentali) è messa in luce nel lavoro del dott. S. MEDICI, *Sulle omografie e sulle correlazioni* ..., (Giornale di Matematiche, 1906): nel quale si trovano pure dimostrati in forma geometrica i due teoremi di KRONECKER del presente n. coll'aiuto delle equazioni canoniche di una correlazione qualunque (dedotte riducendo la questione ai tipi cosidetti elementari). Nel lavoro stesso si troveranno inoltre varie indicazioni bibliografiche sull'argomento trattato.

e che si può chiamare opportunamente *fascio* di correlazioni (individuato da una correlazione γ e dalla sua inversa). È subito visto (cfr. n. 1) che le quadriche d'incidenza di una correlazione generica del fascio sono le stesse F_2, Φ_2 di γ e che sono pure gli stessi gli spazî e le stelle fondamentali.

Inoltre ogni correlazione del fascio (data dal valore ρ) ha la sua inversa nel fascio stesso (data dal valore reciproco $\left.\frac{1}{\rho}\right)$. Si hanno così infinite coppie di correlazioni, che sono le coppie di una involuzione nel fascio stesso; involuzione, i cui elementi doppi corrispondono ai valori di $\rho = \pm 1$. Tali sono le correlazioni rappresentate dalle due equazioni

$$(9) \qquad \sum_{ik} (a_{ik} - a_{ki}) x'_i x_k = 0 \ , \ \sum_{ik} (a_{ik} + a_{ki}) x'_i x_k = 0 \, ;$$

di cui la prima rappresenta un sistema nullo e la seconda un sistema polare (quello relativo ad F_2 (cfr. nota del n. 10)); le quali sono correlazioni involutorie singolari cogli spazî fondamentali S_{l-1}, S_{k-1}, se questi esistono (per essere i determinanti $|a_{ik} - a_{ki}|$, $|a_{ik} + a_{ki}|$ valori di $D(\rho)$ per $\rho = \pm 1$). Sono poi coppie dell'involuzione le coppie di correlazioni date dai valori $\rho^{(i)}$, $\frac{1}{\rho^{(i)}}$, correlazioni (inverse) singolari aventi per spazî fondamentali $S_{h-1}^{(i)}$, $S'^{(i)}_{h-1}$.

Cosicchè, se di un punto (o di un iperpiano) si prendono gli iperpiani (o punti) corrispondenti in ogni correlazione del fascio e nella sua inversa si ha una involuzione di iperpiani (o di punti), che è manifestamente quella indicata al principio di questo n..

Di un punto (ad es.) si considerino i due iperpiani corrispondenti in γ e nella sua inversa ed i due iperpiani corrispondenti nelle correlazioni involutorie (9); si hanno, per le cose dette, quattro iperpiani armonici. Dunque, *presi i due iperpiani corrispondenti ad un punto in una correlazione e nella sua inversa, l'iperpiano del loro fascio che passa per il punto e l'iperpiano coniugato armonico di questo rispetto a quei due corrispondono rispettivamente al punto stesso in un determinato sistema nullo ed in un determinato sistema polare: e dualmente* [1]).

---

[1]) Questo teorema è caso particolarissimo di un teorema generale (vedasi Berzolari, *Sulle corrispondenze algebriche*..., (Rendiconti dei Lincei, 4 (5), 1895) n. 3.

Capitolo 6.°

Quadriche.

1. — Vedemmo nel Cap. precedente che il sistema polare rappresentato dall'equazione

$$(1) \qquad \sum_{ik} a_{ik} x'_i x_k = 0$$

dove $a_{ik} = a_{ki}$ ed $|a_{ik}| \neq 0$, ha per quadrica dei punti incidenti quella data dall'equazione

$$(2) \qquad \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 .$$

Viceversa, perchè l'equazione di una quadrica qualunque (già definita nel n. 18 Cap. 2) può sempre scriversi nella forma (2), con $a_{ik} = a_{ki}$, si ha che *ogni quadrica si può ritenere come quadrica dei punti incidenti di un determinato sistema polare.*

Le (2), (1), se vi si fa $x_{k+1} = \ldots = x_r = 0$ e $x'_{k+1} = \ldots = x'_r = 0$, quando non sieno identicamente soddisfatte, dànno le equazioni di una quadrica dello spazio fondamentale $S_k = A_0 A_1 \ldots A_k$ e del relativo sistema polare. Adunque *uno spazio lineare* S_k, *quando non stia sopra una quadrica, sega questa ed il relativo sistema polare in una quadrica e nel relativo sistema polare dell'* S_k *medesimo.*

Se due quadriche, rappresentate dall'eguagliare a zero due forme $\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$, , $\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k$, sono identiche, queste forme stesse devono essere identiche a meno di un fattore. Quindi essendo $\binom{r+1}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{r(r+3)}{2} + 1$ il numero dei coefficienti a_{ik} che compariscono nella (2), si dice che le quadriche dello spazio S_r sono $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$, anzi, la (2) contenendo quei coefficienti linearmente, si dice di più che *costituiscono un sistema lineare di dimensione* $\frac{r(r+3)}{2}$. Per $\frac{r(r+3)}{2}$ punti generici dello spazio passa una ed una sola quadrica [1]).

In seguito una quadrica di S_r si indicherà con V^2_{r-1} (perchè, come si dirà nel Cap. 9, è caratterizzata dall'essere una varietà algebrica ad $r-1$ dimensioni e di 2.° ordine).

* 2. — Se x, x' sono due punti di S_r, un punto della retta che li congiunge ha le coordinate $\lambda x_i + \mu x'_i$: sostituendo queste coordinate nella (2), si ottiene l'equazione del 2.° ordine in $\frac{\mu}{\lambda}$

$$(3) \qquad \lambda^2 \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k + 2\lambda\mu \sum_{ik} a_{ik} x_i x'_k + \mu^2 \sum_{ik} a_{ik} x'_i x'_k = 0,$$

le cui radici sostituite nelle espressioni delle coordinate stesse, dànno i due punti in cui la V^2_{r-1} rappresentata dalla (2) è incontrata dalla retta xy. Se i due punti x, x' sono coniugati (cfr. n. 19, Cap. 3.°) nel sistema polare (1), la precedente equazione ha le radici eguali e di segno contrario, e reciprocamente. Onde, *se due punti sono coniugati in un sistema polare, essi sono separati armonicamente dai due punti ove la loro congiungente taglia la quadrica* V^2_{r-1} *dei punti incidenti in quel sistema.* Due tali punti si dicono *coniugati* anche rispetto a questa quadrica e l'iperpiano polare di un punto x nel sistema polare medesimo, detto anche *iperpiano polare di x rispetto a* V^2_{r-1}, viene definito come il luogo dei punti coniugati di x rispetto alla V^2_{r-1}, cioè *dei coniugati armonici di x rispetto alle intersezioni di* V^2_{r-1} *colle trasversali uscenti dal punto x.*

$\sum a_{ik} x_i x'_k = 0$

Due punti coniugati rispetto ad una V^2_{r-1} lo sono anche rispetto alla V^2_{k-1} sezione di essa con un S_k passante per quei due punti, e reciprocamente.

* 3. — Se un punto x giace sopra V^2_{r-1} ed x' è un punto qualunque ad esso coniugato (cioè soddisfacente la (1)), l'equazione (3) per determinare i punti ove la loro congiungente taglia la quadrica diviene

$$\mu^2 \sum_{ik} a_{ik} x'_i x'_k = 0:$$

[1]) Per altre proprietà che si collegano alla precedente vedasi il Cap. 8 sulle ipersuperficie in generale.

Se due punti sono coniugati e giacciono sulla quadrica, la retta che li congiunge giace per intero sulla quadrica. La (3) diviene infatti un'identità.
Se due punti coniugati [illegible] non giacciono sulla quadrica,

quindi, o il punto x' non giace su V^2_{r-1} ed allora $\mu^2 = 0$, cioè le due intersezioni della retta xx' colla V^2_{r-1} coincidono in x, od il punto x' giace sulla quadrica ed allora $\frac{\mu}{\lambda}$ è indeterminato e quindi tutta la retta xx' giace sopra V^2_{r-1}. Dicendo *tangente* una retta che incontra la quadrica in due punti coincidenti, risulta adunque che l'*iperpiano polare di un punto della quadrica contiene il punto medesimo* (*) *e tutte le rette tangenti alla quadrica nel punto, e contiene inoltre tutte le rette e quindi anche tutti gli spazi lineari situati sulla quadrica e passanti per il punto.*

Per queste proprietà l'iperpiano polare di un punto della quadrica dicesi *tangente* alla quadrica in quel punto. Per il teorema di reciprocità (n. 4, Cap. 5) gli iperpiani tangenti e quindi *le tangenti da un* S_0 *ad una quadrica hanno i loro punti di contatto nell'iperpiano polare di quell'* S_0.

Se x, x' sono due punti di V^2_{r-1}, coniugati rispetto ad essa, il piano tangente (polare) in x passa per x' (e reciprocamente): onde xx' giace per intero su V^2_{r-1} (**). Dunque *ogni* S_1 *congiungente due punti di una quadrica, coniugati rispetto ad essa, giace sulla quadrica.* Ne discende subito (notando che, se un punto è coniugato a più punti indipendenti, lo è a tutti i punti dello spazio da essi individuato) che, *se* k *punti indipendenti stanno su* V^2_{r-1} *e sono a due a due coniugati, l'* S_{k-1} *da essi determinato giace per intero sulla quadrica.*

✳ 4. — Condizione necessaria e sufficiente perchè l'iperpiano ξ polare di un punto x (di equazione (1), se le x'_i sono le coordinate correnti) passi per x è manifestamente che questo punto sia di V^2_{r-1}. Ne segue che per le coordinate ξ_i di un iperpiano tangente alla quadrica nel punto x si ha il sistema di equazioni $\sum_k \xi_k x_k = 0$, $\rho \xi_i = \sum_k a_{ik} x_k$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, dalle quali, eliminando le x_k, trovasi

$$\sum_{ik} A_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \tag{4}$$

indicando con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante $|a_{ik}|$ supposto $\neq 0$. Ciò significa che *gli iperpiani tangenti di una quadrica luogo costituiscono una quadrica inviluppo,* la quale si dice *aderente* a quella: e correlativamente.

Le due quadriche F_2, Φ_2 (n. 1, Cap. 5.°) di una correlazione sono

(*) Va ricordato che la quadrica è la quadrica d'incidenza (Per ogni punto di essa l'iperpiano polare contiene il polo).
(**) Infatti preso un punto qualunque y della retta xx' il suo iperpiano polare dovendo passare per x e per x', passa anche per y e quindi y sta sulla quadrica.

quindi per un sistema polare due quadriche aderenti. La reciproca non è vera [1]).

5. — Le cose esposte nei n. 1-3 sussistono anche se $|a_{ik}|=0$. Se questo determinante è di caratteristica $r-h+1$, il sistema polare definito dalla (1) dicesi *singolare di specie h* (cfr. n. 24, Cap. 3.°) e la quadrica rappresentata dalla (2), che si indicherà ancora con V^2_{r-1}, si dice *quadrica h volte specializzata o cono quadrico di specie h*. Il sistema polare (per essere involutorio) ha un solo spazio singolare S_{h-1} dato dalle equazioni (riducibili ad $r-h+1$ indipendenti)

$$\sum_k a_{ik}x_k=0 \qquad (i=0,1,\ldots,r), \tag{5}$$

i cui primi membri sono (soppresso il fattore 2) le derivate parziali rispetto alle coordinate del primo membro dell'equazione (2) della quadrica.

Ogni punto di S_{h-1} *ha per iperpiano polare un iperpiano qualunque di* S_r, *mentre ogni altro punto di* S_r *ha un iperpiano polare determinato, passante per* S_{h-1}, *che non varia quando il punto varia in un* S_h *passante pure per l'* S_{h-1}. Inoltre questo spazio singolare non solo *giace sulla* V^2_{r-1} ma gode della proprietà che *ogni retta uscente da un suo punto od ha ivi un incontro bipunto colla* V^2_{r-1} *o giace per intero su di essa.* Ciò risulta subito dalla (3) che, per le (5), si riduce a $\mu^2=0$ se x' non appartiene alla quadrica, e diviene indeterminata se vi appartiene.

Perciò ogni punto di S_{h-1} si dice *punto doppio* della quadrica e lo spazio S_{h-1} si dice *spazio doppio* della quadrica medesima. Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto sia doppio per una quadrica è che l'iperpiano polare del punto sia indeterminato, ovvero che il punto abbia per coniugati tutti i punti dello spazio.

Da ciò che si è detto sopra segue che ogni S_h congiungente S_{h-1} con un punto della quadrica V^2_{r-1} giace su essa; e di più, ricordando che tutti i punti di quell'S_h hanno lo stesso iperpiano polare, si ha, per il n. 3, che *tutti i punti di un* S_h *passante per* S_{h-1} *e giacente sulla quadrica* V^2_{r-1} *hanno lo stesso iperpiano tangente (contenente* S_h*).*

---

[1]) Ad es., in S_3 il prodotto della polarità rispetto ad una quadrica e di una omografia (biassiale) che abbia per rette fondamentali due rette dello stesso sistema della quadrica è una correlazione non involutoria (se tale non è l'omografia) avente per punti e piani d'incidenza i punti ed i piani tangenti della quadrica stessa.

Perchè una quadrica si specializzi h volte, a quante condizioni devono essere assoggettati i coefficienti a_{ik} della sua equazione (2)? Siccome la caratteristica del determinante $|a_{ik}|$ deve essere $r-h+1$, occorre e basta che si annullino tutti i suoi minori di ordine $r-h+2$, che sono intorno ad un minore principale (ad es.) di ordine $r-h+1$ [1]). Per essere $|a_{ik}|$ simmetrico, queste condizioni sono $h+\frac{h^2-h}{2}=\frac{h(h+1)}{2}$. Tale è adunque il numero richiesto.

6. — Per il già citato n. 24, Cap. 3.°, la corrispondenza involutoria che si ha nella stella di sostegno S_{h-1} è un sistema polare non singolare. Segando con un S_{r-h} indipendente dall'S_{h-1} si ha un sistema polare non singolare, la cui quadrica è quindi una V^2_{r-h-1} non specializzata, ed in questo sistema polare ad ogni punto corrisponde l'S_{r-h-1} sezione, mediante S_{r-h}, dell'iperpiano polare del punto stesso nel sistema polare singolare dato. Per conseguenza la V^2_{r-h-1} è sezione della V^2_{r-1}, o questa proiezione di quella. Adunque *una quadrica con un S_{h-1} doppio può ottenersi proiettando da esso una quadrica non specializzata di un S_{r-h}.*

Ovvero si possono considerare gli S_h costituenti la quadrica V^2_{r-1}, nella geometria della stella che ha per sostegno S_{h-1}, come gli elementi di una quadrica non specializzata, la quale fu chiamata da Segre [2]) *quadrica nucleo.* Così una quadrica specializzata $r-1$ volte, cioè con un S_{r-2} doppio, che evidentemente è costituita dai punti di due S_{r-1} passanti per quell'S_{r-2}, ha per quadrica nucleo il sistema di questi due iperpiani (quadrica non specializzata di un Σ_1).

S_{r-h-1}

Correlativamente, gli S_{r-1} passanti per gli S_{r-h} tangenti ad una quadrica non specializzata di uno spazio S_{r-h+1}, subordinato ad S_r, costituiscono una quadrica inviluppo di S_r (di cui quella è quadrica nucleo) specializzata h volte, cioè con un Σ_{h-1} doppio avente per sostegno lo spazio S_{r-h+1}.

Se poi si tien conto di ciò che ogni S_{r-1} per un punto doppio di una quadrica luogo si può considerare come iperpiano tangente, è chiaro che una quadrica luogo specializzata una volta, cioè con un solo punto doppio, ha, nello spazio ambiente S_r, per quadrica inviluppo questo punto (come sostegno di un Σ_{r-1}) contato due volte, quadrica specializzata come invi-

---

[1]) Cfr. nota al n. 11, cap. 2.°.

[2]) *Studio sulle quadriche...*, (Memorie dell'Acc. di Torino, 36 (2), 1884).

luppo r volte; e che inoltre una quadrica luogo specializzata più di una volta, ha per quadrica inviluppo in S_r una quadrica indeterminata. Ciò si accorda con semplici considerazioni algebriche [1]. Si tralascia di enunciare le osservazioni correlative.

7. — Rispetto ad una quadrica V^2_{r-1} si dice $(r+1)^{\text{upla}}$ *polare* ogni sistema di $r+1$ punti indipendenti, tale che ciascun punto abbia per iperpiano polare quello determinato dagli r punti rimanenti. Per costruire una $(r+1)^{\text{upla}}$ polare rispetto ad una quadrica non specializzata si può prendere comunque un primo punto $x^{(0)}$ in S_r, poi un secondo punto $x^{(1)}$ nell'iperpiano polare di $x^{(0)}$, un terzo $x^{(2)}$ nell'intersezione degli iperpiani polari di $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, e così di seguito, fino ad $x^{(r)}$ che è il punto d'intersezione degli iperpiani polari di $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}$. È facile vedere che gli $r+1$ punti così costruiti sono indipendenti, se sono presi successivamente fuori di V^2_{r-1} (cioè $x^{(0)}$ fuori di V^2_{r-1}, $x^{(1)}$ fuori di V^2_{r-2} sezione di V^2_{r-1} coll'iperpiano polare di $x^{(0)}$, ecc.). Dalla costruzione stessa risulta che le $(r+1)^{\text{uple}}$ polari (di una quadrica non specializzata) sono $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}}$.

Se la quadrica è h volte specializzata, si procederà come prima, prendendo di un punto qualunque $x^{(0)}$ di S_r l'iperpiano polare, poi in questo un punto qualunque $x^{(1)}$ e così via, fino a che, arrivati al punto $x^{(r-h)}$, l'intersezione degli iperpiani polari dei punti considerati sarà appunto l'S_{h-1} doppio della quadrica. Allora i rimanenti punti $x^{(r-h+1)}, \dots, x^{(r)}$ dell'$(r+1)^{\text{upla}}$ saranno h punti indipendenti arbitrarî di questo spazio S_{h-1}. In questo caso le $(r+1)^{\text{uple}}$ polari sono adunque $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}+\frac{h(h-1)}{2}}$.

8. — Assumendo i punti di una $(r+1)^{\text{upla}}$ polare come vertici della piramide di riferimento, le equazioni *(ridotte o canoniche)* della polarità assumono l'aspetto

$$\rho\,\xi_i = a_i x_i \qquad (i=0,1,\dots,r)$$

ove h delle a_i sono nulle se la polarità è singolare di specie h.

---

[1] Infatti la (4) è identicamente soddisfatta se la quadrica è specializzata più di una volta. Si riduce invece al quadrato dell'equazione del punto doppio della quadrica se questa è specializzata una volta, giacchè, se y_i sono le coordinate di quel punto, dalle (5) si ricava

$$y_0 : y_1 : \dots : y_r = A_{i1} : A_{i2} : \dots : A_{ir} \qquad (i=0,1,\dots,r),$$

donde moltiplicando successivamente per $y_0, y_1, \dots y_r$

$$\rho\, y_i\, y_j = A_{ij},$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità.

Quindi la relazione fra due punti coniugati x, x' diventa

$$a_0 x_0 x'_0 + a_1 x_1 x'_1 + \ldots + a_r x_r x'_r = 0$$

e l'equazione della quadrica prende la forma *(ridotta* o *canonica)*

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 = 0,$$

ricordando sempre che h delle a_i sono nulle, se la quadrica è specializzata h volte (ad es. $a_{r-h+1} = \ldots = a_r = 0$ se l'S_{h-1} doppio della quadrica è $\equiv A_{r-h+1} \ldots A_r$). Variando gli elementi unità, le a_i (non nulle) possono anche supporsi tutte eguali ad uno.

L'infinità dei modi nei quali si possono ottenere tali equazioni *ridotte* o *canoniche* è quella indicata nel n. 7. Dalle equazioni stesse discende l'importante risultato: — *Tutte le quadriche non specializzate sono proiettivamente identiche, e tali sono pure tutte le quadriche specializzate lo stesso numero di volte* —. Invero, se due quadriche hanno le equazioni canoniche $a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \ldots = 0$, $b_0 x_0^2 + b_1 x_1^2 + \ldots = 0$, si passa dall'una all'altra colla sostituzione $x_i = \sqrt{\dfrac{b_i}{a_i}}\, y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ se nessuno dei coefficienti a_i, b_i è nullo; ovvero colla sostituzione $x_i = \sqrt{\dfrac{b_i}{a_i}}\, y_i$ $(i=0, 1, \ldots, r-h)$, $x_i = y_i$ $(i = r-h+1, \ldots, r)$ se soltanto $a_0, \ldots, a_{r-h}$, $b_0, \ldots, b_{r-h}$ (ad es.) sono diversi da zero (intendendo di prendere in amendue i casi valori determinati pei radicali). L'infinità delle proiettività colle quali si può passare da una quadrica ad un'altra è nuovamente quella calcolata nel n. 7. (24)

9. — Dimostriamo una notevole ed elegante proposizione sulle quadriche *reali* (cioè date da equazioni a coefficienti reali) relativa alla loro classificazione dal punto di vista delle collineazioni *reali* (cioè date pure da formule a coefficienti reali).

Scriviamo (come sempre si può, variando, se occorre, le indicazioni delle coordinate) le equazioni canoniche (n. 8) di una quadrica reale, riferita a due $(r+1)^{\text{uple}}$ reali, nella forma:

$$a_0 x_0^2 + \ldots + a_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r x_r^2 = 0,$$

$$b_0 y_0^2 + \ldots + b_{k'} y_{k'}^2 - \beta_{k'+1} y_{k'+1}^2 - \ldots - \beta_r y_r^2 = 0,$$

ove le a, b, α, β sono tutte positive, non nulle (intendendo che si ponga $r-h$ al posto di r se la quadrica è specializzata h volte). Si ha la proprietà che i due numeri k, $r-k$ devono essere eguali ai due numeri

$k' \,.\, r-k'$: precisamente se, per le formule di trasformazione con cui si passa dall'una all'altra $(r+1)^{\text{upla}}$, si passa dall'uno all'altro dei primi membri delle dette equazioni (a meno anche di un fattore positivo), ossia si ha l'identità

$$a_0 x_0^2 + \ldots + a_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r x_r^2 \equiv b_0 y_0^2 + \ldots + b_{k'} y_{k'}^2 - \beta_{k'+1} y_{k'+1}^2 - \ldots - \beta_r y_r^2 ,$$

deve essere $k = k'$, $r-k = r-k'$. Si ha cioè il *teorema* o *legge d'inerzia* di Sylwester: — *Il numero dei coefficienti positivi e quello dei coefficienti negativi nell'equazione di una quadrica reale, riferita ad una* $(r+1)^{\text{upla}}$ *polare reale, sono due numeri costanti al variare di questa* $(r+1)^{\text{upla}}$ —. Infatti la precedente identità può scriversi

$$a_0 x_0^2 + \ldots + a_k x_k^2 + \beta_{k'+1} y_{k'+1}^2 + \ldots + \beta_r y_r^2 \equiv b_0 y_0^2 + \ldots + b_{k'} y_{k'}^2 + \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 .$$

Ora se fosse $k < k'$, nel primo membro di questa identità vi sarebbero $k+1+r-k' \leq r$ termini e però esisterebbe un punto (almeno), di cui le coordinate annullerebbero questi termini, cioè renderebbero

$$x_0 = \ldots = x_k = y_{k'+1} = \ldots = y_r = 0 .$$

Le stesse coordinate dovrebbero allora annullare anche il 2.° membro della stessa identità, cioè (i termini di esso essendo tutti positivi) dovrebbero rendere $y_0 = \ldots = y_{k'} = x_{k+1} = \ldots = x_r = 0$: sicchè si avrebbe l'assurdo che tutte le x (o le y) del punto considerato dovrebbero essere nulle. Dunque non può essere $k < k'$; analogamente non può essere $k' < k$: onde $k = k'$, come si è affermato.

Supponiamo $k+1 \leq r-k$ e la quadrica reale che si considera non specializzata. Dalla sua equazione

(2,5) $$a_0 x_0^2 + \ldots + a_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r x_r^2 = 0$$

segue che le rette $A_0 A_{k+1}$, $A_1 A_{k+2}$, ..., $A_k A_{2k+1}$ della piramide fondamentale segano la quadrica in coppie di punti U_0, V_0; U_1, V_1; ...; U_k, V_k, di

$\pm\sqrt{\frac{a_k}{\alpha_{k+1}}}$ cui le coordinate non nulle sono date rispettivamente dalle $\frac{x_{k+1}}{x_0} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{a_0}}$; $\frac{x_{k+2}}{x_1} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{k+2}}{a_1}}$; ...; $\frac{x_{2k+1}}{x_k} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{2k+1}}{a_k}}$. Quindi quei punti sono reali e $k+1$ di essi, ottenuti prendendo un punto da ciascuna coppia, ad es., $U_0, U_1, \ldots, U_k$, sono indipendenti e a due a due coniugati rispetto alla quadrica. Dunque (n. 3) questi $k+1$ punti determinano un S_k giacente sulla quadrica stessa: nè può su questa esistere spazio reale di dimensione $> k$, perchè un tale spazio segherebbe in un punto (almeno) ogni S_{r-k-1}, in particolare l'S_{r-k-1} fondamentale $= A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_r$, mentre questo non può contenere punti reali della quadrica considerata, perchè la sega nella quadrica di equazione $\gamma_{k+1} x_{k+1}^2 + \ldots + \gamma_r x_r^2 = 0$, priva di punti reali.

Adunque proprietà caratteristica di una quadrica reale non specializzata, la quale, nella equazione canonica relativa ad una $(r+1)^{\text{upla}}$ polare reale, ha $k+1$ termini di un segno ed $r-k$ del segno opposto, ove $k+1 \leq r-k$, è che *gli spazî reali di massima dimensione in essa contenuti sono degli* S_k [1]. Segue subito, per proiezione, che di una quadrica reale specializzata h volte, gli spazî reali massimi sono degli S_{k+h}, se $k+1$ è il minor numero di termini collo stesso segno della sua equazione canonica.

Nella detta proprietà caratteristica si ha una ragione geometrica della legge d'inerzia. Inoltre le quadriche reali (non specializzate od egualmente specializzate), si possono classificare, relativamente alle proiettività reali, secondo il numero che dà la dimensione degli spazî reali massimi esistenti in esse.

10. — Ritornando ad una quadrica qualunque (reale o no) intenderemo in seguito, se non si avverta il contrario, che la quadrica sia non specializzata, giacchè dalle proprietà di questa si passa immediatamente per proiezione a quelle di una quadrica specializzata.

Dalla considerazione del sistema polare si ricava subito che *gli iperpiani polari dei punti di un* S_k *rispetto ad una quadrica* V_{r-1}^2, *costituiscono un* Σ_k *riferito proiettivamente all'* S_k; e, detto S_{r-k-1} il sostegno di Σ_k, si ha (come nel n. 5, Cap. 5, per un sistema nullo) che i due spazî S_k, S_{r-k-1} sono in questa relazione che *ogni punto di uno è coniugato ad ogni punto dell'altro ed ogni iperpiano per uno ad ogni iperpiano per l'altro.* Due tali spazî si dicono *polari* o *coniugati* rispetto alla quadrica.

Manifestamente ogni S_1 appoggiato a due spazî polari sega la quadrica in due punti coniugati armonici rispetto ai due punti di appoggio: quindi (n. 13, Cap. 4.°) *una* V_{r-1}^2 *si trasforma in sè per l'omografia involutoria di* S_r *che ha per spazî fondamentali due suoi spazî polari.*

[1]) Cfr. nota seconda a pag. 439 della Memoria di Segre, *Étude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double...*, (Math. Ann., 24, 1884).

(26) Per essere gli iperpiani polari dei punti di una quadrica V^2_{r-1} suoi iperpiani tangenti, si ha che *di due spazî polari uno* S_k (*od* S_{r-k-1}) *taglia* V^2_{r-1} *in una* V^2_{k-1} (*o* V^2_{r-k-2}) *tale che gli iperpiani tangenti nei suoi punti a* V^2_{r-1} *passano tutti per l'altro*, S_{r-k-1} (*o* S_k).

Si noti anche (cfr. n. 7, Cap. 2.°) che, se uno spazio S_a contiene uno spazio S_b, lo spazio S_{r-a-1} polare di quello è contenuto nello spazio S_{r-b-1} polare di questo.

(27) 11. — Due spazî polari S_k, S_{r-k-1} si taglino in uno spazio S_a. Allora ogni punto di S_a non solo è coniugato a sè stesso, onde S_a giace in V^2_{r-1}, ma è anche coniugato ad ogni punto di S_k (o di S_{r-k-1}) rispetto alla V^2_{r-1} e quindi rispetto alla sua sezione V^2_{k-1} (o V^2_{r-k-2}) coll'S_k (o S_{r-k-1}). Segue che S_a è doppio per V^2_{k-1} (o V^2_{r-k-2}). Viceversa, se uno spazio S_a è doppio per la V^2_{k-1}, sezione di V^2_{r-1} con uno spazio S_k, ogni punto di S_a è coniugato ad ogni punto di S_k rispetto a V^2_{k-1} e quindi rispetto a V^2_{r-1}, e però S_a giace nello spazio S_{r-k-1} polare di S_k.

Quando uno spazio S_k seghi V^2_{r-1} in una V^2_{k-1} con spazio doppio ed S_a sia questo spazio doppio o uno spazio in esso contenuto; ovvero, ciò che si è mostrato essere lo stesso, quando lo spazio S_k abbia comune con lo spazio polare S_{r-k-1} lo spazio S_a (questo spazio essendo o no intersezione di S_k ed S_{r-k-1}), diremo che S_k *è tangente* o *tocca* la quadrica V^2_{r-1} in S_a. Naturalmente deve essere $a \leq k$, $a \leq r-k-1$: quindi un S_{r-1}, per es., non può toccare una V^2_{r-1} che in un S_0; un S_{r-2} non può toccarla che in un S_0 o in un S_1; ecc.. *Lo spazio* S_{r-a-1} *polare (tangente) di uno spazio* S_a *di* V^2_{r-1} *contiene tutti gli spazî lineare di questa passanti per* S_a, ciò essendo per gli iperpiani polari (tangenti) di tutti i punti dell'S_a.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio S_k *sia tangente in uno spazio* S_a *di* V^2_{r-1} *è che* S_k *passi per* S_a *e sia contenuto nello spazio* S_{r-a-1} *polare (tangente) di* S_a: perchè, se S_k passa per S_a e giace in S_{r-a-1}, il suo spazio polare S_{r-k-1} giace in S_{r-a-1} e passa per S_a; e, se S_k, S_{r-k-1} passano per S_a, gli spazî rispettivamente polari S_{r-k-1}, S_k giacciono in S_{r-a-1}.

Notisi ancora che, se lo spazio S_b giace nello spazio S_a di V^2_{r-1}, lo spazio S_{r-b-1} polare (tangente) di S_b passa per lo spazio S_{r-a-1} polare (tangente) di S_a; e viceversa, se uno spazio S_{r-b-1} passa per lo spazio S_{r-a-1} polare (tangente) di S_a, tocca in un S_b di S_a, perchè lo spazio S_b polare di S_{r-b-1} giace in S_a e quindi in S_{r-b-1}. I due spazî S_{r-b-1} ed S_b

sono spazî corrispondenti nella proiettività fra la stella di sostegno S_{r-a-1} e lo spazio S_a (n. 10).

12. — Fissiamo analiticamente le condizioni cui deve soddisfare uno spazio S_m di S_r dato dalle equazioni:

$$x_i = \lambda_0 x_i^{(0)} + \dots + \lambda_m x_i^{(m)} \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

perchè tocchi in un S_a (e non in uno spazio superiore) la quadrica V^2_{r-1} rappresentata dalla equazione:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0 .$$

Per questo basterà esprimere che la quadrica V^2_{m-1} secondo cui S_m taglia V^2_{r-1} si specializza $a+1$ volte. Tale quadrica, essendo le $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ coordinate omogenee di punto in S_m, vi è rappresentata dalla equazione

$$\sum_{ik} a_{ik} (\lambda_0 x_i^{(0)} + \dots + \lambda_m x_i^{(m)}) (\lambda_0 x_k^{(0)} + \dots + \lambda_m x_k^{(m)}) = 0 ,$$

cioè da

$$\sum_{rs} \alpha_{rs} \lambda_r \lambda_s = 0 ,$$

avendo posto

$$\alpha_{rs} = \sum_{ik} a_{ik} x_i^{(r)} x_k^{(s)} \qquad (r, s = 0, 1, \dots, m) .$$

Dunque le dette condizioni sono quelle per le quali è $m-a$ la caratteristica del determinante $|\alpha_{rs}|$; e quindi sono (n. 5) $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$ condizioni.

13. — **Ad una forma importante si arriva estendendo il procedimento del n. 4, cioè esprimendo analiticamente la condizione a cui deve soddisfare un S_m perchè tocchi V^2_{r-1} in un punto, quando si consideri S_m come sostegno di un Σ_{r-m-1}. Allora esso sarà rappresentato da equazioni del tipo**

$$\xi_i = \lambda_0 \xi_i^{(0)} + \dots + \lambda_{r-m-1} \xi_i^{(r-m-1)} \qquad (i = 0, 1, \dots, r) ,$$

e, se toccherà la quadrica in un punto, dovrà essere contenuto nell'iperpiano polare del punto stesso: cioè esisteranno valori delle λ per le quali i primi membri delle precedenti equazioni saranno le coordinate di questo iperpiano. Sicchè, dicendo x_k le coordinate del punto di contatto di S_m

(polo dell'iperpiano) si avranno le

$$\sum_k a_{ik}\, x_k = \lambda_0 \xi_i^{(0)} + \dots + \lambda_{r-m-1} \xi_i^{(r-m-1)} \qquad (i = 0\,, 1\,, \dots, r)\,,$$

le quali dovranno coesistere con le altre

$$\begin{gathered} \xi_0^{(0)} x_0 + \dots + \xi_r^{(0)} x_r = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_0^{(r-m-1)} x_0 + \dots + \xi_r^{(r-m-1)} x_r = 0\,, \end{gathered}$$

che esprimono la condizione necessaria e sufficiente perchè il punto x sia contenuto nello spazio S_m considerato. Eliminando le $x_0, \dots, x_r$, $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-m-1}$ si ha la condizione richiesta

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} & \dots\, a_{0r} & \xi_0^{(0)} \dots \xi_0^{(r-m-1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r0} & \dots\, a_{rr} & \xi_r^{(0)} \dots \xi_r^{(r-m-1)} \\ \xi_0^{(0)} & \dots\, \xi_r^{(0)} & 0 \quad \dots\, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_0^{(r-m-1)} & \dots\, \xi_r^{(r-m-1)} & 0 \quad \dots\, 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ [1]}:$$

equazione che, svolgendo opportunamente il primo membro, si vede essere *una equazione quadratica nelle coordinate dell'* S_m (cfr. n. 16, cap. 2.°), *i cui coefficienti sono i minori di ordine* $m+1$ *del discriminante* $|a_{ik}|$ *della*

---

[1] L'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \dots\, a_{0r} & \xi_0^{(0)} \dots \xi_0^{(r-m-1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r0} & \dots\, a_{rr} & \xi_r^{(0)} \dots \xi_r^{(r-m-1)} \\ \eta_0^{(0)} & \dots\, \eta_r^{(0)} & 0 \quad \dots\, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_0^{(r-m-1)} & \dots\, \eta_r^{(r-m-1)} & 0 \quad \dots\, 0 \end{vmatrix} = 0$$

significa che i due S_m determinati rispettivamente dagli iperpiani $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(r-m-1)}$; $\eta^{(0)}, \dots, \eta^{(r-m-1)}$ godono della proprietà che un punto dell'uno ha il suo iperpiano polare passante per l'altro. Ciò si dimostra in modo identico a quello usato sopra.

quadrica. Con trasformazioni analitiche è pur facile verificare che la (6) non differisce dalla equazione data nel n. 12 (fattovi $a=0$) [1]).

L'equazione (6) essendo la condizione necessaria e sufficiente perchè un S_m tocchi una quadrica V^2_{r-1}, abbiamo così trovata, oltre la (4), la equazione di V^2_{r-1} in coordinate di S_{r-2} tangenti ($m=r-2$), ..., in coordinate di S_1 tangenti ($m=1$). Per $m=0$ si ha di nuovo l'equazione di V^2_{r-1}.

Di più si avverta che, se V^2_{r-1} è specializzata $r-m+1$ volte, ogni S_m di S_r la tocca almeno in un punto (nel punto ove S_m incontra lo spazio doppio S_{r-m}); quindi, in tal caso la (6) deve essere identicamente soddisfatta. Ciò segue direttamente dall'osservazione fatta che i coefficienti della (6) sono i minori d'ordine $m+1$ del discriminante $|a_{ik}|$, minori che sono nulli se questo è di caratteristica m. Siamo adunque in grado di esprimere la proprietà proiettiva dell'essere una quadrica specializzata un dato numero di volte mediante la condizione dell'annullarsi identico di un controvariante (il primo membro della (6)).

14. — Passiamo alla determinazione degli spazî lineari contenuti in una quadrica V^2_{r-1}. Poichè ogni spazio S_a situato sopra V^2_{r-1} è contenuto nel suo spazio polare S_{r-a-1}, deve essere $a \leq r-a-1$ e quindi $a \leq \frac{r-2}{2}$ o $a \leq \frac{r-1}{2}$, secondochè r è pari o impari. Ora mostriamo che questi limiti superiori sono in ambedue i casi effettivamente raggiunti.

Per questo prendiamo un punto qualunque $x^{(0)}$ situato sopra V^2_{r-1} e sia $S^{(0)}_{r-1}$ il suo iperpiano polare, passante per $x^{(0)}$ e secante V^2_{r-1} in una V^2_{r-2} con punto doppio in $x^{(0)}$. Se $x^{(1)}$ è un punto di V^2_{r-2}, distinto da $x^{(0)}$, l'$S_1 = x^{(0)}x^{(1)}$ giace su V^2_{r-1} (n. 3) ed è doppio per la quadrica V^2_{r-3} sezione di V^2_{r-1} coll'S_{r-2} polare (tangente) di quell'S_1. Su questa V^2_{r-3} si prenda un nuovo punto $x^{(2)}$ indipendente da $x^{(0)}, x^{(1)}$ (cioè esterno all'S_1): l'$S_2 = x^{(0)}x^{(1)}x^{(2)}$ giace pure su V^2_{r-1} (n. 3) ed è doppio per la V^2_{r-4} sezione di V^2_{r-1} collo spazio S_{r-3} polare (tangente) di S_2, e così si continui successivamente.

Supposto $r=2q$, un tal processo si può spingere fino ad un punto $x^{(q-1)}$. Si ha cioè uno spazio $S_{q-1} = x^{(0)}x^{(1)} \dots x^{(q-1)}$ di V^2_{r-1}, il cui spazio polare S_q sega V^2_{r-1} in una quadrica avente il detto S_{q-1} doppio e quindi

---

[1]) Cfr. D'OVIDIO, *Le funzioni metriche* ..., (Memorie dell'Accad. dei Lincei, 1 (3), 1877).

in una quadrica formata da questo S_{q-1} contato due volte. Allora il processo si arresta, perchè non si può più prendere in tale V^2_{q-1} un nuovo punto indipendente da $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}$.

Supposto invece $r = 2q+1$ e spinta l'operazione fino ad un punto $x^{(q-1)}$, si trova che lo spazio $S_{q-1} = x^{(0)} x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}$ di V^2_{r-1} ha per spazio polare un S_{q+1} che taglia V^2_{r-1} in una quadrica avente il detto S_{q-1} doppio e quindi spezzantesi in due S_q passanti per S_{q-1}. In essa, e precisamente in uno qualunque di questi S_q, si può prendere ancora un punto $x^{(q)}$ indipendente da $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}$, il quale dà con questi punti il detto S_q, situato sopra V^2_{r-1}: dopo di che l'operazione naturalmente finisce.

15. — Per altre questioni sugli spazî lineari di una quadrica V^2_{r-1} (non specializzata), giova premetterne la cosidetta *proiezione stereografica*, che si ha proiettando V^2_{r-1} da un suo punto P sopra un iperpiano π (non passante per P).

Se τ è l'iperpiano tangente in P a V^2_{r-1} e σ l' S_{r-2} intersezione degli iperpiani τ, π, è evidente che un punto di V^2_{r-1} ha per proiezione o imagine un punto di π, e reciprocamente, eccezion fatta del punto P e dei punti della V^2_{r-3} intersezione di σ con V^2_{r-1}. Infatti il punto P corrisponde a tutto lo spazio σ, o meglio i punti successivi a P, dati dalle tangenti in P a V^2_{r-1}, si proiettano biunivocamente nei punti di σ, questi punti corrispondendo prospettivamente a quelle tangenti: mentre ogni punto di V^2_{r-3} è imagine di tutti i punti dell' S_1 che lo congiunge a P, questi S_1 costituendo la quadrica V^2_{r-2} intersezione di τ e V^2_{r-1}, specializzata una volta, con punto doppio in P. Il punto P è il *punto fondamentale* di V^2_{r-1} e la V^2_{r-3} (non specializzata) è la *quadrica fondamentale*. dell'iperpiano rappresentativo π.

16. — Possiamo subito farne un'applicazione a determinare l'infinità degli spazî lineari di data dimensione m esistenti sulla quadrica. Un S_m di V^2_{r-1} taglia τ in un S_{m-1} di V^2_{r-2} e questo S_{m-1} è proiettato da P in un S'_{m-1} di V^2_{r-3}, per il quale passa manifestamente l'imagine S'_m di S_m. Viceversa un S'_m di π passante per un S'_{m-1} di V^2_{r-3} dà, proiettato da P, un S_{m+1}, che, contenendo l' S_m proiettante S'_{m-1}, sega V^2_{r-1} in una quadrica che si spezza in questo S_m e in un residuo S_m che ha per imagine il considerato S'_m di π. Adunque *condizione necessaria e sufficiente perchè un* S'_m *di* π *sia imagine di un* S_m *di* V^2_{r-1} *è che tale* S'_m *passi per un* S'_{m-1} *di* V^2_{r-3}. Gli S'_m di π passanti per un S'_{m-1} sono ∞^{r-m-1}: quindi, indi-

cando con $N_{m,r-1}$ l'ordine d'infinità degli S_m di una quadrica ad $r-1$ dimensioni, si ha, per ciò che si è ora dimostrato, la formula ricorrente

$$N_{m,r-1}=N_{m-1,r-3}+r-m-1\,.$$

Da essa si ricava successivamente

$$\begin{aligned} N_{m-1,r-3} &= N_{m-2,r-5}+r-m-2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_{1,r-2m+1} &= N_{0,r-2m-1}+r-m-m \\ N_{0,r-2m-1} &= r-m-(m+1)\,, \end{aligned}$$

di cui l'ultima è evidente esprimendo l'infinità dei punti di una quadrica. Sommando membro a membro, si ricava

$$\text{(7)}\qquad N_{m,r-1}=\frac{(m+1)(2r-3m-2)}{2}\,,$$

che risolve il problema proposto.

17. — Se ne traggono alcune conseguenze. Abbiasi una quadrica V^2_{r-1} specializzata h volte cioè con un S_{h-1} doppio e la si consideri (n. 6) come proiezione, dall'S_{h-1}, di una quadrica non specializzata V^2_{r-h-1} di un S_{r-h}. Gli S_m di V^2_{r-1} passanti per il suo spazio doppio S_{h-1} si ottengono evidentemente per proiezione, da questo spazio, degli S_{m-h} di V^2_{r-h-1}; e quindi dovrà essere intanto $m-h\leq\dfrac{r-h-1}{2}$, ossia $m\leq\dfrac{r+h-1}{2}$. Inoltre il numero d'infinità dei detti S_m si otterrà dalla (7), ponendovi $m-h$ al posto di m ed $r-h$ al posto di r, cioè sarà

$$\text{(8)}\qquad \frac{(m-h+1)(2r-3m+h-2)}{2}\,.$$

Se ne ricava che *gli S_m di una quadrica non specializzata passanti per un S_k $(k<m)$ della quadrica stessa sono* $\infty^{\frac{(m-k)(2r-3m-k-3)}{2}}$. Infatti lo spazio S_{r-k-1} polare di S_k taglia V^2_{r-1} in una V^2_{r-k-2} specializzata $k+1$ volte, col detto S_k doppio, alla quale devono appartenere gli S_m passanti per S_k (n. 11). Ponendo nella (8) $k+1$ al posto di h ed $r-k-1$ al posto di r si ottiene il numero indicato.

18. — Per una V^2_{r-1} (non specializzata) gli spazî lineari di dimensione massima che sono (n. 14) a $q-1$ dimensioni se $r=2q$, e a q dimensioni se $r=2q+1$, sono, per la (7), in amendue i casi, $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$. Coll'aiuto della

proiezione stereografica (n. 15) vediamo il diverso comportamento di questi spazî lineari di dimensione massima nei due casi.

Basta riprendere il processo di riduzione del n. 16, cioè osservare che gli spazî massimi della V^2_{r-1} hanno per imagini in π spazî di egual dimensione passanti per gli spazî massimi della quadrica (fondamentale) V^2_{r-3}, che questi nello stesso modo provengono dagli spazî massimi della quadrica V^2_{r-5} (fondamentale per la proiezione stereografica di V^2_{r-3}) e così di seguito. Si arriverà infine, se $r=2q$, ad una V^2_1 (conica) i cui spazî massimi (punti) formano una sola successione continua, proprietà che chiaramente rimane ritornando a V^2_{r-1}. Se $r=2q+1$, si giungerà invece ad una V^2_0 (coppia di punti), dalla quale si ha la V^2_2 (quadrica di S_3) con due sistemi di spazî massimi (rette) affatto distinti, il che pure rimane risalendo a V^2_{r-1}. Dunque *per una quadrica* V^2_{2q-1} *gli spazî lineari* S_{q-1} *di dimensione massima costituiscono un solo sistema* $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$ (così che da un S_{q-1} si può passare con continuità ad un altro qualunque attraverso ad S_{q-1} del sistema stesso), mentre *per una quadrica* V^2_{2q} *gli spazî lineari* S_q *di dimensione massima si distribuiscono in due cotali sistemi affatto distinti, ciascuno* $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$.

19. — Per una quadrica a dimensione pari V^2_{2q} (di S_{2q+1}) vi è ancora a fare una distinzione fra q pari e q impari rispetto al modo di comportarsi dei due sistemi di spazî di dimensione massima.

Occorre a tal fine premettere il seguente lemma relativo alla proiezione stereografica (n. 15) di una quadrica qualunque V^2_{r-1}: — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due* S'_m *dell'iperpiano rappresentativo* π *secantisi in un* S'_{m-1} *della quadrica fondamentale* V^2_{r-3} *ed esterni a questa*
secanti l'iperpiano
τ nella stessa
S_{m-1}
quadrica sieno imagini di due S_m *di* V^2_{r-1} *pure secantisi in un* S_{m-1}, *è che quei due* S'_m *esistano in un* S'_{r-m-1} *passante per l'*S'_{r-m-2} *polare (tangente) di* S'_{m-1} *rispetto* a V^2_{r-3} —.

Infatti un S_m di V^2_{r-1} sega τ in un S_{m-1}: l'imagine S'_m di quello passa per l'imagine S'_{m-1} di questo, essendo S'_{m-1} la sezione con π dell'$S^*_m = PS_{m-1}$. Ma lo spazio S_{r-m} polare (tangente) di S_{m-1} rispetto a V^2_{r-1} passa per S_m ed S^*_m (spazî lineari di V^2_{r-1} passanti per S_{m-1} (cfr. n. 11)) ed è tagliato dall'iperpiano τ (polare di P) in un S^*_{r-m-1}, che sarà spazio polare di S^*_m rispetto a V^2_{r-1} e quindi anche rispetto a V^2_{r-3}. Segando con π, si trova che lo spazio S'_m esiste in un S'_{r-m-1} passante per l'S'_{r-m-2} polare di S'_{m-1} rispetto a V^2_{r-3}.

Viceversa, se ciò avviene, proiettando da P si ha un S_{r-m} passante per un S^*_{r-m-1}, il quale è polare di un S^*_m rispetto a V^2_{r-2} e quindi anche rispetto a V^2_{r-1}. Lo spazio S_{r-m} dovrà adunque per il n. 11 (ultima proprietà) toccare V^2_{r-1} in un S_{m-1} di S^*_m, cioè segare V^2_{r-1} in una quadrica collo spazio doppio S_{m-1} e contenente S^*_m. L'$S_{m+1} = PS'_m$ esiste in S_{r-m} e passa per S^*_m: per conseguenza taglia la quadrica ora detta in questo S^*_m e in un altro S_m (quello che ha per imagine S'_m) passante per l'S_{m-1}, che è uno spazio perfettamente individuato. Due S_m, pei quali si facciano le suddette ipotesi, passano adunque per lo stesso S_{m-1}.

Le due ∞^{r-2m-1} degli S_m per l'S_{m-1} di V^2_{r-1} e degli S'_m per l'S'_{m-1} dell'S'_{r-m-1} sono riferite biunivocamente e sono pure riferite biunivocamente, anzi proiettivamente, le due ∞^m di S_{m-1} nell'S^*_m e di S'_{r-m-1} passanti per l'S'_{r-m-2} e giacenti in π.

20 — Ciò premesso, si ha il teorema: — *In una quadrica* V^2_{2q} (*di* S_{2q+1}) *due* S_q *dello stesso sistema, se q è pari, o di diverso sistema, se q è impari, non possono segarsi che in uno spazio di dimensione pari* ($S_0, S_2, S_4, \ldots$ *fino ad* S_q *o* S_{q-1} *secondochè q è pari o impari*); *e due* S_q *di diverso sistema, se q è pari, o dello stesso sistema, se q è impari, non possono intersecarsi che in uno spazio di dimensione impari* ($S_{-1}, S_1, S_3, \ldots$, *fino ad* S_{q-1} *o* S_q *secondochè q è pari o impari*) —. Il primo caso del teorema è quello che si verifica in generale: cioè *due* S_q, *presi genericamente, s'incontrano (in un punto) o non s'incontrano secondochè sono dello stesso o diverso sistema, quando q è pari; e contrariamente, quando q è impari.*

Procederemo per induzione, mostrando che, se ha luogo il teorema per un valore di q, ha luogo pure per il valore successivo $q+1$ e ricordando che il teorema è vero per $q=1$ (nel qual caso due S_1 dello stesso sistema non hanno punti comuni ovvero coincidono). La quadrica da considerare è una V_{2q+2} e la quadrica fondamentale, del suo iperpiano rappresentativo $\pi = S_{2q+2}$, è una V_{2q}, per la quale adunque si ammette il teorema. Nel discutere ciò che accade per due S_{q+1} di V_{2q+2} possiamo ritenere senza alcuna limitazione (essendo arbitrario il centro P di proiezione) che essi sieno esterni all'iperpiano $\tau = S_{2q+2}$ tangente in P e quindi seghino τ in due S_q; cosicchè le loro imagini sieno due S'_{q+1} seganti σ, che è ora un S_{2q+1}, in due S'_q.

Se questi due S'_q di V_{2q} sono dello stesso sistema, quando q è pari, ovvero di diverso sistema, quando q è impari, nel caso più generale hanno un solo punto S'_0 comune; e quindi ciascuno di essi determina coll'S'_{q+1}

che passa per l'altro un S'_{2q+1}. I due S'_{2q+1} così determinati hanno comune lo spazio S'_{2q}, tangente in S'_0 a V^2_{2q}, al quale appartengono i due S'_q, e possono essere distinti o coincidenti. Se i due S'_{2q+1} sono distinti, i due spazî obiettivi S_{q+1} (dello stesso sistema se $q+1$ è impari o di diverso sistema se $q+1$ è pari) non hanno punti comuni, perchè agli S'_1 di un S'_{2q+1} partenti da S'_0 corrispondono gli S_1 partenti da un certo punto S_0 della retta PS'_0, mentre a quelli dell'altro S'_{2q+1} partenti dallo stesso punto S'_0 corrispondono gli S_1 partenti da un altro punto S^*_0 di quella retta (n. 19): sicchè i due spazî S_{q+1} incontrano in punti S_0, S^*_0 diversi la retta medesima e non possono quindi aver alcun punto comune, neppure fuori di τ, per essere i due S'_{2q+1} distinti. Ma, se questi due S'_{2q+1} coincidono, non solo S_0 cade in S^*_0, ma i due S'_{q+1} imagini, giacendo in un S'_{2q+1}, hanno un S'_1 comune e questo soltanto (esterno a σ e passante per S'_0) se, come continuiamo a supporre, i due S'_q non hanno che il punto S'_0 comune. Allora adunque i due S_{q+1} obiettivi si tagliano in un S_1.

Che se i due considerati S'_q di V_{2q} hanno più di un punto comune, debbono per ipotesi avere (almeno) un S'_2 comune. In tal caso nuovamente i due spazî determinati da ciascun S'_q e dall'S'_{q+1} che passa per l'altro, che sono adesso S'_{2q-1}, passano per lo spazio S'_{2q-2}, tangente in S'_2 a V_{2q}, al quale appartengono i due spazî S'_q, e possono essere distinti o coincidenti. Ne risulterà, se sono distinti, che i due spazî obiettivi S_{q+1} segheranno l'$S_3 = PS'_2$ in due S_2 differenti (da cui partono, per il n. 19, gli S_3 aventi per imagini rispettivamente gli S'_3 uscenti da S'_2 dei due S'_{2q-1}) e quindi si segheranno soltanto nell'S_1 comune a questi S_2. Invece, se i due S'_{2q-1} sono coincidenti, non solo i due S_{q+1} passano per lo stesso S_2 del suddetto S_3, ma si segano in un S_3 avente per imagine l'S'_3 (esterno a σ) secondo cui si tagliano adesso i due S'_{q+1}, restando fermo che i due S'_q hanno comune soltanto un S'_2.

Quando i due S'_q abbiano più che un S'_2 comune, debbono avere per ipotesi (almeno) un S'_4 comune: e allora si hanno, come dianzi, due S'_{2q-3} che passano per l'S'_{2q-4} tangente in S'_4 a V_{2q}. Se i due S'_{2q-3} non coincidono, i due S_{q+1} obiettivi si tagliano in un S_3 (intersezione di due S_4 dello spazio $S_5 = PS'_4$): mentre se coincidono, i due S_{q+1} si tagliano in un S_5. Ecc..

Il ragionamento non varia sostanzialmente se i due S'_q di V_{2q}, da cui siamo partiti, sono di diverso sistema, quando q è pari, o dello stesso sistema, quando q è impari. Nel caso generale due tali S'_q non hanno, per ipotesi, punti comuni: per conseguenza i due S'_{q+1} che passano per essi, esistendo in π, hanno un punto comune esterno a σ e lo stesso avviene quindi degli spazî obbiettivi (di sistema diverso quando $q+1$ è impari o dello stesso sistema quando $q+1$ è pari). Che se i due S'_q si segano in un S'_1, si considerino di nuovo i due spazî, per ciascuno S'_q e per l'S'_{q+1} che contiene l'altro, che sono S'_{2q} passanti per l'S_{2q-1} tangente in S_1 a V_{2q}. Questi due S'_{2q} essendo distinti, si trova (per il n. 19) che i due S_{q+1} obbiettivi hanno soltanto un punto comune (intesezione di due S_1 nell'$S_2 = PS'_1$), mentre, se coincidono, i due S_{q+1} si tagliano in un S_2, ecc..

Il teorema dimostrato si può anche enunciare così: *Su una quadrica* V^2_{2q}, *qualsiasi* q, *pari o impari, gli* S_q *che si segano in un* S_{q-2d} *sono del medesimo sistema, mentre quelli che si segano in un* S_{q-2d-1} *sono di diverso sistema* ($d = 0, 1, 2, \ldots$ *fino a* $\frac{q}{2}$ *o* $\frac{q-1}{2}$ *secondochè* q *è pari o impari*).

21. — Un S_{q+1} qualsiasi per un S_q di V^2_{2q} sega questa quadrica in un altro S'_q distinto da esso (perchè S_{q+1} può toccare al più in un S_{q-1}). Segue che S_q, S'_q si segano in un S_{q-1} e quindi (n. 20), *sono in ogni caso di sistema diverso.* Facendo ora muovere S_{q+1} intorno ad S_q e poi altri S_{q+1} intorno ai nuovi S'_q che se ne ottengono e così di seguito, dico che *si ottengono tutti gli* S_q *(dei due sistemi) di* V^2_{2q}.

Infatti, per passare da un S_q ad un altro S^*_q, questi due spazî segandosi in un S_t (o non segandosi, cioè essendo $t = -1$, nel qual caso il ragionamento corre lo stesso, anzi con semplificazioni), basta prendere in S_q un S_{q-1} comprendente S_t e l'S_{q+1} polare (tangente) di S_{q-1}. Questo S_{q+1} segherà V^2_{2q} in S_q ed in un S'_q passante per S_{q-1} e quindi per S_t. Ma, se S_q, S^*_q sono di medesimo o diverso sistema, per l'osservazione superiore, S'_q, S^*_q sono di diverso o medesimo sistema; e quindi, quelli segandosi in un S_t, questi (che già hanno comune questo spazio) devono segarsi in un S_{t+1} almeno (n. 20). Similmente si potrà passare ad un S''_q che seghi S^*_q almeno in un S_{t+2}, e così di seguito, fino ad uno che seghi S^*_q in un S_{q-1}: onde ecc..

22. — Come applicazione delle proprietà esposte faremo un breve cenno della geometria della retta in S^*_3, la quale (n. 18, Cap. 2) coincide colla geometria di una quadrica V^2_4 di S_5, quadrica non specializzata,

come risulta dalla sua equazione

(28) (9) $$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 \quad ^{1)},$$

(a discriminante non nullo).

Gli S_1 di V_4^2 sono, per la (7), ∞^5 e dànno i **fasci di rette di S^*_3**. Invero, posto per brevità

$$(pp') = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{23},$$

onde la (9) diventa $(pp) = 0$, se p, p' sono due punti di un S_1 appartenente a questa quadrica deve aversi, qualsiasi λ, $(p + \lambda p', p + \lambda p') = 0$, oltre a $(pp) = 0, (p'p') = 0$, e quindi deve aversi anche $(pp') = 0$. Quest'ultima relazione mostra che le due rette di S^*_3 di coordinate p_{ik}, p'_{ik} s'incontrano [2]), e si vede allora facilmente che la retta di coordinate $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ appartiene al fascio determinato da esse [3]).

---

[1]) Così scriviamo (come è d'uso), cambiando denominazioni, la

$$X_{01}\,X_{23} = X_{21}\,X_{03} + X_{31}\,X_{20},$$

del citato n. 18: cioè prendiamo le $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ come coordinate di una retta in S^*_3, essendo x_i, y_i le coordinate di due punti di essa. Prendendo invece, correlativamente, due piani per la retta di coordinate ξ_i, η_i, si hanno le $q_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$ proporzionali alle p_{ik} (cfr. n. 15, cap. 2.°); precisamente, essendo ρ un fattore di proporzionalità ed introdotta la notazione che segue nel testo, si ha $\rho q_{ik} = \dfrac{\partial (pp)}{\partial p_{ik}}$.

[2]) Ciò risulta dall'essere

$$(pp') = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \end{vmatrix}$$

se x, y sono due punti di una retta e x', y' due punti dell'altra.

[3]) In virtù delle relazioni (necessarie e sufficienti perchè una retta p esista in un piano ξ)

$$\begin{array}{llll} & \xi_2 p_{12} + & \xi_3 p_{13} + & \xi_4 p_{14} = 0 \\ \xi_1 p_{21} & & + \xi_3 p_{23} + & \xi_4 p_{24} = 0 \\ \xi_1 p_{31} + & \xi_2 p_{32} + & & + \xi_4 p_{34} = 0 \\ \xi_1 p_{41} + & \xi_2 p_{42} + & \xi_3 p_{43} & = 0 \end{array}$$

e correlative; le quali sono verificate per $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$, se lo sono per p_{ik}, p'_{ik}. Del resto si potrebbe costruire, appunto sulla V_4^2 di S_5, tutta la geometria della retta di S^*_3, nulla presupponendo nell'S^*_3 medesimo. Cfr. SEGRE, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Mem. Accad. Torino, 36 (2), 1884).

Vedi 2ª parte Complem. Geom. proiettiva del Bertini

Similmente si vede che i due sistemi ∞^3 di S_2 esistenti in V_4^2 (n. 18) dànno i sistemi piani rigati e le stelle rigate di S_3; e la proprietà del n. 20 si traduce nel fatto che due stelle (o due piani) hanno una retta comune o coincidono, mentre una stella ed un piano hanno nessuna retta od un fascio di rette comune.

L'equazione $a_{12}p_{34}+a_{13}p_{42}+a_{14}p_{23}+a_{34}p_{12}+a_{42}p_{13}+a_{23}p_{14}=0$ cioè, secondo l'indicazione superiore,

$$(ap)=0 \tag{10}$$

definisce un S_4 di S_5, e la sua intersezione con V_4^2 è una V_3^2, che in S^*_3 dicesi *complesso lineare di rette* (cfr. n. 8, Cap. 5). Siccome (10) è la relazione esistente fra due punti a, p coniugati rispetto a V_4^2, i coefficienti a_{ik} acquistano in S_5 il significato di coordinate del polo di S_4 rispetto a V_4^2. Se S_4 contiene il suo polo, cioè $(aa)=0$, il complesso lineare dicesi *speciale*, e la retta a (a cui sono appoggiate tutte le rette del complesso) dicesi il suo *asse* (o *centro*, secondo la denominazione del citato n. 8). Dunque *le* ∞^4 V_3^2 *(semplicemente specializzate) intersezioni di* V_4^2 *coi suoi iperpiani tangenti dànno in* S^*_3 *i complessi lineari speciali.*

* 23. — Un S_3 sega V_4^2 in una V_2^2, che dà in S^*_3 quella che dicesi *congruenza lineare*, sostegno di un *fascio* di complessi (dati dagli S_4 per l'S_3). Le due *direttrici* della congruenza, cioè le due rette a cui si appoggiano tutte le rette della congruenza, sono date dai punti d'intersezione con V_4^2 dell'S_1 polare di S_3 (gli S_1 che congiungono questi due punti ai punti di V_2^2 esistendo tutti (n. 3) in V_4^2). Se S_3 tocca in un punto (soltanto) V_4^2, cioè sega questa in una V_2^2 avente ivi punto doppio (cono quadrico di S_3), si ha in S^*_3 una *congruenza lineare speciale* composta di infiniti fasci di rette (generatrici del cono) aventi tutti una retta comune, detta *direttrice* (vertice del cono), così che il piano ed il centro di ciascun fascio (i due S_2 di V_4^2 passanti per ciascuna generatrice del cono) sono corrispondenti in una proiettività. Se S_3 tocca V_4^2 in un S_1, V_2^2 si scinde in due S_2 che si segano in questo S_1 e però si ha in S^*_3 una stella ed un piano rigati con un fascio comune.

Un S_2 sega V_4^2 in una V_1^2 (conica) che è, in S^*_3, una serie rigata di una quadrica, serie rigata *base* di una *rete* di complessi lineari (dati dagli ∞^2 S_4 passanti per l'S_2). L'altra serie rigata di questa quadrica è l'altra V_1^2 sezione di V_4^2 coll'S_2 polare dell'S_2 considerato. Se questo

S_2 tocca in un punto (soltanto) V_4^2, si hanno in S^*_3 due fasci con una retta comune: se tocca in un S_1, si ha in S^*_3 un fascio doppio.

24. — Due complessi lineari $(ap)=0$, $(a'p)=0$ si dicono *coniugati* (od *in involuzione* secondo Klein) quando $(aa')=0$. Questa significa, per essere a, a' i poli degli S_4 le cui sezioni con V_4^2 dànno i detti due complessi, che *questi due* S_4 *sono coniugati rispetto a* V_4^2, *e reciprocamente.*

Preso in S_5 un qualsiasi spazio lineare S_m ed il suo spazio polare S_{4-m} rispetto a V_4^2, tutti gli iperpiani per S_m sono coniugati a tutti gli iperpiani per S_{4-m}: quelli dànno ∞^{4-m} complessi lineari costituenti un sistema che dicesi *lineare*, e questi, ∞^m complessi lineari di un altro sistema lineare. Dunque *ad ogni sistema lineare* ∞^m *di complessi lineari è coniugato un sistema lineare* ∞^{4-m} *di complessi lineari, tale cioè che ogni complesso di questo è coniugato ad ogni complesso di quello.* Aggiungasi che, se di due complessi coniugati uno è speciale, l'altro contiene l'asse di questo e viceversa; quindi *gli assi dei complessi lineari speciali esistenti in un sistema lineare* ∞^m *di complessi lineari giacciono in tutti i complessi del sistema lineare coniugato* ∞^{4-m}.

25. — Si deve a Klein la seguente osservazione generale.

Consideriamo una proiettività qualunque dello spazio S_5 in sè stesso, che muti la quadrica V_4^2 in sè medesima. Essa cambierà gli S_2 di un sistema di V_4^2 negli S_2 dello stesso o dell'altro sistema: in amendue i casi due S_2 (di diverso sistema) che si segano in un S_1 si trasformano in due altri con eguale proprietà. In S^*_3 si hanno adunque due specie di trasformazioni biunivoche (algebriche), nelle quali a punti e piani corrispondono rispettivamente punti e piani, ovvero piani e punti, così che, se i primi sono incidenti, anche i secondi lo sono. Si conclude che *ogni trasformazione proiettiva di* S_5 *in sè, che trasformi pure in sè la* V_4^2, *è in* S^*_3 *una omografia o una correlazione, e viceversa.*

Come si rappresentano in S_5 le quattro proiettività involutorie di S^*_3 (cfr. n. 13, Cap. 4.° e n. 4, Cap. 5.°)? Per ciò che ora si è detto, si rappresentano in omografie involutorie di S_5 che mutano in sè la V_4^2. Queste omografie hanno due spazï fondamentali indipendenti S_m, S_{4-m}, i quali evidentemente non possono essere che spazï polari l'uno dell'altro, ovvero autopolari (cioè di V_4^2). Nel secondo caso sono necessariamente due S_2 di V_4^2, di sistema diverso, e quindi *si ha in* S^*_3 *l'omologia armonica.* Nel primo caso m può avere i valori 0, 1, 2.

Se $m=0$ si ha in S_5 una omologia armonica avente per centro ed asse un punto S_0 ed il suo iperpiano polare S_4. Un S_2 di V_4^2 incontra S_4 in un S_1, per il quale deve passare l'S_2 corrispondente, onde questi due S_2 sono di sistema diverso. Quindi *si ha in* S^*_3 *un sistema nullo:* è quello relativo al complesso lineare dato dalla V_3^2 sezione di V_4^2 per S_4. Può notarsi che due punti A, A' di V_4^2 allineati con S_0 si corrispondono nella data omologia, e quindi dànno in S^*_3 due rette corrispondenti nel sistema nullo, dette *rette polari* rispetto al complesso.

Se $m=1$, cioè se sono S_1, S_3 i due spazî polari, si osservi che due S_2 di V_4^2, corrispondenti nella trasformazione involutoria, hanno un solo punto comune (sopra S_3) e quindi sono del medesimo sistema: sicchè si ha in S^*_3 una omografia involutoria. Di questa sono rette unite (quelle date dai punti della V_2^2 intersezione di V_4^2 con S_3, cioè) tutte le rette appoggiate a due rette (date dai punti d'intersezione di S_1 con V_4^2). Dunque *si ha in* S^*_3 *una involuzione gobba.*

In fine, se $m=2$, cioè se si prendono due S_2 polari, la trasformazione involutoria cangia un S_2 di V_4^2 in un altro che non ha in generale con esso alcun punto comune. Quindi *si ha in* S^*_3 *un sistema polare,* perchè inoltre sono rette unite le generatrici e le direttrici di una quadrica (date dalle V_1^2 sezioni dei suddetti due S_2 polari con V_4^2).

26. — Prendasi in S_5 una sestupla polare di V_4^2. Si avrà un gruppo di 32 trasformazioni involutorie di S_5 (n. 14, Cap. 4.°), le quali sono in S^*_3 (n. precedente), oltre l'identità, 6 sistemi nulli, 10 sistemi polari e 15 involuzioni gobbe. I sei complessi lineari relativi ai sei sistemi nulli sono a due a due coniugati (o in involuzione): e viceversa, dati sei complessi in tale relazione, si ha il gruppo suddetto. Ne segue una notevole configurazione oggetto di un elegante studio di Klein [1]).

Rispetto ad una sestupla polare l'equazione di V_4^2 può scriversi così

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0 \tag{11}$$

Indichiamo con

$$x_i=(a^{(i)}p) \qquad (i=0,1,\dots,5)$$

la trasformazione lineare con cui si passa dalla $(pp)=0$ alla (11). Le equazioni $(a^{(i)}p)=0$ sono in S_5 le faccie di detta sestupla e quindi in S^*_3

---

[1]) *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades.* (Math. Ann., 2, 1870).

le equazioni di sei complessi a due a due coniugati. Rispetto a sei tali complessi si ha adunque un nuovo sistema di coordinate per le rette dello spazio ordinario S^*_3, nel quale le coordinate x_i di una retta devono soddisfare ad una equazione del tipo (11). Le x_i sono dette *coordinate di Klein*.

27. — Torniamo a considerare una quadrica V^2_{2q} di un S_{2q+1}, e su di essa una varietà algebrica V^n_q di dimensione q e di ordine n [1]).

Un S_{q+1} che passi per un S_q di V^2_{2q} ne contiene un secondo S'_q di sistema diverso da quello (n. 21): quindi degli n punti che quell'S_{q+1} ha comune con V^n_q un certo numero l cadranno sopra S_q, altri m cadranno sopra S'_q, e sarà $l+m=n$. Anzi, siccome ad ogni S_q di V^2_{2q} si può arrivare, come vedemmo (n. 21), mediante tali S_{q+1}, è chiaro che, rispetto alla V^n_q, i due sistemi di S_q di V^2_{2q} si comportano così che tutti gli S_q di un sistema hanno con essa l punti comuni e tutti gli S_q dell'altro sistema hanno con essa m punti comuni. Per ciò in appresso la V^n_q sarà opportunamente indicata con $V_q^{(lm)}$.

Ora sieno sopra una V^2_{2q} due tali varietà $V_q^{(lm)}$, $V_q^{(l_1 m_1)}$, i numeri l ed l_1, m ed m_1 corrispondendo rispettivamente allo stesso sistema di S_q di V^2_{2q}: cerchiamo il numero dei punti che esse hanno comuni. Proiettando stereograficamente V^2_{2q} da un suo punto P sopra un S_{2q}, le $V_q^{(lm)}$, $V_q^{(l_1 m_1)}$ si proiettano in due varietà V_q^{l+m}, $V_q^{l_1+m_1}$ di S_{2q}, di ordini $l+m$, l_1+m_1 rispettivamente, le quali hanno in tutto $(l+m)(l_1+m_1)$ punti comuni: ma di questi soltanto quelli che sono fuori della quadrica fondamentale della rappresentazione, V^2_{2q-2}, corrispondono a punti comuni a $V_q^{(lm)}$, $V_q^{(l_1 m_1)}$. Ora queste varietà segano l'S_{2q} tangente in P a V^2_{2q} in due varietà V_{q-1}^{l+m}, $V_{q-1}^{l_1+m_1}$ le cui imagini, sopra V^2_{2q-2}, sono due varietà $V_{q-1}^{(lm)}$, $V_{q-1}^{(l_1 m_1)}$; perchè un S_{q-1} di V_{2q-2} ha con queste tanti punti comuni quanti l'$S_q = PS_{q-1}$ ha colle V_{q-1}^{l+m}, $V_{q-1}^{l_1+m_1}$, cioè colle $V_q^{(lm)}$, $V_q^{(l_1 m_1)}$.

Dunque, indicando con X_q, X_{q-1} ... i numeri di punti comuni a due $V_q^{(lm)}$, $V_q^{(l_1 m_1)}$ di S_{2q}, a due $V_{q-1}^{(lm)}$, $V_{q-1}^{(l_1 m_1)}$ di S_{2q-2}, ..., si ha la formula ricorrente

$$X_q = (l+m)(l_1+m_1) - X_{q-1}.$$

[1]) In questo n. facciamo uso di alcune nozioni (semplici e naturali estensioni del resto di cose dello spazio ordinario), che saranno svolte nel Cap. 9.°.

Di qui si ricava

$$X_{q-1} = (l+m)(l_1+m_1) - X_{q-2};$$

ed in particolare

$$X_1 = (l+m)(l_1+m_1) - X_0.$$

Per conseguenza $X_q = X_{q-2}$: cioè $X_q = X_1$ se q è impari e $X_q = X_0$ se q è pari. Ma X_0 è il numero relativo ad una V_0^2, cioè ad una coppia di punti, nell'uno dei quali stanno l punti di $V_0^{(lm)}$ ed l_1 punti di $V_0^{(l_1 m_1)}$ e nell'altro rispettivamente m ed m_1 punti, e perciò X_0, numero dei punti comuni a queste $V_0^{(lm)}$, $V_0^{(l_1 m_1)}$ va considerato eguale a $ll_1 + mm_1$.

Ne risulta, dall'ultima relazione, X_1 eguale ad $l_1 m + l m_1$ (teorema di Chasles) numero calcolabile subito anche direttamente applicando il ragionamento fatto sopra alla rappresentazione stereografica di una quadrica di S_3; ed in generale

$$X_q = l_1 m + l m_1 \ , \text{ se } q \text{ è impari};$$

$$X_q = ll_1 + mm_1 \ , \text{ se } q \text{ è pari}.$$

Facciasi $q=2$. Una $V_2^{(lm)}$ di V_4^2 di S_5 rappresenta una doppia infinità di rette dello spazio ordinario S^*_3, tale che fra esse ve ne sono (ad es.) l per un punto ed m in un piano (cfr. n. 22): o, come dicesi, *una congruenza* (lm) [1]).

Dal teorema precedente si ricava adunque che *il numero delle rette comuni a due congruenze* (lm), $(l_1 m_1)$ *dello spazio ordinario è* $ll_1 + mm_1$: numero che è stato assegnato per la prima volta da Halphen [2]).

---

[1]) Oltre ai numeri l, m, detti *ordine* e *classe* della congruenza, giova considerare per essa anche il *rango*, cioè il numero delle coppie di rette della congruenza formanti fascio con una retta generica (numero delle coppie di punti di $V_2^{(lm)}$ allineati con un punto generico di V_4^2 sopra S_5 di V_4^2 stessa). Per questo ed in generale per lo studio delle congruenze col metodo accennato vedasi: FANO, *Studio di alcuni sistemi di rette* ... (Annali di Matematiche, 21 (2), 1893), ove si troveranno altresì molte indicazioni bibliografiche.

[2]) Questo numero si ottiene anche come caso particolare di una formula di Schubert, contenuta a sua volta in una formula più generale data dal SEVERI nella Nota: *Le coincidenze di una serie algebrica* ..., (Rendiconti dei Lincei, 9 (5), 1900), n. 2.

28. — Accenneremo in fine alla generazione delle quadriche per stelle reciproche.

Due stelle aventi la stessa dimensione, di sostegni S_{r-k-1}, S'_{r-k-1}, sieno riferite proiettivamente così che agli S_{r-k} dell'una corrispondano gli S_{r-1} dell'altra: e consideriamo il luogo dell'S_{r-k-1} comune ad un S_{r-k} della prima stella e all'S_{r-1} corrispondente della seconda. Se gli iperpiani delle due stelle sono dati rispettivamente dalle equazioni

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0 \tag{12}$$

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0 \tag{13}$$

al variare dei parametri $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$; $\mu_0, \dots, \mu_k$ rispettivamente, queste si possono prendere come le coordinate degli iperpiani stessi nelle due stelle; e la detta reciprocità è quindi data da una relazione bilineare

$$\sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \mu_j = 0 \tag{14}$$

ove le a_{ij} $(i, j = 0, 1, \dots, k)$ sono costanti. Si pongano nelle (12), (13) le coordinate di un punto x del luogo: il qual punto congiunto con S_{r-k-1} dà un S_{r-k}, a cui corrisponde nell'altra stella un S_{r-1} (passante per lo stesso punto). Quindi, se $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ sono le coordinate di questo S_{r-1}, le $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ che soddisfano alla (12) sono le coordinate degli S_{r-1} che passano per quell'S_{r-k}, onde soddisfano anche alla (14), e reciprocamente: il che significa dover essere le (12), (14) identiche rispetto alle λ. Adunque si ha

$$\rho u_i = \sum_j a_{ij} \mu_j \qquad (j = 0, 1, \dots, k) ; \tag{15}$$

dalle quali e dalla (13), eliminando ρ e le μ, si ricava

$$\begin{vmatrix} 0 & v_0 & \dots & v_k \\ u_0 & a_{00} & \dots & a_{0k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k & a_{k0} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = 0 ,$$

o anche (A_{ik} complemento algebrico di a_{ik} nel determinante $|a_{ik}|$),

$$\sum_{ij} A_{ij} u_i v_j = 0 . \tag{16}$$

Viceversa, se un punto x soddisfa colle sue coordinate a questa equazione, coesistono le (13) e (15), e quindi il punto x sta sopra l'iperpiano (13) e su tutti gli iperpiani (12) che ad esso corrispondono in virtù della (14). Si vede adunque che *il luogo cercato è una quadrica,* la quale (per la simmetria della equazione (16) nelle u, v) è anche il luogo degli S_{r-k-1} sezioni degli S_{r-k} della seconda stella cogli S_{r-1} corrispondenti della prima.

Annullando le derivate parziali della (16) rispetto alle coordinate si ottengono $r+1$ equazioni lineari omogenee nelle $2k+2$ espressioni u, v, che sono in generale (cioè scegliendo i coefficienti delle u, v genericamente) $r+1$ equazioni di iperpiani non aventi punto comune se $2k+2 \geq r+1$; onde in questo caso (cfr. n. 5) la quadrica (16) non è in generale specializzata. Invece lo è necessariamente $r-2k-1$ volte (e non più in generale) se $2k+2 < r+1$, giacchè allora le stesse equazioni sono soddisfatte dalle coordinate dei punti di un S_{r-2k-2} che è lo spazio intersezione dei sostegni S_{r-k-1}, S'_{r-k-1} delle due stelle.

La condizione $2k+2 \geq r+1$, cioè $r-k-1 \leq \frac{r-1}{2}$ affinchè la quadrica (16) non sia specializzata è del resto ben naturale, per il fatto evidente che i detti sostegni S_{r-k-1}, S'_{r-k-1} stanno su di essa e per la proprietà del n. 14.

Che viceversa *qualunque quadrica sia generabile per mezzo di due stelle reciproche* segue immediatamente dal n. 8, per il quale, se una quadrica specializzata h volte (o non specializzata) è generabile in tal modo, lo sono pure tutte quelle specializzate lo stesso numero h di volte (o non specializzate) [1].

---

[1]) Si può aggiungere inoltre che *i sostegni delle due stelle e la loro reciprocità possono variare in infiniti modi.* Ciò è dimostrato nella Nota di DA PORTO, *Sulla generazione per stelle reciproche* ... (Giornale di Matematiche, 6 (2), 1899).

Capitolo 7.°

Fasci di quadriche.

1. — Nello spazio S_r abbiansi due quadriche f, φ rappresentate dalle due equazioni

$$(1) \qquad \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0\,, \sum_{ik} a'_{ik} x_i x_k = 0\,:$$

e si consideri la varietà ad $r-2$ dimensioni costituita dall'insieme dei punti che esse hanno comuni, cioè la varietà che dicesi loro *intersezione*. Questa gode della proprietà di avere sopra un S_2 generico di S_r quattro punti (quelli in cui si tagliano le due coniche sezioni dell'S_2 colle due quadriche) e si dirà perciò che è del *4.° ordine*. È chiaro che la detta varietà è comune, oltre che ad f, φ, anche a tutte le quadriche che si ottengono dall'equazione

$$(2) \qquad \sum_{ik} (a_{ik} + \lambda a'_{ik}) x_i x_k = 0$$

al variare di λ e che si dicono costituire un *fascio*. La stessa varietà è detta *base* di questo fascio e, nel presente Capitolo, si chiamerà *quartica* e s'indicherà con V^4_{r-2}. Si avverta bene che essa è caratterizzata dall'essere intersezione di due quadriche (o base di un fascio di quadriche), non dall'ordine 4 che compete anche ad altre varietà ad $r-2$ dimensioni.

Si noti inoltre che, ad individuare un fascio, si possono prendere due quadriche qualunque di esso, come si vede facendo nella (2) una trasformazione lineare del parametro λ.

2. — Un teorema di Weierstrass [1]) assegna come condizione necessaria

[1]) Nei Monatsberichte di Berlino, 1868, (Gesammelte Werke, I). Cfr. anche il § 9 del libro di Muth citato nella nota [2]) al n. 27, Cap. 4.°.

e sufficiente perchè una coppia di forme quadratiche $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\Sigma a'_{ik} x_i x_k$ possa trasformarsi in un'altra coppia di forme quadratiche $\Sigma b_{ik} x_i x_k$, $\Sigma b'_{ik} x_i x_k$, con una sostituzione lineare a modulo diverso da zero, l'eguaglianza dei divisori elementari dei due determinanti $|a_{ik} - \rho a'_{ik}|$, $|b_{ik} - \rho b'_{ik}|$: quindi tale è la condizione perchè le due coppie di quadriche, date dalle due coppie di forme uguagliate a zero e le relative quartiche possano trasformarsi proiettivamente le une nelle altre [1]). D'altra parte l'eguaglianza dei divisori elementari di quei determinanti esprime anche (Cap. 4.°) la condizione necessaria e sufficiente perchè l'omografia ($\Sigma a_{ik} x_k = \Sigma a'_{ik} x'_k$) prodotto delle polarità rispetto alle due prime quadriche sia proiettivamente identica alla omografia ($\Sigma b_{ik} x_k = \Sigma b'_{ik} x'_k$) prodotto delle polarità rispetto alle altre due quadriche. Quindi *condizione necessaria e sufficiente perchè due quadriche f, φ possano trasformarsi proiettivamente in due altre f', φ' è che l'omografia prodotto delle polarità rispetto a quelle sia proiettivamente identica all'omografia prodotto delle polarità rispetto a queste* [2]).

3. — Adunque le particolarità proiettive del sistema di due quadriche (1) sono quelle stesse dell'omografia

$$\sum_k a_{ik} x_k = \sum_k a'_{ik} x'_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, r), \tag{3}$$

che è il prodotto delle loro polarità, e quindi consistono nella caratteristica e negli invarianti assoluti di questa, che si diranno *caratteristica* ed *invarianti assoluti* del sistema delle due quadriche, o del loro fascio, o della quartica base.

Siccome il determinante caratteristico $D(\rho) = |a_{ik} - \rho a'_{ik}|$ dell'omografia (3) è (posto $\rho = -\lambda$) il discriminante della quadrica (2) del detto fascio, le radici ρ', ρ'',..., $\rho^{(m)}$ di $D(\rho)$ dànno le quadriche specializzate del fascio stesso; ed anzi *gli spazî fondamentali dell'omografia* (3) *sono gli spazî doppî di queste quadriche.* Segue intanto che *i suddetti invarianti assoluti*

---

[1]) Il Weierstrass esclude il caso che i detti due determinanti sieno identicamente nulli. Quindi, nell'applicazione che facciamo del suo teorema, va escluso il caso dei fasci di quadriche tutte specializzate, che considereremo a parte. Noi supponiamo anzi che le f, φ non sieno specializzate (il che per il teorema di Weierstrass non è essenziale limitazione per una considerazione analoga a quella del n. 24, Cap. 4.°): onde l'omografia data dalle (3) non è singolare.

[2]) Sarebbe utile trovare di questo teorema una dimostrazione geometrica diretta.

sono i rapporti anarmonici che si ottengono (nel fascio (2)) *dalle m quadriche specializzate e dalle due quadriche f, φ*: e sono $m-1$ indipendenti.

Invece, se si tratta della trasformazione proiettiva di un fascio in un altro colla sola condizione che una quadrica f di quello si trasformi in una determinata quadrica f' di questo, cioè della trasformazione proiettiva di f e di una V^4_{r-2} su essa in f' e in un'altra V^4_{r-2} su questa, gli invarianti assoluti indipendenti si riducono evidentemente ad $m-2$; (o a zero, se $m \leq 2$), mentre si riducono ad $m-3$ (o a zero se $m \leq 3$) se si tratta della trasformazione proiettiva di un fascio in un fascio o di una quartica in una quartica (sempre invariata restando la caratteristica).

4. — Per il sistema di due quadriche-inviluppo valgono considerazioni correlative alle precedenti, dicendosi *schiera* l'ente correlativo al fascio. Poichè (n. 20, Cap. 4.°) ogni omografia è correlativa alla sua inversa, si ha che *la caratteristica e gli invarianti assoluti di due quadriche-luogo sono quelli stessi delle due quadriche-inviluppo ad esse aderenti (scambiando le quadriche)*; e che le quadriche specializzate rispettivamente come luogo e come inviluppo del loro fascio e della loro schiera (relative agli stessi gruppi caratteristici) si corrispondono in una proiettività (correlazione) che fa pure corrispondere le due quadriche (l'una a quella aderente all'altra).

5. — L'equazione dell'iperpiano polare di un punto z rispetto alla quadrica (2)

$$\sum (a_{ik} + \lambda a'_{ik})\, x_i\, z_k = 0$$

mostra che *gli iperpiani polari di un punto rispetto alle quadriche di un fascio qualsiasi formano (quando non coincidono) un altro fascio proiettivo al fascio stesso*. L'S_{r-2} sostegno del fascio di iperpiani suole dirsi *polare* del punto rispetto al fascio di quadriche od alla quartica base. Al variare del punto si hanno così infiniti fasci d'iperpiani proiettivi tra loro. Correlativamente rispetto ad una schiera di quadriche.

In particolare gli iperpiani polari di un punto rispetto a due quadriche e quelli che dalla loro intersezione proiettano gli m spazî doppi delle quadriche del loro fascio costituiscono un fascio di $m+2$ iperpiani proiettivo a sè stesso al variare del punto ed i rapporti anarmonici formati cogli $m+2$ iperpiani sono gli invarianti assoluti. Correlativamente, considerando le quadriche aderenti alle due date, si hanno punteggiate proiettive di $m+2$

punti che pure dànno (n. 4) gli invarianti assoluti: onde queste punteggiate sono proiettive a quei fasci, il che del resto segue senz'altro dal n. 6, Cap. 4.°.

I punti e gli iperpiani uniti della omografia prodotto delle polarità rispetto a due quadriche, cioè (n. 3) i punti doppi delle quadriche del loro fascio e gli iperpiani doppi delle quadriche della loro schiera, sono *tutti e soli i punti ed iperpiani, ciascuno dei quali ha rispettivamente lo stesso iperpiano polare rispetto alle quadriche del fascio e lo stesso polo rispetto alle quadriche della schiera.* La proprietà è evidente, notando soltanto che un iperpiano che è polare di un punto z rispetto a due quadriche f, φ di un fascio (onde sono proporzionali le $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \sum_i a_{ik} z_k$ alle $\frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = \sum_i a'_{ik} z_k$) è tale rispetto a tutte le quadriche del fascio, e correlativamente.

D'ora innanzi ometteremo di accennare alle proprietà correlative.

6. — Diciamo che il sistema di due quadriche o il loro fascio Φ o la quartica base V^4_{r-2} è *del 1.° tipo* o *del 2.° tipo* secondochè l'omografia Ω prodotto delle polarità rispetto alle due quadriche è generale o particolare. Se Ω è particolare può riguardarsi (n. 15, Cap. 4.°) come caso limite di una omografia generale Ω' (cogli stessi spazî fondamentali). Scrivendo le equazioni di quest'ultima nella forma canonica $x_i = \alpha_i y_i$ $(i = 0, 1, \dots, r)$, si rende manifesto che essa può in infiniti modi considerarsi come prodotto di due polarità (non singolari) date dalle formule $x_i = \mu_i \xi_i$, $\xi_i = \nu_i y_i$, bastando di imporre le condizioni $\alpha_i = \mu_i \nu_i$: ad es., se supponiamo di fissare una delle polarità, pongasi la prima, l'altra polarità ne è linearmente determinata. Riferiamoci adesso ad una piramide fondamentale generica (onde, nel supposto ora fatto, i coefficienti della seconda polarità dipendono sempre linearmente da quelli dell'omografia Ω') e facciamo convergere Ω' verso Ω: il sistema delle due polarità (variando la seconda con Ω') convergerà verso un sistema, che, per il n. 2, sarà trasformabile proiettivamente nel sistema delle due polarità date, se non sia questo medesimo sistema. Dunque *un sistema di due quadriche del 2.° tipo può sempre considerarsi (a meno eventualmente di una proiettività) come caso limite di un sistema del 1.° tipo.* Gli spazî doppi delle quadriche di un fascio saranno *spazî doppi semplici* ovvero *spazî doppi di sovrapposizione*, denominando così quelli che provengono dal cadere uno nel-

l'altro due o più spazî doppi semplici. Un fascio del 1.° tipo ha tutti spazî doppi semplici: uno del 2.° tipo ha almeno uno spazio doppio di sovrapposizione. La caratteristica di un fascio ha ora un chiaro significato rispetto al fascio stesso.

La dimostrazione ora fatta prova anche quest'altra proprietà: — *Qualsiasi omografia, generale o particolare, si può pensare (in infiniti modi) come omografia prodotto delle polarità rispetto a due quadriche.* — Per conseguenza *del sistema di due quadriche o del loro fascio* Φ *o della quartica base* V^4_{r-2} *si possono assegnare arbitrariamente la caratteristica e gli invarianti assoluti.*

7. — Quando il fascio Φ è del 1.° tipo e sieno $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$ gli spazî fondamentali di Ω e $\Sigma_{h'-1}, \Sigma_{h''-1}, \dots, \Sigma_{h^{(m)}-1}$ le loro stelle coniugate, è chiaro che gli iperpiani polari dei punti di $S_{h'-1}$ (ad es.) rispetto alle quadriche di Φ, devono passare per $S_{h''-1}, \dots, S_{h^{(m)}-1}$, per essere questi spazî doppi per talune di esse, e quindi sono precisamente gli iperpiani
pag. 66-67 di $\Sigma_{h'-1}$. La proprietà rimane, come caso limite, per le omografie particolari. Adunque *uno spazio* $S_{h^{(i)}-1}$ *(spazio doppio per una quadrica di* Φ*) ed il sostegno* $S_{r-h^{(i)}}$ *della sua stella coniugata in* Ω *(contenente gli altri spazî doppi) sono spazî polari rispetto ad ogni quadrica del fascio.*

Di un fascio Φ del 1.° tipo esistono $(r+1)^{\text{uple}}$ polari, comuni cioè a tutte le sue quadriche. Per trovarle si prendono h' punti a due a due coniugati in $S_{h'-1}$, il che si fa scegliendovi comunque un primo punto, poi un secondo nell'intersezione $S_{h'-2}$ dell'iperpiano polare del primo con $S_{h'-1}$, indi un terzo nell'intersezione $S_{h'-3}$ dell'iperpiano polare del secondo con $S_{h'-2}$, e così via: poi si prendono h'' punti a due a due coniugati in $S_{h''-2}, \dots$, e così $h^{(m)}$ punti a due a due coniugati in $S_{h^{(m)}-1}$. Questi sono $r+1$ punti indipendenti ed inoltre, per l'ultima proprietà, tutti coniugati a due a due. Che così si ottengano tutte le dette $(r+1)^{\text{upla}}$ polari risulta senz'altro dall'osservare che i vertici di una tale, avendo rispetto a tutte le quadriche di Φ lo stesso iperpiano polare, devono essere punti degli spazî $S_{h^{(i)}-1}$. Se tutte le quadriche specializzate di Φ lo sono una volta sola, esiste una sola $(r+1)^{\text{upla}}$ polare.

Si può quindi sempre porre l'equazione di un fascio Φ del 1.° tipo sotto forma di una somma di quadrati delle coordinate *(equazione canonica* o *ridotta).* Inoltre ogni $(r+1)^{\text{upla}}$ polare fornisce un gruppo di 2^r trasformazioni in sè del fascio Φ o della sua quartica base V^4_{r-2} (n. 14, Cap. 4.°).

8. — *Punto doppio* di una V^4_{r-2} è un punto tale che un S_2 generico per esso incontra ivi la quartica in due punti coincidenti [1]. Limitandoci dapprima alla V^4_{r-2} del 1.° tipo, osserviamo che un S_0 doppio di una quadrica di Φ, specializzata una volta, è esterno al suo S_{r-1} polare e quindi non giace su V^4_{r-2}, che è il luogo dei punti coniugati a sè stessi rispetto (a due e però) a tutte le quadriche di Φ. Invece un $S_{h'-1}$ doppio ($h' > 1$) di una quadrica specializzata h' volte è segato dagli iperpiani polari dei punti di esso, che sono gli iperpiani della stella $\Sigma_{h'-1}$ (coniugata in Ω dell'$S_{h'-1}$ (n. 7)), in $S_{h'-2}$, i quali corrispondono ai punti stessi in una polarità (n. 1, Cap. 6.°) non singolare, in quanto il sostegno $S_{r-h'}$ della detta stella non incontra l'$S_{h'-1}$ e quindi quegli $S_{h'-2}$ non passano per alcuno spazio. La quadrica $V^2_{h'-2}$ degli elementi incidenti di questa polarità è adunque non specializzata ed, essendo costituita di punti coniugati a sè stessi rispetto a tutte le quadriche di Φ, giace sopra V^4_{r-2}, anzi è tutta di punti doppi di questa quartica. In vero un S_2 per un punto di $V^2_{h'-2}$ taglia in due rette concorrenti in questo punto la quadrica specializzata h' volte e taglia un'altra quadrica del fascio in una conica per il punto stesso, onde questo assorbe due intersezioni. Viceversa, se V^4_{r-2} possiede un punto doppio P, proiettandola da questo punto si ha una V_{r-1} la quale da un S_1 generico di S_r è incontrata in due punti, perchè l'$S_2 \equiv PS_1$ contiene, per l'ipotesi, due soli raggi proiettanti; onde tale V_{r-1} è una quadrica del fascio Φ, avente punto doppio in P [2]. Dunque i *punti doppî di una* V^4_{r-2} *del 1.° tipo sono i punti delle* $V^{2(i)}_{h-2}$ *(non specializzate) intersezioni degli* $S_{h-1}^{(i)}$ *doppî* ($h^{(i)} > 1$) *delle quadriche specializzate del fascio* Φ *colle altre del fascio stesso.* Siccome due punti appartenenti rispettivamente a due tali $V^{2(i)}_{h-2}$, che diremo *doppie* per V^4_{r-2}, sono coniugati fra loro rispetto a tutte le quadriche di Φ e giacciono sulle quadriche stesse, si ha (n. 3, Cap. 6.°) che *gli* S_1 *che congiungono i punti di una* $V^{2(i)}_{h-2}$ *doppia a quelli di un'altra* $V^{2(i)}_{h-2}$ *doppia stanno sopra* V^4_{r-2}.

Un S_1 tangente alla quartica V^4_{r-2} in un suo punto è un S_1 che con-

---

[1] Cfr. n. 3, Cap. 9.°.

[2] Qui ci si vale della proprietà del n. 11, Cap. 9.° e dell'altra che ogni quadrica Q per V^4_{r-2} è del fascio Φ, la quale proprietà segue da ciò che la quadrica del fascio per un punto di Q (esterno a V^4_{r-2}) deve coincidere con Q (cfr. n. 3, Cap. 8.°).

giunge questo punto ad un suo punto successivo sulla quartica stessa, ed è quindi tangente comune a tutte le quadriche di Φ. Segue che in un punto semplice di V^4_{r-2} il luogo delle sue tangenti è l'S_{r-2} comuni agli S_{r-1} polari (tangenti) del punto, cioè (n. 5) l'S_{r-2} polare (tangente) del punto rispetto alle quadriche del fascio Φ. Invece le tangenti di V^4_{r-2} in un suo punto doppio P devono essere nell'S_{r-1} tangente in P a tutte le quadriche del fascio Φ e nella quadrica specializzata di questo, della quale P è un punto doppio, e viceversa: e però costituiscono una quadrica V^2_{r-2} (specializzata una o più volte, con P doppio) intersezione della quadrica specializzata e dell'S_{r-1} [1]).

Notiamo ancora che, se una quadrica specializzata di Φ ha un S_{r-2} doppio, si spezza in due S_{r-1}, e quindi la V^4_{r-2} si spezza nelle due quadriche sezioni di questi S_{r-1} con un'altra quadrica del fascio: e, se ha un S_{r-1} doppio, la quadrica è questo S_{r-1} contato due volte, e però V^4_{r-2} è costituita di due quadriche successive.

9. — Passiamo al caso di una quartica V^4_{r-2} o di un fascio Φ del 2.° tipo, per il quale si presentano (n. 6) spazî doppi di sovrapposizione (uno almeno). La caratteristica del fascio o della quartica del 1.° tipo, di cui quello è caso limite sia

$$[h'-1\,,\,h'_1-1\,,\,h'_2-1\,,\ldots,\,h'_p-1\,,\,h''-1\,,\,h''_1-1\,,\ldots]$$

e suppongasi dapprima che $S_{h'_1-1}$ cada in $S_{h'-1}$. Ciò significa che $S_{r-h'}$, spazio polare di $S_{h'-1}$ rispetto a tutte le quadriche di Φ (sostegno della stella coniugata di $S_{h'-1}$ nella omografia Ω), sega $S_{h'-1}$ nell'$S_{h'_1-1}$; e però $S_{r-h'}$ ed $S_{h'-1}$ sono tangenti in $S_{h'_1-1}$ alle quadriche stesse (n. 11, Cap. 6.°). Se $h'=h'_1$, lo spazio $S_{h'-1}$ non solo appartiene a V^4_{r-2} ma è tutto di punti doppî di essa (per lo stesso ragionamento del n. 8), cioè (se $h'>1$) la $V^2_{h'-2}$ del caso generale diviene indeterminata. Al contrario, se $h'>h'_1$, questa $V^2_{h'-2}$ diviene specializzata coll'$S_{h'_1-1}$ doppio.

Per giudicare dell'effetto di ulteriori sovrapposizioni, osserviamo ciò che accade ora nell'$S_{r-h'}$. Ma prima facciamo una osservazione generale da invocarsi anche in seguito. Quando $S_{h'_1-1}$ cade in $S_{h'-1}$ le due quadriche specializzate del nostro fascio Φ con quegli spazî doppi debbono coincidere in una quadrica Q (e però la prima, se $h'_1<h'$, deve spe-

---

1) La proprietà è vera in generale e si estende (cfr. n. 12, Cap. 9.°).

cializzarsi ulteriormente); altrimenti il fascio sarebbe tutto di quadriche specializzate, contro l'ipotesi. Ciò posto, l'$S_{r-h'}$ segherà il fascio Φ in un fascio di quadriche tutte specializzate coll'$S_{h'_1-1}$ doppio, fra le quali vi sono quadriche specializzate $h'_1+h'_2$, $h'_1+h'_3$,..., $h'_1+h'_p$, h'_1+h'',..., volte, perchè, ad es., la quadrica di Φ coll'$S_{h'_2-1}$ doppio è toccata dall'$S_{r-h'}$ nell'$S_{h'_1-1}$ indipendente da quello spazio doppio (e quindi in tutto l'$S_{h'_1+h'_2-1}$ che lo congiunge ad esso); e vi è anche la quadrica $V^2_{r-h'-1}$ coll'$S_{h'_1-1}$ doppio sezione di $S_{r-h'}$ colla suddetta quadrica di coincidenza Q. Se si fa della geometria nella stella di sostegno $S_{h'_1-1}$ dello spazio $S_{r-h'}$ (o meglio, per maggior chiarezza, si sega con un $S_{r-h'-h'_1}$ di $S_{r-h'}$ indipendente da $S_{h'_1-1}$), *la* $V^2_{r-h'-1}$ *è non specializzata e le altre sono specializzate rispettivamente* h'_2, h'_3, ..., h'_p, h'', ... *volte:* e di più, poichè gli spazî doppî di queste ultime sono tutti semplici (per essere $h'_2+h'_3+...+h'_p+h''+...$ $...=r-h'-h'_1+1$ (Cfr. n. 2, Cap. 4.°)) si ha che *il fascio considerato nella detta stella è un fascio del 1.° tipo.*

Ora se $S_{h'_2-1}$ cade in $S_{h'_1-1}$ la quadrica di Φ che ha quello spazio doppio cade nella quadrica Q (per la stessa ragione detta sopra): e quindi la sezione, specializzata $h'_1+h'_2$ volte, di quella quadrica con $S_{r-h'}$ tende alla $V^2_{r-h'-1}$: onde, nel fascio della stella $S_{h'_1-1}$ di $S_{r-h'}$, *la* $V^2_{r-h'-1}$ *si specializza* h'_2 *volte, il fascio stesso rimanendo del 1.° tipo* [1]).

Se inoltre $S_{h'_3-1}$ cade in $S_{h'_2-1}$, nuovamente la quadrica di Φ con quello spazio doppio cade in Q, e per conseguenza la sezione, specializzata $h'_1+h'_3$ volte, di quella quadrica con $S_{r-h'}$ cade in $V^2_{r-h'-1}$: cioè *il fascio detto (nella stella) diviene del 2.° tipo, coincidendo nella* $V^2_{r-h'-1}$ *le due quadriche di esso specializzate rispettivamente* h'_2, h'_3 volte. In altre parole, la caratterisca di Φ essendo ora

$$[(h'-1\ ,\ h'_1-1\ ,\ h'_2-1\ ,\ h'_3-1)\ ,\ h'_4-1\ ,...,\ h'_p-1\ ,\ h''-1\ ,\ h''_1-1\ ,...]\,,$$

la caratteristica del considerato fascio (o della sua sezione con un $S_{r-h'-h'_1}$) è

$$(4)\qquad [(h'_2-1\ ,\ h'_3-1)\ ,\ h'_4-1\ ,...,\ h'_p-1\ ,\ h''-1\ ,\ h''_1-1\ ...].$$

---

[1]) Se $r-h'-1=h'_1-1$, il fascio si riduce all'$S_{h'_1-1}$ contato due volte. Inoltre (per essere (n. 2, Cap. 4.°) $r-h'+1=h'_1+1$) nell'$S_{r-h'}$ vi sarà un solo punto doppio; cosicchè *la quadrica che ha questo punto doppio passerà per tutto l'*$S_{r-h'}$. Quando $S_{h'_2-1}=S_0$ cade in $S_{h'_1-1}$, *l'*$S_{r-h'}$ *viene quindi a giacere in* Q.

Dopo ciò, siamo in grado di giudicare che cosa avverrà per nuove sovrapposizioni: giacchè, se nel fascio Φ lo spazio doppio $S_{h'_4-1}$ cade in $S_{h'_3-1}$, basterà applicare al fascio di caratteristica (4) ciò che si è detto per Φ quando $S_{h'_2-1}$ è caduto in $S_{h'_1-1}$ [1]): e così di seguito, fino ad esaurire tutti i $p+1$ spazî coincidenti in $S_{h'-1}$, e ripetere poi la stessa cosa per gli altri spazî multipli.

10. — Ad esempio, accenniamo tutti i casi possibili in S_3 di un fascio Φ di quadriche o della sua V_1^4 base.

I fasci Φ del 1.° tipo hanno le caratteristiche (n. 27, Cap. 4.°) [0000], [100], [11], [20] [2]) e godono di proprietà che si rilevano subito dal n. 8. Nel 1.° caso esistono quattro coni quadrici i cui vertici sono esterni a V_1^4, la quale ha un invariante assoluto (unico caso in cui si presenta): nel 2.° caso si ha una quadrica Q di Φ composta di due piani e però V_1^4 si spezza in due coniche, che si tagliano in due punti, e per le quali passano due coni quadrici: nel 3.° caso si hanno due quadriche di Φ spezzantesi in piani, e quindi la V_1^4 ha quattro punti doppi e si compone di quattro rette: nel 4.° caso la V_1^4, è una conica contata due volte, cioè le quadriche di Φ si toccano lungo questa conica.

Pei fasci Φ del 2.° tipo basta applicare le cose del n. 9. Quelli provenienti dal 1.° caso del 1.° tipo sono quattro. Il caso [(00) 00] dà una quartica con punto doppio a tangenti distinte, intersezioni del piano tangente in esso (alle quadriche del fascio) col cono avente il vertice nel punto stesso; quartica, per la quale passano due altri coni quadrici. Il caso [(00) (00)] è quello di una V_1^4 con due punti doppi distinti, la cui congiungente è di V_1^4, è però questa si spezza nella congiungente stessa e in una cubica passante per quei due punti. Il caso [(000) 0] dà una quartica con punto doppio, ma colla proprietà ulteriore che la quadrica d'intersezione del piano tangente in esso col cono del fascio che ha il vertice nel punto stesso è specializzata, cioè le tangenti nel punto doppio coincidono: onde V_1^4 ha in questo punto ciò che dicesi *cuspide*

---

1) Già l'essere $(h'_2-1\ ,\ h'_3-1)$ il primo gruppo caratteristico di (4) esprime, per ciò che si è detto al principio del presente n., che, se $h'_2=h'_3$, il fascio di $S_{r-h'}$ contiene un $S_{h'_2+h'_3-1}$ di punti doppî della sua base e quindi di punti di V_{r-2}^4, mentre, se $h'_2>h'_3$, in $S_{r-h'}$ si ha soltanto una $V_{h'_2+h'_3-2}^2$ della V_{r-2}^4.

2) Nella notazione di Segre:

[1111], [(11) 11], [(11) (11)], [(111) 1].

o *regresso:* e per essa passa un altro solo cono quadrico. Nel caso [(0000)] si ha una V_1^4, caso particolare del precedente, caratterizzato da ciò che la tangente nel punto cuspidale appartiene a V_1^4 (cfr. nota seconda del n. 9), la quale perciò si spezza in questa retta ed in una cubica che la tocca in quel punto [1]).

Dal 2.° caso del 1.° tipo provengono [(10) 0], [1 (00)], [(100)]: di cui il primo dà una V_1^4 composta di due coniche tangenti per le quali passa un altro solo cono; e il terzo, una V_1^4 composta di una conica e di due rette appoggiate ad essa in un punto, perchè l' S_1 polare dell' S_1 doppio della quadrica Q deve (al limite) giacere su questa (cfr. nota prima del n. 9), cioè su uno dei due piani che la formano, il quale contenendo due rette polari incontrantisi, è piano tangente comune (nel punto d' incontro) a tutte le quadriche di Φ. La caratteristica [1 (00)] dà una V_1^4 composta di una conica e di un paio di rette appoggiate alla conica e incontrantisi fra loro fuori di essa [2]).

Dal 3.° caso del 1.° tipo proviene soltanto [(11)], nel quale V_1^4 contiene una retta contata due volte, cioè le quadriche di Φ si raccordano lungo questa (ossia hanno in tutti punti di essa i medesimi piani tangenti) e quindi si segano inoltre secondo due rette dell' altro sistema che completano la V_1^4.

Infine dal 4.° caso del 1.° tipo si ha [(20)]. Per questo la sezione dell' S_2 doppio colle quadriche di Φ deve comporsi di due rette di diverso sistema, lungo le quali le quadriche sono raccordate, e che contate due volte costituiscono la V_1^4 [3]).

11. — Quante quadriche di un fascio Φ di S_r toccano *propriamente* (cioè in punti semplici delle quadriche stesse) un S_m generico?

Il fascio Φ si supponga anzitutto del 1.° tipo e di caratteristica

$$[k_1 - 1 , k_2 - 1 , \ldots , k_\tau - 1 , \ldots]$$

---

[1]) Nella notazione di Segre i quattro casi sono:

[211] , [22] , [31] , [4].

[2]) Nella notazione di Segre i tre casi sono:

[(21) 1], [(11) 2], [(31)].

[3]) Gli ultimi due casi, nella notazione di Segre, sono:

[(22)] , [(211)].

ove, essendo $\tau \geq 0$, si suppone che $k_i \geq r - m + 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$, e che ogni altro numero sia $< r - m + 1$. Lo spazio S_m segherà Φ in un fascio pure del 1.° tipo, perchè S_m taglia gli spazî doppî $S_{k_i - 1}$ di Φ in $S_{k_i - 1 + m - r}$ e le quadriche $V^2_{k_i - 2}$ (di punti doppi di V^4_{r-2}), nè indeterminate nè specializzate di quegli spazî (n. 8), in quadriche parimenti nè indeterminate nè specializzate, essendo S_m generico (onde, per il n. 9, gli $S_{k_i - 1 + m - r}$ non possono essere spazî doppî di sovrapposizione del fascio sezione); e perchè, per questa stessa ragione, S_m tocca quadriche del fascio in punti non giacenti su V^4_{r-2}. Per il detto fascio sezione la caratteristica è quindi

$$\left[k_1 - 1 + m - r\,,\, k_2 - 1 + m - r\,,\ldots,\, k_\tau - 1 + m - r\,,\, \overbrace{0\,,0\,,\ldots,\,0}^{x}\right]$$

indicando con x il numero incognito delle quadriche tangenti ad S_m. Si ha adunque (n. 2, Cap. 4.°)

$$\sum_1^\tau k_i - \tau(r - m) + x = m + 1\,,$$

cioè

$$x = m + 1 + \tau(r - m) - \sum_1^\tau k_i\,.$$

La stessa formola (riferendosi a spazî doppi semplici o sovrapposti) vale anche se il fascio è del 2.° tipo; giacchè, venendo a questo, come caso limite, da un fascio del 1.° tipo, avviene soltanto che in Φ, e quindi nel fascio sezione di S_m, gli spazî doppî si sovrappongano in vario modo, cioè i numeri delle caratteristiche soprascritte, restando i medesimi, si distribuiscano in varî gruppi caratteristici, ma l'applicazione del teorema del n. 16, Cap. 4.° dà sempre lo stesso risultato.

Così in S_3, preso ad es. per m il valore 2, si trova che per i fasci di caratteristica [0000] si ha $x = 3$, per quelli di caratteristica [100] si ha $x = 2$ e per quelli di caratteristica [11] e [20] si ha $x = 1$: e questi valori di x restano invariati per i fasci rispettivamente limiti di essi.

Il metodo precedente può servire a risolvere il problema anche per particolari posizioni di S_m.

12. — Veniamo ora a considerare gli ∞^1 S_{r-m-1} polari di un S_m rispetto

alle quadriche di un fascio

$$f + \lambda\varphi = 0:$$

essi costituiscono una varietà V_{r-m} ad $r-m$ dimensioni, della quale vogliamo cercare le equazioni e l'ordine.

Se $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ sono $m+1$ punti indipendenti di S_m, i loro iperpiani polari rispetto ad una quadrica generica del fascio si segano appunto nell'S_{r-m-1} polare di S_m. Sicchè, eliminando λ dalle loro equazioni

$$\sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

si ottengono le equazioni desiderate di V_{r-m} date dall'annullarsi della matrice:

$$\text{(5)} \qquad \left\| \begin{matrix} \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \ldots & \sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \ldots & \sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Queste equazioni pongono in evidenza un altro modo di generazione della V_{r-m}. Si osservi che le

$$\rho^{(0)} \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \ldots + \rho^{(m)} \sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho^{(0)} \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \ldots + \rho^{(m)} \sum_i x_i^{(m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

od anche

$$\sum_i (\rho^{(0)} x_i^{(0)} + \ldots + \rho^{(m)} x_i^{(m)}) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum_i (\rho^{(0)} x_i^{(0)} + \ldots + \rho^{(m)} x_i^{(m)}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

rappresentano, al variare dei parametri ρ, due stelle d'iperpiani che hanno per sostegno l'S'_{r-m-1} polare di S_m rispetto ad f e l'S''_{r-m-1} polare di S_m rispetto a φ; le quali sono riferite proiettivamente quando si fanno corrispondere due iperpiani dati dalle stesse ρ, cioè due iperpiani polari di uno stesso punto di S_m. Allora, in forza delle (5), è chiaro che tutti gli iperpiani di una stella passanti per un punto di V_{r-m} hanno per corrispondenti gli iperpiani dell'altra stella passanti per il medesimo punto, cioè due S_{r-m} delle due stelle passanti per un punto di V_{r-m} sono corrispondenti, e viceversa. Dunque V_{r-m} può anche definirsi come il luogo delle intersezioni degli S_{r-m} (incontrantisi) che si corrispondono nelle stelle proiettive S'_{r-m-1}, S''_{r-m-1}.

Tagliando queste stelle con uno spazio S_m generico, la proiettività delle due stelle si traduce in una omografia di S_m in sè stesso, che in generale ha soltanto $m+1$ punti uniti. Dunque [1]) *la varietà* V_{r-m} *è, in generale, dell'ordine* $m+1$, e può indicarsi con V^{m+1}_{r-m}.

Sia S_{r-2} polare di un punto $x^{(0)}$ di S_m rispetto alla quartica base V^4_{r-2} (n. 5); e sia V^m_{r-m+1} la varietà corrispondente allo spazio S_{m-1} determinato da $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$, in modo analogo a quello in cui V^{m+1}_{r-m} corrisponde allo spazio S_m. La V^m_{r-m-1} secondo cui l' S_{r-2} taglia V^m_{r-m+1} [1]) è contenuta tutta, come è chiaro, in V^{m+1}_{r-m}; dunque *gli* S_{r-2} *polari dei punti di* S_m *rispetto alla quartica* V^4_{r-2} *sono spazî secanti* [2]) *della varietà* V^{m+1}_{r-m}.

Se $S_m = S_1$, la V^{m+1}_{r-m} è una V^2_{r-1} contenente due sistemi di S_{r-2} (onde V^2_{r-1} è specializzata $r-4$ volte), polari di S_1 rispetto alle quadriche del fascio e polari dei punti di S_1 rispetto al fascio.

Se $S_m = S_{r-1}$, la V^{m+1}_{r-m} è una V^r_1 (curva razionale normale, come si vedrà in seguito) incontrata in $r-1$ punti dagli S_{r-2} polari dei punti dell' S_{r-1}.

13. — Ammettiamo il teorema, che si dimostrerà più tardi (n. 6, Cap. 9.°), che una varietà algebrica irriducibile V^k_g (di dimensione g e di ordine k) appartiene al più ad uno spazio S_{g+k-1}: e cerchiamo, col suo aiuto, di caratterizzare le varietà quadratiche situate sopra una quartica V^4_{r-2}.

Se V^4_{r-2} contiene una V^2_{m-1}, questa appartiene, per quel teorema, ad un S_m. La quadrica del fascio, di cui V^4_{r-2} è quartica base, passante per un punto di S_m, fuori di V^2_{m-1}, contiene per intero questo spazio S_m; e viceversa un S_m che stia sopra una quadrica del fascio taglia un'altra quadrica di esso in una V^2_{m-1} situata su V^4_{r-2}. Dunque *tutte e sole le*

---

[1]) Cfr. n. 3, Cap. 9.°.

[2]) Uno spazio lineare si dice *secante* per una varietà qualunque quando la taglia in una varietà di dimensione superiore a quella secondo cui essa è tagliata da uno spazio lineare generico della stessa dimensione.

varietà quadratiche della quartica V^4_{r-2} *sono fornite dagli spazî lineari delle quadriche del fascio.*

Le varietà quadratiche provenienti da una stessa quadrica del fascio si dicono corrispondenti ad una *generazione* della quartica, sicchè questa ha ∞^1 generazioni corrispondenti alle ∞^1 quadriche del fascio. In particolare essa ha delle *generazioni specializzate*, cioè quelle date dalle quadriche specializzate del fascio stesso.

Ad ogni generazione non specializzata corrispondono, se $r=2q$, ovvero $r=2q+1$, $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$ varietà quadratiche a $q-2$ ovvero a $q-1$ dimensioni, che sono quelle a numero massimo di dimensioni: e, se $r=2q+1$, esse formano due sistemi (n. 18, Cap. 6.°).

14. — Insieme alle varietà quadratiche determiniamo anche gli spazî lineari contenuti nella quartica V^4_{r-2}.

Perchè uno spazio lineare S_m stia su V^4_{r-2} occorre e basta che sia comune a due quadriche del fascio. Ora, perchè un S_m giaccia sopra una V^2_{r-1}, devono essere soddisfatte $\frac{m(m+3)}{2}+1$ condizioni, le quali esprimono che V^2_{r-1} contiene altrettanti punti generici di S_m (cfr. n. 1, Cap. 6.°). D'altra parte gli S_m di S_r sono $\infty^{(r-m)(m+1)}$: dunque, supposto

$$(r-m)(m+1)-m(m+3)-2=(m+1)(r-2m-2)\geq 0,$$

si ha che V^4_{r-2} *contiene* $\infty^{(m+1)(r-2m-2)}$ *spazî lineari ad m dimensioni.*

Se $r\geq 4$ esistono quindi sempre degli S_1. Preso uno di questi, si proietti da esso la V^4_{r-2} sopra un S_{r-2}; *la proiezione è biunivoca.* In vero un S_2 per il detto S_1 sega ciascuna di due quadriche del fascio ulteriormente in un S_1, e però la quartica ulteriormente in un punto, che ha per imagine quello in cui l'S_2 incontra l'S_{r-2} [1]).

15. — Nel caso $r=4$, il numero delle rette esistenti su una V^4_2 di S_4 è finito. Vogliamo determinare tale numero nel caso più generale, quello cioè in cui la caratteristica di V^4_2, o del fascio Φ di cui essa è base, è [00000], ossia nel caso che per V^4_2 passino cinque coni quadrici (di 1.ª specie) distinti.

Sia l una retta di V^4_2. Questa retta giacerà anche su uno qualunque f dei cinque coni quadrici ed anzi, proiettata dal vertice di questo cono,

---

[1]) Cfr. ROSATI, *Rappresentazione della quartica base di un fascio* ... (Annali di Matematica, 1 (3) 1899).

darà un piano (generatore) del cono stesso; il qual piano, contenendo una retta l di V_2^4 (e quindi di ogni quadrica per essa) dovrà contenerne un'altra l', e per conseguenza essere piano tangente nel punto ll' a tutte le quadriche di Φ. Si seghi ora coll'S_3 polare del vertice di f; si otterrà in S_3 un fascio di quadriche di cui farà parte la quadrica (non specializzata) f_1, sezione di S_3 con f, e si avrà che una retta di f_1 (intersezione di S_3 e del piano ll') sarà tangente alla quartica base del fascio stesso nel punto ll'. Viceversa, se in un punto di tale quartica una retta di f_1 è tangente ad essa quartica, poichè anche la retta che congiunge quel punto al vertice di f è tangente a tutte le quadriche di Φ (cfr. n. 3, Cap. 6.°), risulta che nel detto punto è tangente a tutte queste quadriche il piano che proietta la retta di f_1 dal vertice di f: e però in questo piano si avranno due rette di V_2^4 incrociate nel punto stesso.

La questione è quindi ridotta a determinare le rette di una quadrica f_1 (non specializzata) di S_3, tangenti ad un'altra quadrica o anche ad un cono quadrico (sezione di S_3 con uno degli altri quattro coni quadrici passanti per V_2^4). Proiettando dal vertice di questo cono le rette di f_1, la questione stessa è ridotta in fine alla determinazione dei piani tangenti comuni a due coni collo stesso vertice. Ciascuno dei quattro piani tangenti comuni a questi due coni contiene due rette (di sistema diverso) di f_1 e quindi due dei sunnominati punti di contatto, da ognuno dei quali partono due delle rette cercate. Adunque V_2^4 *possiede 16 rette* [1]).

Può notarsi che rispetto ad uno qualunque dei cinque coni di Φ, queste 16 rette si distribuiscono in 8 coppie, ciascuna coppia componendosi di due rette appartenenti ad un piano generatore di questo cono, e precisamente quattro coppie a quattro piani generatori di un sistema e le altre quattro a quattro piani generatori dell'altro sistema. Inoltre ciascuna delle 16 rette ne incontra altre cinque (per ognuno dei cinque coni avendosi una retta l_1 incontrante l).

16. — Una applicazione notevole della teoria della quartica base di un fascio di quadriche si ha nella geometria della retta di S_3 (cfr. n. 22 e seg., Cap. 6.°); giacchè un complesso quadratico, definito da una equa-

---

[1]) Nella Nota di Rosati, *Sugli spazî lineari di dimensione massima* ... (Rend. Ist. lomb., 32 (2), 1899) si trova il risultato generale: *essere* 2^{2p+2} *il numero degli* S_p *esistenti in una quartica* V_{2p}^4 *base di un fascio di quadriche* (*di un* S_{2p+2}) *avente la caratteristica* [0 , 0 ,..., 0].

zione quadratica in coordinate di rette è appunto una V_3^4 di S_5. Ci limiteremo ad un brevissimo cenno, rimandando il lettore al lavoro già citato di Segre [1]).

Un complesso quadratico si dirà del 1.° tipo se tale è la V_3^4 che lo rappresenta. Dal n. 7 si ha immediatamente che *l'equazione di un complesso quadratico del 1.° tipo si può sempre mettere sotto la forma*

$$\sum_1^6 k_i\, x_i^2 = 0\,,$$

prendendo le coordinate x_i *di retta rispetto ad una sestupla di complessi lineari due a due coniugati.* Il gruppo di 32 trasformazioni lineari relativo a tale sestupla dà 32 trasformazioni che mutano il complesso quadratico in sè stesso.

Dal teorema del n. 13 si ricava che *ogni complesso quadratico contiene* ∞^4 *rigate quadriche distribuite in* ∞^1 *generazioni diverse del complesso: ciascuna generazione essendo formate di* ∞^3 *rigate quadriche appartenenti a due sistemi distinti.* In particolare la generazione che corrisponde alla quadrica imagine dell'S_3 rigato dà le coniche e i coni del complesso.

Dal teorema del n. 14 si ha che *un complesso quadratico contiene* ∞^2 *fasci di raggi* [2]). Si ha altresì che un complesso quadratico è rappresentabile biunivocamente nello spazio ordinario [3]).

17. — Ci rimane a trattare il caso di un fascio di quadriche tutte specializzate.

Sia φ un tal fascio, del quale la quadrica generica sia specializzata h volte. Se gli spazï doppi di (due e però di) tutte le quadriche di φ hanno uno spazio d'intersezione S_{k-1}, segando con uno spazio S_{r-k}, indipendente da S_{k-1}, si ottiene un fascio di quadriche, nel quale la quadrica generica è specializzata $h-k$ volte (o non specializzata se $h=k$) e due spazï doppi di due quadriche del fascio non hanno punti comuni. Basta quindi esaminare questo caso, giacchè ogni altro nasce da esso per proiezione.

---

[1]) Cfr. nota [3]) al n. 22, Cap. 6.°.

[2]) I loro centri e i loro piani sono i punti e i piani tangenti di una superficie (singolare per il complesso), che è la cosidetta superficie di Kümmer (cfr. n. 30, Cap. 8.°).

[3]) Cfr. Caporali, *Sui complessi e sulle congruenze di 2.° grado* (Memorie dell'Accad. dei Lincei, 2 (3), 1878).

Abbiasi adunque un fascio φ di quadriche, così che una quadrica generica abbia un S_{h-1} doppio e due tali S_{h-1} non s'incontrino: e dicasi V_h la varietà (ad h dimensioni) luogo degli spazï doppi delle quadriche del fascio ed S_m lo spazio a cui V_h appartiene. L'iperpiano polare di un punto di V_h è il medesimo rispetto a tutte le quadriche del fascio φ (perchè è indeterminato rispetto a quella che ha ivi punto doppio) e passa inoltre per tutti gli spazï doppi, cioè contiene V_h e, per conseguenza, anche S_m, potendosi prendere su V_h $m+1$ punti indipendenti [1]. Anzi, se di tali $m+1$ punti si prendono gli iperpiani polari, si vede, per il ragionamento fatto, che S_m ha lo stesso spazio polare rispetto a tutte le quadriche di φ e che questo spazio polare passa per S_m, onde esso tocca in S_m le quadriche medesime.

Ora lo spazio tangente ad una quadrica h volte specializzata in un S_m passante pel suo S_{h-1} doppio è un $S_{r+h-m-1}$, come si riconosce subito direttamente o tagliando con un S_{r-h} indipendente dall'S_{h-1} e considerando la quadrica sezione (non specializzata). Sicchè si può concludere che *la condizione affinchè due quadriche con S_{h-1} doppï (indipendenti) determinino un fascio composto di tali quadriche è che abbiano comune uno spazio S_m (passante per i due S_{h-1} doppi) ed in esso abbiano il medesimo $S_{r+h-m-1}$ tangente.* La quale condizione necessaria, come dimostrammo, è anche sufficiente, perchè una quadrica che ha in un suo S_m un $S_{r+h-m-1}$ tangente deve essere specializzata, come subito si vede, (almeno) h volte.

18. — Quante sono le quadriche di un fascio φ che sono specializzate più di h volte? Mantenute le notazioni precedenti, tagliamo il fascio φ coll'$S_{r+h-m-1}$ tangente in S_m a tutte le quadriche di esso: otterremo in $S_{r+h-m-1}$ un fascio φ' di quadriche $m+1$ volte specializzate collo stesso spazio doppio S_m. Tagliando questo fascio con un $S_{r+h-2m-2}$ (di $S_{r+h-m-1}$) indipendente da S_m, si ottiene un fascio φ'' di quadriche non specializzate. Una quadrica di φ'', specializzata t volte, proiettata da S_m dà una quadrica di φ' specializzata $m+t+1$ volte; onde risulta la corrispondente quadrica di φ (cioè quella di cui essa è sezione) specializzata $h+t$ volte, perchè è toccata dall'$S_{r+h-m-1}$ in un S_{m+t}. Adunque le quadriche di φ specializzate più di h volte sono tante quante le quadriche specializzate di φ'' (o specializzate più di $m+1$ volte di φ'). Così, se il fascio φ'' è del 1.° tipo e di più le sue quadriche specializzate lo sono una

[1]) Cfr. n. 5, Cap. 9.°.

volta sola, si trovano $r+h-2m-1$ quadriche di φ, $h+1$ volte specializzate.

Se $m=r+h-m-2$, il fascio φ' si riduce ad S_m contato due volte e allora la quadrica di φ per un punto generico di $S_{r+h-m-1}=S_{m+1}$ contiene questo spazio e però è specializzata $h+1$ volte. Essa è l'unica soluzione del problema.

Dalla considerazione fatta segue che particolarità proiettive del fascio φ sono le particolarità proiettive del fascio φ'', cioè la caratteristica e gli invarianti assoluti di questo fascio.

19. — Ma vi è un'altra particolarità proiettiva del fascio φ proveniente dalla varietà V_h luogo degli S_{h-1} doppi delle quadriche del fascio stesso [1]).

Troviamo anzitutto l'ordine x di V_h, cioè il numero dei punti che V_h ha comuni con uno spazio generico S_{r-h} di S_r, o anche, poichè S_{r-h} sega S_m in un S_{m-h}, il numero dei punti che S_{m-h} ha comuni con V_h. Siccome in ogni punto di V_h le quadriche del fascio hanno lo stesso iperpiano tangente, è chiaro che S_{r-h} taglia il fascio dato in un fascio di quadriche, non specializzate, tutte passanti per S_{m-h} ed aventi in ciascuno di quegli x punti lo stesso S_{r-h-1} tangente. Questi x punti appartengono ad S_{m-h} perchè V_h appartiene ad S_m ed è irriducibile come il fascio φ, e perchè S_{m-h} è generico in S_m [2]). Inoltre i medesimi x punti sono indipendenti, per essere punti uniti dell'omografia che si ha in S_{r-h} come prodotto delle polarità rispetto a due quadriche (non specializzate) del detto fascio sezione. Dunque deve essere $x=m-h+1$ [3]) e la V_h in discorso si può indicare con V_h^{m-h+1}.

In seguito si vedrà (Cap. 12, 13) che le V_h^{m-h+1}, luogo di S_{h-1}, se $h=1$, sono tutte proiettivamente identiche, mentre, se $h>1$, si distin-

---

[1]) Gli $S_{h+t-1} (t\geq 1)$ delle quadriche del fascio $h+t$ volte specializzate sono in generale esterni ad S_m: soltanto tagliano questo spazio in S_{h-1} giacenti sopra V_h.

[2]) Cfr. n. 6, Cap. 9.°.

[3]) Ciascuno di questi punti uniti, essendo di contatto per le due quadriche, vale (in generale) per due dei punti uniti dell'omografia: sicchè i rimanenti punti uniti di essa, cioè i punti d'incontro dell'S_{r-h} cogli S_h doppi delle quadriche di φ (nel supposto che questo fascio non contenga quadriche specializzate più di $h+1$ volte) sono $r-h+1-2(m-h+1)=r+h-2m-1$, in accordo col n. 18.

guono proiettivamente per certi numeri che sono gli ordini di particolari curve (direttrici minime) esistenti in esse.

Non vi sono altre particolarità proiettive per i fasci φ oltre quella ora detta e l'altra indicata nel n. precedente: il che risulta nel modo più chiaro dalle equazioni (di Kronecker) dei fasci stessi [1]).

20. — Mostriamo infine che il numero h, che indica la specie delle quadriche del fascio φ, non può superare un certo limite.

Siccome S_m deve essere uno spazio lineare di una quadrica specializzata h volte, si ha dapprima (n. 17, Cap. 6.°) $m \leq \frac{r+h-1}{2}$, cioè m ha come valore massimo quello dei due numeri $\frac{r+h-1}{2}$, $\frac{r+h-2}{2}$ che è intero: onde può osservarsi che *il valore massimo dell'ordine* $m-h+1$ *della varietà* V_h *è quello dei due numeri* $\frac{r-h+1}{2}$, $\frac{r-h}{2}$ *che è intero.*

Poi, gli S_{h-1} doppî di due quadriche del fascio essendo indipendenti in S_m, si ha pure $m > 2(h-1)$. Quindi, se $\frac{r+h-1}{2}$ è intero, si ha $\frac{r+h-1}{2} > 2(h-1)$, cioè $h < \frac{r+3}{3}$; ma deve escludersi $h = \frac{r+2}{3}$, chè altrimenti non sarebbe $\frac{r+h-1}{2}$ intero. Se invece è intero $\frac{r+h-2}{2}$, si ha $\frac{r+h-2}{2} > 2(h-1)$ e però $h < \frac{r+2}{3}$. Si trova adunque in ogni caso quest'ultima diseguaglianza e per conseguenza si ha che *la specie* h *delle quadriche di un fascio, non ottenibile proiettando da un punto o da uno spazio fasci di quadriche a minor numero di dimensioni, non può superare quello fra i tre numeri* $\frac{r-1}{3}$, $\frac{r}{3}$, $\frac{r+1}{3}$ *che è intero.*

È poi facile vedere, mediante la proposizione del n. 17, che esistono effettivamente fasci di coni (non ottenibili con proiezione) di specie data non superiore al detto limite.

21. — Applichiamo le cose dette ai primi valori di r.

Per $r = 2, 3, 4$, la limitazione precedente mostra che si hanno soltanto fasci di cono di 1.ª specie. Per $r = 2$, si compongono di una retta fissa

---

[1]) Cfr. Segre, *Ricerche sui fasci di coni quadrici* (Atti della R. Accad. di Torino, 19, 1884).

e di una retta variabile in un fascio (avente il centro esterno a quella). Per $r=3$, si ha pure un solo caso, cioè di coni aventi una retta comune (luogo dei loro vertici) e toccantisi lungo di essa, i quali coni si tagliano ancora secondo una conica, il cui piano col piano tangente comune dà l'unica quadrica del fascio specializzata due volte (n. 18). Per $r=4$, il luogo dei vertici dei coni può essere una retta o una conica: nel primo caso i coni hanno comune quella sola retta e lungo essa il medesimo S_3 tangente, nel secondo caso hanno comune il piano della conica e null'altro (per determinarli bastando dare due coni con un S_2 comune).

Per $r=5$, può essere $h=1, 2$. Se $h=1$, si hanno fasci di coni con una retta comune e lungo essa un S_4 tangente, ovvero fasci di coni con un S_2 comune, contenente una conica luogo dei vertici, e lungo l'S_2 un medesimo S_3 tangente. Se $h=2$, si hanno fasci di coni aventi comune un S_3, in cui giace una rigata quadrica luogo delle rette doppie: un tale fascio essendo appunto determinato da due quadriche, con rette doppie sghembe, aventi comune l'S_3 a cui queste appartengono.

Per avere tutti i casi possibili occorre aggiungere successivamente i fasci che nascono per proiezione dai precedenti o da fasci di quadriche non specializzate. Così, per $r=2$, oltre il caso considerato del fascio costituito di una retta fissa e di una variabile in un fascio, vi è un altro caso, cioè del fascio dato dalle coppie di una involuzione quadratica in un fascio di rette, la quale è proiezione di una involuzione quadratica di punti di una retta (fascio di quadriche non specializzate sulla retta).

Osservisi poi che, per $r=1$, non esiste propriamente fascio di quadriche tutte specializzate, o, se si vuole, che un tal fascio è costituito dalle coppie di punti coincidenti in un punto doppio.

Capitolo 8.°

Ipersuperficie.

* 1. — Si consideri la totalità ∞^{r-1} dei punti dello spazio che colle loro coordinate soddisfano ad una equazione razionale intera omogenea di ordine n nelle coordinate correnti $x_0, \ldots, x_r$

$$(1) \qquad f(x_0, x_1, \ldots, x_r) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = 0,$$

ove la somma si estende a tutte le combinazioni $i_1 i_2 \ldots i_n$ degli $r+1$ numeri $0, 1, \ldots, r$ ad n ad n con ripetizione e si conviene che sieno eguali i coefficienti a che portano le permutazioni degli stessi n indici. Questa totalità si dice una *ipersuperficie (algebrica) di ordine* n, od anche *forma di ordine* n, attribuendo alla detta totalità la denominazione che l'Algebra assegna alla funzione f, e si indica con V^n_{r-1}.

La forma f contiene linearmente ed omogeneamente $\binom{r+1+n-1}{n} = \binom{r+n}{n} = \binom{r+n}{r}$ coefficienti indipendenti. Quindi, posto $N(n) = \binom{r+n}{r} - 1$, tutte le ipersuperficie di ordine n di S_r formano ciò che si chiama un *sistema lineare* $\infty^{N(n)}$ [1]. Per determinare una superficie occorrono $N(n)$ condizioni (indipendenti): se queste sono lineari (cioè si traducono in equazioni di primo grado nei coefficienti), si ottiene una sola ipersuperficie. Ad es., *per $N(n)$ punti generici di S_r passa una ed una sola ipersuperficie di ordine n.*

---

[1]) Cfr. n. 1, Cap. 10.°.

Una ipersuperficie (1) si dice *riducibile* o *irriducibile*, secondochè la forma $f(x_0 \dots x_r)$ si spezza o no nel prodotto di due o più forme. Una ipersuperficie riducibile è composta di ipersuperficie irriducibili.

* 2. — L'ordine n di una V^n_{r-1} ha un semplice significato geometrico: è il numero dei punti nei quali un S_1 generico di S_r incontra la V^n_{r-1} medesima. Infatti la (1) ed $r-1$ equazioni d'iperpiani generici hanno n soluzioni comuni che corrispondono alle radici di una equazione di grado n in una coordinata (ad es.), equazione ottenuta coll'eliminare dalle dette r equazioni le altre r coordinate. Un S_1 che abbia $n+1$ punti comuni con una V^n_{r-1} esiste per intero su essa, l'equazione ora nominata riducendosi, per avere $n+1$ radici, ad una identità.

In generale, uno spazio qualunque S_i, che si può pensare essere lo spazio fondamentale $A_0 A_1 \dots A_i$, taglia V^n_{r-1} in una V^n_{i-1}, che è una ipersuperficie di S_i in quanto la sua equazione nasce dalla (1) col farvi $x_{i+1} = \dots = x_r = 0$. Se un S_i ha comune con V^n_{r-1} una V^n_{i-1} ed inoltre un punto, quell'S_i giace per intero su V^n_{r-1} (come è chiaro facendo variare un S_1 di S_i per il punto).

* 3. — La totalità dei punti comuni a due o più ipersuperficie è ciò che dicesi loro *intersezione*. Per un noto teorema algebrico [1]) r ipersuperficie $V^{n_1}_{r-1}, V^{n_2}_{r-1}, \dots, V^{n_r}_{r-1}$ hanno, in generale, $n_1 n_2 \dots n_r$ punti d'intersezione e, se hanno $n_1 n_2 \dots n_r + 1$ punti comuni, ne hanno necessariamente infiniti costituenti una varietà od anche più varietà di dimensioni differenti.

Segue che i ipersuperficie $V^{n_1}_{r-1}, V^{n_2}_{r-1}, \dots, V^{n_i}_{r-1}$, essendo $i < r$, hanno con $r-i$ iperpiani generici, in generale, $n_1 n_2 \dots n_i$ punti d'intersezione, cioè quelle i ipersuperficie s'intersecano, in generale, in una totalità di punti, che ha $n_1 n_2 \dots n_i$ punti comuni con un S_i generico di S_r. Questa totalità si dice perciò una *varietà dell'ordine $n_1 n_2 \dots n_i$ e della dimensione $r-i$*, e si indica con $V^{n_1 n_2 \dots n_i}_{r-i}$ [2]). Ma se le $V^{n_1}_{r-1}, V^{n_2}_{r-1}, \dots, V^{n_i}_{r-1}$ hanno comune una $V^{n_1 n_2 \dots n_i}_{r-i}$ ed un punto, ciascun S_i generico (dato da $r-i$. S_{r-1} generici) per il punto avrà colla intersezione di quelle ipersuperficie $n_1 n_2 \dots n_i + 1$ punti comuni e quindi infiniti; onde un S_{i-1} generico (che

1) Cfr. CAPELLI, libro citato, pag. 581.

2) Il caso precedente $(i = r)$ si raccoglie sotto questa indicazione, scrivendo $V_0^{n_1 n_2 \dots n_r}$.

può essere congiunto al punto stesso con un S_i) avrà colla detta intersezione punti comuni (in numero finito od infinito). Questa intersezione sarà adunque una varietà di dimensione $> r-i$ e potrà anche essere formata di varietà di varie dimensioni (di cui una di dimensione $> r-i$) [1]).

4. — Se si considerano $i+1$ ipersuperficie dello stesso ordine n (linearmente indipendenti) ed il sistema lineare ∞^i da esse determinato [2]), tutte le ipersuperficie del sistema hanno comuni i punti della varietà (se esiste) intersezione delle $i+1$ ipersuperficie considerate. Questa varietà si dice *varietà base* del sistema lineare e, se $i+1 \leq r$, essa esiste certamente ed è, in generale, per ciò che si è detto nel n. precedente, una $\overset{i+1}{V^n_{r-i-1}}$.

Con facile dimostrazione si trova che *le ipersuperficie di ordine n che passano per $N(n)-i$ punti generici di S_r costituiscono un sistema lineare ∞^i, e, se $i \leq r-1$, hanno comune una varietà $\overset{i+1}{V^n_{r-i-1}}$ (se $i=r-1$, n^r punti), determinata così da quegli $N(n)-i$ punti.* Basta infatti nell'equazione generica di una ipersuperficie di ordine n porre le coordinate degli $N(n)-i$ punti dati e dalle $N(n)-i$ equazioni che ne risultano ricavare i valori di altrettanti coefficienti espressi (linearmente ed omogeneamente) per gli $i+1$ rimanenti e questi valori sostituire poi nella suddetta equazione.

5. — Un punto si dice s^{uplo} per una V^n_{r-1} quando, preso un S_1 *generico* uscente dal punto e costruita (n. 2) una equazione di grado n che dia gli n punti in cui l'S_1 interseca V^n_{r-1}, la radice di tale equazione corrispondente a quel punto è s^{upla} [3]), o, come si dice brevemente, quando il detto S_1 ha s intersezioni raccolte nel punto, od anche ha ivi un incontro s^{punto} colla V^n_{r-1}. È chiaro che un punto s^{uplo} per una V^n_{r-1} è s^{uplo} (almeno) anche per tutte le sue sezioni ottenute con spazî lineari passanti per quel punto.

[1]) Per quest'ultima dimostrazione e per la nozione di varietà qui adoperata cfr. i n. 1, 2, 3 del Cap. 9.°. Aggiungasi che la dimensione di ciascuna varietà comune ad $i \leq r$ ipersuperficie è sempre $\geq r-i$ (cfr. n. 31, ultimo alinea, dello stesso Cap. 9.°).

[2]) Cfr. n. 1, Cap. 10.°.

[3]) È facile vedere che tale definizione è indipendente da una trasformazione di coordinate (Cfr. Noether, *Rationale Ausführung der Operationen*... (Math. Ann., 23, 1884)).

Una V_{r-1}^n con un S_t di punti n^{upli} $(0 \leq t \leq r-1)$ è costituita di S_{t+1} passanti per l'S_t, come è evidente (n. 2) considerando gli S_1 congiungenti i punti di V_{r-1}^n ai punti dell'S_t. Una tal superficie si dice *cono* ed S_t suo *vertice*. Se $t=r-2$, si ha un fascio di n iperpiani; se $t=r-1$, si ha un iperpiano contato n volte. Una V_{r-1}^n con un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ si dice *monoide*.

6. — Se y, z sono due punti qualunque di S_r, le coordinate degli n punti d'intersezione della retta yz colla V_{r-1}^n, rappresentata dalla (1), sono

$$\lambda y_i + \mu z_i \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,r)\,,$$

quando per $\frac{\lambda}{\mu}$ vi si sostituiscano le radici dell'equazione di grado n in $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\lambda^n f_y + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}\mu\,\Delta_z f_y + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}\mu^2\Delta_z^2 f_y + \ldots = 0. \tag{2}$$

Questa equazione infatti proviene dalla (1), sostituendo $\lambda y_i + \mu z_i$ ad x_i, se si pone $f_y = f(y_0 y_1 \ldots y_r)$ e

$$\Delta_z^s f_y = \frac{1}{(n-s+1)\ldots n}\left(z_0\frac{\partial f}{\partial y_0} + \ldots + z_r\frac{\partial f}{\partial y_r}\right)^{(s)}$$

con convenzione notissima.

L'operazione Δ_z^s si dice *polarizzazione* rispetto al polo z, e si verificano subito per essa le proprietà espresse dalle identità

$$\Delta_z^s f_y \equiv \Delta_y^{n-s} f_z$$

$$\Delta_z^s \Delta_z^t f_y \equiv \Delta_z^{s+t} f_y$$

$$\Delta_z^s \Delta_{z'}^t f_y \equiv \Delta_{z'}^t \Delta_z^s f_y\,.$$

L'equazione $\Delta_z^s f_x = \Delta_x^{n-s} f_z = 0$ rappresenta una ipersuperficie di ordine $n-s$ che si dice *la polare* s^{ma} *o di ordine* $n-s$ *di* z *rispetto a* V_{r-1}^n: in particolare la polare $(n-1)^{\text{ma}}$ dicesi anche *iperpiano polare* e l'$(n-2)^{\text{ma}}$, *quadrica polare* [1]). Quindi le identità precedenti forniscono subito i teoremi fondamentali:

---

[1]) Ad es., l'iperpiano polare di y rispetto alla ipersuperficie

$$x_0 x_1 x_2 \ldots x_r = 0$$

(costituita dalle faccie della piramide fondamentale) è

$$\Sigma_i\, y_0 y_1 \ldots y_{i-1} x_i y_{i+1} \ldots y_r = 0\,.$$

Se y è il punto unità, il suo iperpiano polare è l'iperpiano unità (Cfr. n. 4, Cap. 2.°).

1° *Se la polare* s^{ma} *di* z *rispetto a* V^n_{r-1} *passa per* y, *la polare* $(n-s)^{ma}$ *di* y *passa per* z (teorema di reciprocità).

2° *La polare* s^{ma} *di* z *rispetto alla polare* t^{ma} *dello stesso punto* z *rispetto a* V^n_{r-1} *è la polare* $(s+t)^{ma}$ *di* z *rispetto a* V^n_{r-1}.

3° *Se si costruisce la polare* s^{ma} *di un punto* z *rispetto a* V^n_{r-1}, *poi la polare* t^{ma} *di un altro punto* z' *rispetto a quella polare, e così di seguito, si giunge ad una ipersuperficie* (detta *polare mista), che è indipendente dall'ordine delle polarizzazioni.*

7. — *La relazione di una ipersuperficie alle sue ipersuperficie polari è una relazione proiettiva:* cioè una trasformazione lineare delle y_i nelle Y_i (e la stessa delle z_i nelle Z_i), che cambia f_y in φ_Y, cambia pure $\Delta^s_z f_y$ in $\Delta^s_Z \varphi_Y$ [1]. In fatti le $\lambda y_i + \mu z_i$ si trasformeranno linearmente nelle $\lambda Y_i + \mu Z_i$, qualsiansi λ, μ, colla stessa trasformazione lineare suddetta: sicchè si avrà, in forza delle formole di trasformazione,

$$f_{\lambda y + \mu z} = \varphi_{\lambda Y + \mu Z}$$

qualsiansi λ, μ; e per conseguenza (ricordando lo sviluppo (2)), sempre in forza di quelle formole,

$$\Delta^s_z f_y = \Delta^s_Z \varphi_Y ,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

8. — Poniamo per un momento il punto z nel punto fondamentale A_0 (cioè di coordinate $1, 0, \ldots, 0$) e tagliamo l'ipersuperficie V^n_{r-1}, data dalla (1), coll'iperpiano fondamentale $x_1 = 0$, che passa per quel punto. La sezione sarà una ipersuperficie di $x_1 = 0$, la quale in questo iperpiano avrà per equazione

$$[f]_{x_1=0} = 0 ,$$

di cui il primo membro indica il risultato della sostituzione di $x_1 = 0$ in f: e la prima polare di z rispetto a questa ipersuperficie sarà

$$\frac{\partial [f]_{x_1=0}}{\partial x_0} = 0 .$$

Ora, poichè

$$\frac{\partial [f]_{x_1=0}}{\partial x_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_0}\right]_{x_1=0} ,$$

---

[1] Ciò si esprime algebricamente dicendo che le forme polari sono covarianti, a due (o più) serie di variabili cogredienti, della forma fondamentale.

la detta prima polare è anche l'intersezione di $x_1=0$ colla prima polare di z rispetto a V^n_{r-1}. La proprietà si estende subito alla seconda polare di z rispetto a V^n_{r-1}, perchè essa è la prima polare della prima polare (n. 6), e così via. Dunque *un S_{r-1} per un punto z taglia una V^n_{r-1} e la polare s^{ma} di z rispetto a V^n_{r-1} in una V^n_{r-2} e nella polare s^{ma} di z rispetto a V^n_{r-2}* (ipersuperficie di S_{r-1}). In generale *uno spazio lineare qualunque S_i, che passa per un punto z, taglia una V^n_{r-1} e la polare s^{ma} di z rispetto a V^n_{r-1} in una V^n_{i-1} e nella polare s^{ma} di z rispetto a V^n_{i-1}* (ipersuperficie di S_i), come si riconosce con facilità applicando il teorema precedente alla sezione di V^n_{r-1} con un iperpiano per S_i, poi alla sezione di questa sezione con un secondo iperpiano per S_i, ecc..

9. — Ora supponiamo che y sia un punto di V^n_{r-1}, e cerchiamo il luogo dei punti z tali che la retta yz abbia in y un incontro bipunto con V^n_{r-1}. Nell'ipotesi fatta la (2) manca del primo termine, e, perchè z goda della detta proprietà, occorre e basta che manchi anche del 2.° termine, cioè che sia

$$\Delta_z f_y = 0 .$$

Questa equazione, interpretate le z come coordinate correnti, rappresenta un iperpiano (passante per y); quindi, detta *tangente* a V^n_{r-1} una retta che abbia con essa un incontro bipunto, si ha *che le tangenti a V^n_{r-1}, in un suo punto generico sono contenute in un iperpiano,* detto *iperpiano tangente* in quel punto alla V^n_{r-1}. Questo iperpiano è l'iperpiano polare di y rispetto a V^n_{r-1}: e viceversa, se un punto giace nel proprio iperpiano polare, si trova (per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee) che il punto è di V^n_{r-1}, e quindi l'iperpiano polare è l'iperpiano tangente. Poichè l'iperpiano polare di un punto rispetto a V^n_{r-1} è tale rispetto a qualsiasi sua polare (n. 6), segue che *le ipersuperficie polari di un punto generico di V^n_{r-1}, rispetto ad essa, non solo passano per il punto, ma ivi toccano la V^n_{r-1}* (cioè *hanno ivi il medesimo iperpiano tangente di V^n_{r-1}*).

10. — Quando accada che l'iperpiano polare di un punto y sia indeterminato, cioè si abbia identicamente $\Delta_z f_y = 0$, ossia quando sono nulle tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_y}{\partial y_i}$ $(i=0,1,\dots,r)$ e quindi (per il ricordato teorema di Eulero) anche f_y, non solo y giace sulla ipersuperficie, ma è punto doppio di essa, giacchè si riconosce, ricorrendo alla (2), che una retta generica per y ha ivi un incontro bipunto colla superficie: e viceversa. Adunque *condizione necessaria e sufficiente perchè un punto y sia doppio*

per una V^n_{r-1} è che sia indeterminato l'iperpiano polare di y. Ne discende (n. 6) che *un punto y doppio per V^n_{r-1} è tale per tutte le sue ipersuperficie polari (d'ordine >1) rispetto al punto stesso.*

In particolare si ha la quadrica polare di y

$$\Delta^2_z f_y = 0 ,$$

specializzata almeno una volta, la quale, mediante la solita equazione (2), si vede *essere il luogo dei punti z tali che la retta zy abbia in y un contatto tripunto con V^n_{r-1}.* Questa quadrica si dice *cono tangente* in y a V^n_{r-1}. Essa è (n. 6) quadrica polare di y rispetto a tutte le ipersuperficie polari di y (d'ordine >2), e però *queste hanno nel punto doppio y lo stesso cono tangente della V^n_{r-1}.*

Un punto doppio di V^n_{r-1} si dice *biplanare*, se il cono tangente è composto di due iperpiani, ed *uniplanare*, se è un iperpiano doppio.

11. — La quadrica polare di un punto y qualunque di S_r rispetto a V^n_{r-1} ha l'equazione (x_i coordinate correnti)

$$\Delta^2_x f_y = \sum_{ik} \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_i \, \partial y_k} x_i x_k = 0 .$$

Se questa quadrica è un cono, cioè ha un punto z doppio, devono coesistere le prime derivate parziali nel punto z si devono annullare.

(3) $$\sum_i \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_i \, \partial y_k} z_i = 0 \qquad (k = 0 , 1 , \ldots , r) ,$$

le quali esprimono anche che la prima polare di z, data dalla $\sum_i \frac{\partial f_z}{\partial x_i} z_i = 0$, ha un punto doppio in y. Dunque *se la quadrica polare di y ha un punto doppio in z, la prima polare di z ha un punto doppio in y, e viceversa.* (30)

Inoltre la condizione di coesistenza delle (3) è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_0^2} & \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_0 \, \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_0 \, \partial y_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_r \, \partial y_0} & \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_r \, \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_y}{\partial y_r^2} \end{vmatrix} = 0 ;$$

e quindi *il luogo dei poli delle quadriche polari con punto doppio ovvero* (r+1) è l'ordine del determinante, (n-2) l'ordine di ogni termine del determinante

dei punti doppî delle prime polari è una ipersuperficie $V_{r-1}^{(r+1)(n-2)}$ *di ordine* $(r+1)(n-2)$, detta *hessiana* di V_{r-1}^{n}.

Se $n=3$ si ha che, se la quadrica polare di z ha un punto doppio in y, anche la quadrica polare di y ha un punto doppio in z; e allora l'hessiana è il luogo dei poli delle quadriche polari con punto doppio e anche di questi punti doppi (e si ha una corrispondenza biunivoca involutoria dell'hessiana in sè). Se $n>3$, il luogo dei punti doppî delle quadriche polari o dei poli delle prime polari con punto doppio è in generale distinto dall'hessiana e dicesi *steineriana*.

L'hessiana e la steineriana di una V_{r-1}^{n}, per la proprietà del n. 7 e per la loro definizione, hanno colla V_{r-1}^{n} relazione proiettiva, cioè, come dicesi, sono sue ipersuperficie covarianti. (31)

12. — I punti della varietà intersezione di V_{r-1}^{n} con la sua hessiana (varietà che evidentemente contiene i punti doppi di V_{r-1}^{n} quando esistono) godono di una proprietà che è utile osservare. (32)

Sia y un tal punto (non doppio per V_{r-1}^{n}): la sua quadrica polare V_{r-1}^{2} ha un punto doppio diverso da y (altrimenti il suo iperpiano polare sarebbe indeterminato e quindi y doppio) e tocca V_{r-1}^{n} in y; per conseguenza l'intersezione di V_{r-1}^{2} coll'iperpiano tangente a V_{r-1}^{n} in y è una V_{r-2}^{2} con un S_1 doppio: e reciprocamente. D'altra parte, come subito si vede, per il solito sviluppo (2), questa V_{r-2}^{2} è costituita dalle rette che in y hanno un contatto tripunto con la V_{r-1}^{n}. Dunque, *mentre per un punto generico di una ipersuperficie* V_{r-1}^{n} *le rette che hanno ivi un incontro tripunto con essa riempiono una* V_{r-2}^{2} *con un solo punto doppio (in y), le rette medesime riempiono una* V_{r-2}^{2} *con un* S_1 *doppio per i punti y che giacciono sulla varietà intersezione di* V_{r-1}^{n} *colla sua hessiana*, punti detti *parabolici* per V_{r-1}^{n}.

Se V_{r-1}^{n} non possiede ∞^{r-2} punti doppî, la varietà dei punti parabolici è una $V_{r-2}^{n(n-2)(r+1)}$.

13. — Con ragionamenti analoghi a quelli fatti pei punti doppî delle ipersuperficie (n. 10) si arriva al teorema generale: — *Se un punto y è* s^{uplo} *per* V_{r-1}^{n}, *sono indeterminate le ipersuperficie polari di y degli ordini* $1, 2, \ldots, s-1$. *La polare di y di ordine s è un cono col vertice in y (cono tangente) costituito da tutte le rette che hanno in y un incontro* $(s+1)^{\text{punto}}$. *Le polari di y di ordine superiore ad s hanno in y pure un punto* s^{uplo} *e lo stesso cono tangente della* V_{r-1}^{n}.

Il cono tangente in un punto s^{uplo} può spezzarsi in vario modo: se si spezza in s iperpiani il punto si dice *s-planare*.

Se y è un punto s^{uplo} di V^n_{r-1} data dalla $f=0$, in y si annullano tutte le derivate parziali di 1.°, 2.°,..., $(s-1)$.° ordine di f, ma non tutte le derivate parziali di ordine s. Di più, come l'annullarsi di tutte le derivate di $(s-1)$.° ordine trae con sè, per il teorema di Eulero, l'annullarsi delle derivate di $(s-2)$.°, $(s-3)$.°, ..., 2.°, 1.° ordine e della f stessa, così si riconosce subito che *porre ad una* V^n_{r-1} *la condizione di avere un punto* s^{uplo} *in un punto assegnato equivale ad imporle* $\binom{r+1+s-1-1}{s-1}=\binom{r+s-1}{s-1}=\binom{r+s-1}{r}$ *condizioni lineari*. Eliminando da queste le coordinate del punto s^{uplo}, si ha invece che *porre ad una* V^n_{r-1} *la condizione di avere un punto* s^{uplo} *non assegnato, equivale ad imporle* $\binom{r+s-1}{r}-r$ *condizioni non lineari*: donde segue, per essere questo numero >0, che una V^n_{r-1} *generale (cioè avente una equazione a coefficienti generici) non ha alcun punto multiplo*.

14. — Per il rigore delle conclusioni precedenti è necessario notare che le $\binom{r+s-1}{r}$ condizioni lineari che devono essere soddisfatte perchè una V^n_{r-1} abbia un punto s^{uplo} in un dato punto y sono *linearmente indipendenti*.

Ciò si vede nel modo più semplice, riferendo la V^n_{r-1} ad una piramide fondamentale avente in y (ad es.) il vertice A_0 (di coordinate $1, 0, ..., 0$); il che giova anche per altre questioni. Sia l'equazione di V^n_{r-1} ordinata rispetto ad x_0:

$$u_0 x_0^n + u_1 x_0^{n-1} + \dots + u_n = 0,$$

ove le u_i indichino forme di ordine i delle variabili $x_1, x_2, ..., x_r$. Perchè A_0 sia s^{uplo} (anche $s=1$) è necessario e sufficiente che siano identicamente nulle $u_0, u_1, ..., u_{s-1}$, cioè che l'equazione si riduca alla forma

$$u_s x_0^{n-s} + u_{s+1} x_0^{n-s-1} + \dots + u_n = 0.$$

Per convincersene si può applicare il teorema generale del n. 13: ovvero osservare che sostituendo nell'equazione dell'ipersuperficie le coordinate $\lambda : \mu z_1 : \mu z_2 : \dots : \mu z_r$ di un punto variabile $\left(\text{al variare di } \frac{\lambda}{\mu}\right)$ sopra una retta uscente da A_0, deve aversi una equazione in $\frac{\lambda}{\mu}$ con una radice ∞ multipla secondo s, e però nell'equazione stessa devono mancare i termini contenenti x_0 a grado superiore ad $n-s$. Similmente si trova che l'equazione $u_s=0$ rappresenta il cono tangente a V_{r-1}^n in A_0.

L'esistenza del punto s^{uplo} richiedendo l'annullarsi degli $\binom{r+s-1}{r}$ coefficienti delle $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$, l'affermazione superiore è manifestamente dimostrata.

15. — Una V_{r-1}^n abbia in y un punto s^{uplo}. La polare V_{r-1}^s di y, di ordine s, è un cono col vertice in y e la polare V_{r-1}^{s+1}, d'ordine $s+1$, è una ipersuperficie con un punto s^{uplo} in y o un monoide, il quale, come V_{r-1}^n, ha in y quel cono per cono tangente (n. 13). Sicchè, se si congiunge y con un altro punto comune al cono e al monoide, si ha un S_1 che giace in amendue (avendo già in y un incontro $(s+1)^{\text{punto}}$ col monoide). Un tale S_1 ha un incontro $(s+2)^{\text{punto}}$ in y con la V_{r-1}^n, perchè (essendo z un punto di S_1) lo sviluppo (2) ora diviene

$$\binom{n}{s+2}\lambda^{n-s-2}\mu^{s+2}\Delta_z^{s+2}f+\ldots=0:$$

quindi, osservando che V_{r-1}^s, V_{r-1}^{s+1} si tagliano in una $V_{r-2}^{s(s+1)}$ e che quelle due ipersuperficie sono pure polari di y rispetto alle polari di y di ordine superiore ad $s+1$, si ha che *le rette aventi un incontro* $(s+2)^{\text{punto}}$ *con una* V_{r-1}^n *in un suo punto* s^{uplo} *riempiono una varietà* $V_{r-2}^{s(s+1)}$ *ed hanno pure un incontro* $(s+2)^{\text{punto}}$ *con ogni polare di* y *(di ordine* $>s+1$*)*.

Segue, in modo analogo, che l'intersezione $V_{r-3}^{s(s+1)(s+2)}$ di questa $V_{r-2}^{s(s+1)}$ con la polare di ordine $s+2$ di y è formata di S_1 aventi incontro $(s+3)^{\text{punto}}$ con V_{r-1}^n e, così continuando, si giunge a dimostrare che *le rette aventi un incontro* $(s+i)^{\text{punto}}$ *con una* V_{r-1}^n *in un suo punto* s^{uplo} *riempiono una varietà* $V_{r-i}^{s(s+1)\ldots(s+i-1)}$. La totalità di queste rette è quindi ∞^{r-i-1}, onde deve essere $i \leq r-1$. Se si prende i così che sia $s+i=n+1$, e ciò si potrà, per la precedente diseguaglianza, quando si abbia $r+s-n-2 \geq 0$, si trova che *le rette passanti per il punto* s^{uplo} *e giacenti su* V_{r-1}^n *costituiscono una* $V_{r+s-n-1}^{s(s+1)\ldots(n-1)n}$ [1]). Così, se V_{r-1}^n è un monoide, queste rette formano una $V_{r-2}^{(n-1)n}$.

Se il punto y è il vertice A_0 della piramide fondamentale, cioè l'equazione della ipersuperficie è quella data nel n. 14, il luogo degli S_1 aventi

[1]) È ben inteso che questo teorema e quello avanti valgono in generale. In casi particolari la varietà in discorso può avere dimensione maggiore della indicata ed anche comporsi di varietà di varie dimensioni, ecc. (cfr. n. 3).

in A_0 un incontro $(s+i)^{\text{punto}}$ è rappresentato dalle equazioni $u_s = 0$, $u_{s+1} = 0, \ldots, u_{s+i-1} = 0$.

I risultati precedenti sono validi anche per un punto semplice ($s = 1$).

16. — Se r ipersuperficie hanno in un punto y un punto s_1^{uplo}, s_2^{uplo}, $\ldots$, s_r^{uplo} rispettivamente, si può dimostrare [1]) che *il punto* y *assorbe almeno* $s_1 s_2 \ldots s_r$ *intersezioni delle* r *ipersuperficie e ne assorbe precisamente questo numero se le* r *ipersuperficie non hanno in* y *tangenti comuni,* cioè i coni tangenti in y alle r ipersuperficie non hanno generatrici comuni, il che suole esprimersi dicendo che *le* r *ipersuperficie presentano in* y *il caso semplice.*

Segue che, se si hanno k $(<r)$ ipersuperficie aventi in un punto y un punto s_1^{uplo}, s_2^{uplo}, $\ldots$, s_k^{uplo} rispettivamente, la loro varietà V_{r-k} d'intersezione è incontrata da un S_k generico (comune ad $r-k$ iperpiani generici) per y, in almeno $s_1 s_2 \ldots s_k$ punti raccolti in y, cioè, come dicesi [2]), *ha il punto* y *multiplo almeno secondo* $s_1 s_2 \ldots s_k$: *ha il punto* y *multiplo precisamente secondo questo numero, se i coni tangenti in* y *alle ipersuperficie non hanno a comune alcun cono di dimensione* $r-k+1$ (o di dimensione $r-k$ se si considera come totalità di S_1 partenti da y), il che pure si esprime dicendo che *le* k *ipersuperficie presentano in* y *il caso semplice.*

17. — Determiniamo la *classe* di V_{r-1}^n, cioè il numero dei suoi iperpiani tangenti passanti per un S_{r-2} generico [3]).

Se P_1 è un punto qualunque di S_r, si vede subito per il teorema di reciprocità (n. 6) che tutti e soli gli iperpiani tangenti a V_{r-1}^n e passanti per P_1 sono quelli che toccano V_{r-1}^n nei punti della varietà d'intersezione di questa ipersuperficie colla prima polare di P_1 rispetto alla medesima; quindi abbiamo, proiettando questi punti da P_1, che *le tangenti condotte da un punto* P_1 *generico di* S_r *ad una* V_{r-1}^n *costituiscono un cono (circoscritto) di ordine* $n(n-1)$. Facilmente si vede pure (cfr. anche n. 15) che le rette partenti da P_1 ed aventi colla V_{r-1}^n un incontro tripunto sono quelle che vanno ai punti d'intersezione di V_{r-1}^n, della prima e seconda

---

[1]) Una dimostrazione algebrica è data da BERZOLARI nella Memoria, *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche* (Annali di Matem., 24, 1896).

[2]) Cfr. n. 3, Cap. 9.°.

[3]) Per la legge di dualità, accanto ai luoghi di punti vanno considerati gli *inviluppi* di iperpiani, pei quali si ha il concetto di *classe* correlativo a quello di ordine e si hanno proprietà correlative alle esposte.

polare di P_1, epperò *formano una varietà (di dimensione $r-2$) di ordine* $n(n-1)(n-2)$: ecc..

Si ripeta la precedente considerazione per $r-1$ punti indipendenti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ di un S_{r-2} generico e si troverà che gli iperpiani tangenti a V_{r-1}^n per questo S_{r-2} hanno i loro punti di contatto nei punti comuni a V_{r-1}^n e alle prime polari di $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$. Dunque *la classe di una V_{r-1}^n generale è data da $n(n-1)^{r-1}$.*

Nell'enunciato di questo teorema abbiamo posta la condizione che la V_{r-1}^n debba essere generale: perchè, quando la V_{r-1} possegga punti multipli, vi è da fare una modificazione.

Anzitutto notiamo che, quando una ipersuperficie V_{r-1}^n ha un punto y s^{uplo} $(s>1)$, ogni iperpiano per y può ritenersi come tangente alla V_{r-1}^n, in quanto le rette dell'iperpiano uscenti da y hanno in questo punto un incontro (almeno) bipunto colla V_{r-1}^n. Ma ordinariamente in un punto s^{uplo} si chiamano iperpiani tangenti alla ipersuperficie solo quelli tangenti al cono tangente in quel punto all'ipersuperficie stessa: quindi è chiaro che la presenza di punti multipli nella V_{r-1}^n porta ad una diminuzione della classe, perchè, come ora mostreremo, tutte le prime polari passano pei detti punti multipli.

✱ 18. — Supponiamo che il punto y s^{uplo} di V_{r-1}^n sia il vertice A_0 della piramide fondamentale. Allora l'equazione della ipersuperficie ha l'aspetto (n. 14)

$$u_s x_0^{n-s} + \ldots + u_n = 0\,;$$

e quindi l'equazione della prima polare di un punto z generico sarà

$$\left(z_1 \frac{\partial u_s}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u_s}{\partial x_2} + \ldots + z_r \frac{\partial u_s}{\partial x_r}\right) x_0^{n-s} + \ldots = 0$$

ove il coefficiente di x_0^{n-s} non può essere nullo, altrimenti (essendo z generico) dovrebbe essere u_s identicamente nullo. Adunque *quella prima polare ha un punto* $(s-1)^{\text{uplo}}$ *nel punto* A_0 s^{uplo} *di* V_{r-1}^n. Inoltre il cono tangente nel punto stesso alla prima polare ha l'equazione

$$z_1 \frac{\partial u_s}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u_s}{\partial x_2} + \ldots + z_r \frac{\partial u_s}{\partial x_r} = 0$$

e questo non è altra cosa, facendo della geometria nella stella A_0, che *la prima polare della retta $A_0 z$ rispetto al cono tangente in A_0 alla V_{r-1}^n.*

Ciò posto, ritorniamo alla considerazione del n. 17, cioè, presi in un S_{r-2} generico $r-1$ punti indipendenti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$, consideriamo le loro prime polari; ciascuna delle quali avrà in un punto y s^{uplo} di V^n_{r-1} un punto $(s-1)^{\text{uplo}}$. Se gli $r-1$ coni tangenti a queste prime polari in y hanno una generatrice comune col cono tangente alla V^n_{r-1} nello stesso punto, l'iperpiano polare della generatrice rispetto a questo cono tocca in essa il cono medesimo e inoltre, per la proposizione ora dimostrata e per il teorema di reciprocità (n. 6), deve contenere le rette $yP_1, yP_2, \ldots, yP_{r-1}$ e quindi l'S_{r-2}. Ma ciò è assurdo, perchè l'S_{r-2} dovrebbe giacere in un iperpiano tangente al cono che tocca in y la V^n_{r-1}, mentre è un S_{r-2} generico. L'assurdo si toglie soltanto supponendo che l'iperpiano polare della suddetta generatrice rispetto a questo cono sia indeterminato, cioè la generatrice stessa doppia per il cono. Se ciò si esclude, le ipersuperficie polari hanno in y precisamente $s(s-1)^{r-1}$ intersezioni (n. 16): e quindi *un punto s^{uplo} di una V^n_{r-1}, nel quale il cono tangente non ha generatrice multipla, diminuisce la classe della V^n_{r-1} di $s(s-1)^{r-1}$ unità.* In ogni altro caso la diminuzione è maggiore di questo numero.

19. — Applichiamo le cose esposte ad una interessante ipersuperficie di S_4. Premettiamo che, per brevità, diremo incidenti in S_4 due rette aventi un punto comune, cioè giacenti in un piano, due piani aventi una retta comune, cioè giacenti in un iperpiano, e infine una retta ed un piano aventi un punto comune, cioè pure giacenti in un iperpiano.

Prendiamo in S_4 quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, che a due a due si incontrino in sei punti, così che di questi non mai tre sieno in linea retta. *Il luogo delle ∞^2 rette incidenti ad essi è una ipersuperficie V^3_3 del 3.° ordine.* In vero, proiettando una punteggiata generica r da tre α, β, γ di quei piani sul quarto δ, si ottengono in questo piano tre fasci di raggi di centri $\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta$ riferiti proiettivamente tra loro, e l'esistenza, in generale, di tre punti di δ (comuni alle tre coniche generate dai tre fasci proiettivi a due a due) in ciascuno dei quali concorrono tre raggi omologhi dei tre fasci dimostra l'asserto. Insieme si trova che le rette incidenti a tre piani α, β, γ e ad una retta r è una superficie rigata cubica.

Nel caso escluso che tre punti $\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta$ fossero in una retta g, si troverebbe ancora una V^3_3, la quale però avrebbe la g doppia; perchè, prendendo r incontrante g, i nominati tre fasci sarebbero prospettivi e quindi vi sarebbe una sola retta (diversa da g) incidente alla r ed ai quattro piani.

20. — La proprietà fondamentale della considerata V_3^3 discende dal seguente notevole teorema, relativo ad incidenze di rette e piani di S_4: — *Le rette incidenti a quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ secantisi in sei punti, di cui tre non sieno mai in linea retta, incontrano pure un quinto piano* [1].

Per dimostrarlo, considerisi anzitutto il complesso ∞^3 delle rette incidenti ad α, β, γ (ad es.), del quale per ogni punto P passa una sola retta, intersezione degli iperpiani $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$: fatta eccezione dei punti esistenti nei tre piani α, β, γ e nel piano δ' incidente ai medesimi, individuato dai tre punti $\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$. Per ciascun punto di α, β, γ passa un fascio di rette del complesso, in particolare per ciascuno dei tre punti $\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$ una stella ordinaria (cioè in un S_3) di rette di esso, mentre il piano δ' è tutto di rette del complesso.

Proiettiamo il complesso considerato da un punto P di δ' sopra un S^*_3: ne risulta un complesso lineare, perchè un S_3 per P contiene del complesso obbiettivo la serie delle rette appoggiate alle tre rette $S_3\alpha$, $S_3\beta$, $S_3\gamma$, alla qual serie appartiene anche $S_3\delta'$ e però tale serie si proietta in un fascio: e perchè inoltre ad una retta r per P sono appoggiate rette del complesso obbiettivo costituenti una rigata quadrica, quella esistente nell' S_3 di due di esse (formante con δ' la superficie rigata cubica del n. 19) e quindi proiettantisi pure in un fascio avente il centro nella traccia di r. Il complesso proiezione, avendo in ogni piano e per ogni punto di S^*_3 un fascio di rette, è adunque, come si è detto, lineare (n. 22, Cap. 6.°).

Ciò premesso, diciamo rispettivamente $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (quest' ultimo già indicato dianzi) i quattro piani incidenti alle terne di piani $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, e proiettiamo il sistema delle rette incidenti ai quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dal punto $\delta\delta'$ (ad es.) sopra un S^*_3. La proiezione sarà quel sistema di rette, che è contenuto nel complesso lineare proiezione del complesso delle rette incidenti ad α, β, γ, e che si appoggia alla retta δ_1 in cui δ incontra S^*_3, vale a dire sarà una congruenza lineare, avente δ_1 per una direttrice. L' altra direttrice della congruenza, detta ε_1, proiettata dal punto $\delta\delta'$ dà un piano ε, che manifestamente è incontrato da tutte le rette del sistema considerato. Il qual piano ε è certamente distinto da δ, perchè se δ, ε e quindi δ_1, ε_1 coincidessero, la suddetta congruenza sarebbe lineare speciale e di essa farebbe parte l' unica direttrice $\delta_1 = \varepsilon_1$ (Cfr. n. 23,

[1]) Cfr. SEGRE, *Alcune considerazioni elementari*... (Rendiconti di Palermo, **2**, 1888).

Cap. 6.°); quindi si avrebbe in δ una retta incontrante α, β, γ, cioè i punti $\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta$ sarebbero allineati, contro il supposto. Così pure ε è distinto da α (e analogamente da β, γ) perchè, se α passasse per il punto $\delta\delta'$, sulla retta $\alpha\delta'$ si avrebbero i tre punti $\alpha\delta, \alpha\beta, \alpha\gamma$. Il teorema è quindi dimostrato. I cinque piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ si diranno *piani associati.*

21. — La proprietà precedente si completa coll'osservare che *il piano* ε, *oltre che per il punto* $\delta\delta'$, *passa anche per i punti* $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ *ed è l'unico piano al quale sieno ancora incidenti tutte le rette che incontrano* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il punto $\gamma\gamma'$ (ad es.) è infatti centro di un fascio di rette del nostro sistema giacente nel piano γ', piano che non può passare per il punto $\delta\delta'$, altrimenti i piani γ', δ' avendo comuni i punti $\alpha\beta, \delta\delta'$ esisterebbero in un S_3, nel quale dovrebbero trovarsi anche α, β (aventi una retta comune con ciascuno di quei piani). Cosicchè, riprendendo la considerazione del n. precedente, il detto fascio si proietta dal punto $\delta\delta'$ su S^*_3 pure in un fascio, il che esige che il centro $\gamma\gamma'$ del fascio sia su ε (non potendo manifestamente essere su δ). Un piano ρ poi che goda della proprietà che le rette incidenti ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lo sieno anche ad esso, se passa per alcuno dei punti $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$, coincide, per ciò che si è detto, con ε, e, se non passa per questi punti, deve segare $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (contenenti fasci del nostro sistema) secondo rette; il che è assurdo, in quanto ne segue, segandosi γ', δ' (come dianzi notammo) nel solo punto $\alpha\beta$, che ρ dovrebbe passare per $\alpha\beta$, e analogamente per $\alpha\gamma, \gamma\delta, \ldots$.

22. — La relazione fra i cinque piani associati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ è scambievole, essendo ciascuno di essi definito dall'incontrare tutto il sistema delle rette incidenti agli altri quattro. Ne risulta che, oltre ai piani $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ (che passano rispettivamente per $\gamma\delta, \delta\beta, \gamma\beta, \varepsilon\alpha$; $\gamma\delta, \delta\alpha, \alpha\gamma, \varepsilon\beta; \ldots$) abbiamo altri sei piani nelle loro stesse condizioni (cioè che passano rispettivamente per $\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \alpha\beta, \gamma\delta$; $\beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \beta\gamma, \alpha\delta; \ldots$), cioè in totale dieci piani, ognuno dei quali contiene quattro dei dieci punti d'intersezione di $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. *Questi dieci piani contengono ciascuno un fascio di rette del sistema.* Se ad essi aggiungansi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ pure contenenti quattro dei dieci punti (quelli d'intersezione coi piani rimanenti), abbiamo una configurazione di 10 punti e 15 piani: per ogni punto (come risulta subito dalla indicata determinazione dei piani) passano sei piani, in ogni piano si trovano quattro punti.

Indichiamo con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rispettivamente i 10 punti $\alpha\beta, \alpha\varepsilon, \alpha\delta, \delta\varepsilon, \gamma\delta, \gamma\varepsilon, \alpha\gamma, \beta\gamma, \beta\delta, \beta\varepsilon$, e distribuiamo i 15 piani nelle seguenti sei quintuple:

1.ª	0126	0789	4567	2348	1359
2.ª	0345	0789	1237	1568	2469
3.ª	0258	0149	1237	4567	3689
4.ª	0367	0149	1568	2348	2579
5.ª	0367	0258	2469	1359	1478
6.ª	0345	0126	1478	2579	3689.

La 1.ª quintupla è quella proposta ($\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$): le altre godono della stessa proprietà dimostrata per questa. Ad es., considerando i primi quattro piani della 2.ª quintupla, i piani incidenti ad essi a tre a tre sono 0367, 0258, 1359, 1478, che incontrano rispettivamente 1568, 1237, 0789, 0345 nei punti del quinto piano 2469: onde questo (n. 21) è attraversato dalle rette incidenti ai primi quattro.

Due quintuple hanno comune un piano, e viceversa ogni piano è comune a due quintuple; non è incidente agli altri otto piani delle due quintuple ed è incidente ai sei piani rimanenti: ecc. [1]).

23. — La ipersuperficie V_3^3 (n. 19), luogo delle rette appoggiate ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, *contiene tutti i 15 piani nominati*, perchè di quelle rette esiste un fascio in ciascuno dei rimanenti 10 piani. Per conseguenza V_3^3 *contiene sei diversi sistemi* ∞^2 *di rette corrispondenti alle sei quintuple soprascritte, ciascun sistema essendo costituito dalle rette incontranti i piani di una quintupla, ed inoltre ha 10 punti doppî nei punti* 0, 1, ..., 9. La V_3^3 è adunque *della 4.ª classe* (n. 17, 18) e possiede il massimo numero di punti doppi.

Da ciascun punto di V_3^3 partono sei rette appartenenti rispettivamente ai sei sistemi: esse sono le sei rette d'intersezione di V_3^3 col cono quadrico in cui l'iperpiano tangente taglia la quadrica polare del punto (n. 15). Onde su V_3^3 non possono esistere altre rette, oltre quelle appartenenti ai sei sistemi suddetti o giacenti nei 15 piani.

Notisi anche che V_3^3 *è caratterizzata dall'essere di 3.° ordine e dal possedere dieci punti doppî*. Infatti, avendosi una tal superficie V, il cono

---

[1]) Cfr. SEGRE, *Sulla varietà cubica con dieci punti doppî* (Atti dell'Accad. di Torino, 22, 1887), e *Sulle varietà cubiche...* (Memorie dell'Accad. di Torino, 39 (2), 1888).

sestico delle rette uscenti da un suo punto doppio 0, intersezione di V colla quadrica polare di 0 (n. 15), ha nove rette doppie nelle rette 01, 02, ..., 09 che congiungono 0 agli altri punti doppi 1, 2, ..., 9. Segando con un S_3 generico si trova una curva del 6.° ordine con nove punti doppî, curva che si vede con facile discussione, ad es. giovandosi della proiezione stereografica della quadrica su cui giace, essere costituita di sei rette della quadrica stessa, tre di un sistema e tre dell'altro. Segue che V contiene sei piani uscenti da 0 (e analogamente da ogni altro punto doppio), ciascuno contenente altri tre punti doppî, i quali sei piani sono distribuibili in sei coppie di piani non incidenti. L'iperpiano tangente in un punto di V contiene sei rette di V, ognuna segante una di quelle coppie, e descriventi, al variare del punto, sei sistemi distinti. Ogni sistema sarà di rette incontranti una coppia di piani non incidenti e partenti da ognuno dei dieci punti doppî, cioè di rette incontranti un piano ed altri quattro che escono dai quattro punti doppî giacenti in esso e formano col medesimo quattro coppie di piani non incidenti, due qualunque di questi cinque piani dovendo poi essere non incidenti per appartenere V ad S_4: e però ecc..

24. — Un S_3 per uno dei 15 piani sega ulteriormente V_3^3 in una quadrica, le cui generatrici e direttrici sono dei due sistemi corrispondenti alle due quintuple alle quali quel piano è comune, in quanto le rette di S_3 appoggiate a tre piani di ciascuna quintupla, incontrando inoltre il piano comune, sono del sistema corrispondente.

Un S_3 generico contiene due rette di ogni sistema, cioè quelle appoggiate alle quattro rette d'intersezione dell'S_3 con quattro piani della quintupla corrispondente. Queste sei coppie di rette sono in una semplice relazione: una r di una coppia (rr') del 1.° sistema, ad es., incontra una sola retta s di un'altra coppia (ss') del 2.° sistema, ad es., e la rimanente r' incontra la rimanente s'. Infatti le rette del 2.° sistema che si appoggiano ad r formano una rigata quadrica (come si vede considerando l'S_3 che passa per r e per il piano comune alle due quintuple); e quindi il nostro S_3, generico per r, ne contiene una sola s. Lo stesso ragionamento prova che la retta s' è incontrata da una sola retta del 1.° sistema, e questa, per ciò che si è detto testè, non può essere che la r'. Un S_3 generico sega V_3^3 in una superficie cubica, le cui 27 rette sono le intersezioni coi 15 piani e le sei coppie di rette ora nominate (costituenti, per la proprietà notata, una bisestupla).

25. — *Le reti d' iperpiani che proiettano da due rette generiche r, r' di un sistema, ad es. il 1.°, le rette di un altro sistema, ad es. il 2.°, sono proiettive.* Infatti un S_3 generico per r contiene, come vedemmo (n. 24), una sola retta del 2.° sistema non appoggiata ad r. Questa è proiettata da r' mediante un determinato S_3; e si ha così intanto che la corrispondenza fra le due stelle è biunivoca (algebrica). Facciamo ora descrivere ad un S_3 della stella r un fascio, cioè facciamolo ruotare intorno ad un S_2 per r. Questo S_2 sega V_3^3 in una conica (oltre r), e le rette del 2.° sistema appoggiate alla conica formano una rigata cubica, perchè un S_3 per l'S_2, oltre la conica stessa, contiene una sola retta della rigata, cioè quella retta del 2.° sistema, che non è appoggiata ad r (e quindi è appoggiata alla conica). La rigata cubica incontra r' in due punti, il che risulta dall'osservare che le rette del 2.° sistema appoggiate ad r' formano una rigata quadrica, che ha quindi due punti su quell' S_2 e però sulla conica (perchè le r, r' non possono essere incontrate, per il n. 24, da una stessa retta del 2.° sistema). Per quei due punti di r' passa una conica della rigata cubica [1]): l' S'_2 della qual conica congiunto colle rette di questa rigata dà gli S_3 corrispondenti agli S_3 superiormente considerati e costituenti quindi, come questi, un fascio. La proprietà è quindi dimostrata. Si avverta che quattro coppie di S_3 corrispondenti sono dati dai quattro piani della 1.ª sestupla (diversi dal piano comune ad amendue le sestuple), i quali contengono fasci di rette del 2.° sistema (n. 22).

Ne discende una generazione proiettiva della V_3^3, cioè *mediante tre reti proiettive, che si ottengono proiettando da tre rette di un sistema le rette di un altro sistema.* Perchè, viceversa, tre reti proiettive aventi per sostegno tre rette, generino una V_3^3 della specie considerata, è necessario che esistano quattro piani incidenti alle tre rette, ognuno dei quali determini con queste tre iperpiani corrispondenti. Infatti, se tali tre reti proiettive sono

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0,$$

---

[1]) Cfr. n. 13, Cap. 13.° ($r=4$, $m=1$).

l'equazione della V_3^3 sarà

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

e quindi V_3^3 sarà generata anche dalle tre reti proiettive

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 v_1 + \mu_3 w_1 = 0$$
$$\mu_1 u_2 + \mu_2 v_2 + \mu_3 w_2 = 0$$
$$\mu_1 u_3 + \mu_2 v_3 + \mu_3 w_3 = 0 \text{ [1]):}$$

onde le tre rette sostegno delle prime tre stelle appartengono ad un sistema ∞^2 di rette incontranti i suddetti quattro piani e però ecc..

26. — *Le varietà cubiche V_3^3 di S_4 precedentemente considerate sono proiettivamente identiche, cioè non hanno invarianti assoluti.* In vero una V_3^3 è determinata da quattro piani di una quintupla, essendo il luogo delle rette che incontrano quei quattro piani. Ora quattro piani che s'incontrano a due a due in sei punti, sono sempre trasformabili proiettivamente, in modo perfettamente determinato, in un'altra simile quaderna di piani, e ciò mediante l'omografia che fa corrispondere i gruppi dei sei punti intersezioni dei piani stessi (essendo manifestamente soddisfatte le condizioni richieste nel n. 13, Cap. 3.°).

---

[1]) Ciò è caso particolare di una proprietà generale che si esporrà in seguito (n. 22, Cap. 13.°). Notisi poi che, se si toglie la restrizione fatta, cioè si considerano tre reti proiettive *generiche*, la considerazione analitica esposta mostra che si ha una V_3^3 contenente due sistemi di rette, tali che da un suo punto generico parte una retta di ciascuno dei due sistemi (e contenente inoltre un terzo sistema di rette, di cui partono quattro da un suo punto generico (n. 23)). *Questa V_3^3 possiede sei punti doppi,* che sono i punti in ciascuno dei quali si tagliano tre piani corrispondenti delle tre reti o, ciò che è lo stesso, i punti in cui si tagliano, fuori della generatrice comune, due qualunque delle tre rigate cubiche generate dalle tre reti prese a due a due (n. 9, Cap. 13.°). Che questi punti sieno sei si può provare così. Proiettisi una delle due rigate cubiche da due suoi punti A , B: si otterranno due coni quadrici, che si segano in quella rigata cubica e in un piano per A B. L'altra rigata cubica incontra uno dei due coni in una quintica, oltre la suddetta generatrice, quintica che (come subito si vede) ha due punti su questa generatrice e due su quel piano, e che quindi sega l'altro cono quadrico in sei punti ulteriori che sono i richiesti.

Si osservi ancora che una V_3^3, essendo individuata da 4 piani, dipende da $4 \cdot 6 = 24$ parametri.

27. — Consideriamo le trasformazioni omografiche della V_3^3 in sè. Ogni tale trasformazione deve produrre evidentemente una sostituzione fra le sei quintuple: ma due omografie σ, τ che producono la stessa sostituzione coincidono, perchè il prodotto $\sigma\tau^{-1}$ muterà in sè ogni quintupla, quindi anche ognuno dei quindici piani (in quanto sono comuni alle quintuple a due a due), e sarà per conseguenza l'identità.

Ora si ottengono immediatamente *15 trasformazioni omografiche involutorie di* V_3^3 *in sè*, ciascuna delle quali corrisponde ad una sola inversione fra le sei quintuple, cioè trasforma l'una nell'altra due quintuple e lascia invariate le quattro rimanenti. Ad es., una trasformazione involutoria di V_3^3 in sè che abbia il piano 0789 per piano fondamentale, deve far corrispondere i piani 123, 456; 156, 234; 246, 135; 345, 126, i cui punti d'intersezione sono in quel piano (cfr. lo specchio del n. 22) e quindi deve anche far corrispondere i punti 1, 4; 2, 5; 3, 6. Viceversa, l'omografia involutoria determinata da queste tre coppie di punti, che ha cioè per retta fondamentale quella appoggiata alle loro tre congiungenti 14, 25, 36 (retta d'intersezione degli S_3 che passano per queste congiungenti a due a due), ha le dette quattro coppie di piani corrispondenti e quindi il piano 0789 per fondamentale. Essa scambia manifestamente le prime due quintuple (aventi comune il piano 0789) e lascia ferme le restanti.

Poichè ogni sostituzione si può ottenere per inversioni, si conclude quindi che: 1.° *Esistono* $1 \cdot 2 \ldots 6$ *trasformazioni omografiche della* V_3^3 *in sè;* 2.° *Il gruppo di queste trasformazioni è determinato dalle 15 omografie involutorie suddette.*

28. — Si può arrivare alla V_3^3 di S_4 in un altro modo, al quale si collegano altre notevoli proprietà. Prendiamo sei iperpiani generici di S_4: $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$, $y_5=0$, $y_6=0$. Fra le y_i (variate, se occorre, di fattori opportuni) sussisterà una relazione identica

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=0\,. \tag{4}$$

Or bene, la varietà definita dalla

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3+y_5^3+y_6^3=0 \tag{5}$$

è la V_3^3 considerata, perchè (n. 23, 26) contiene 10 punti doppî nei punti di S_4 che hanno tre coordinate $=1$ e le altre tre $=-1$ (come si verifica applicando la condizione del n. 10). Manifestamente i 15 piani sono quelli dati dalle

$$(6)\qquad\left\{\begin{array}{l} y_1+y_2=0\ ,\ y_3+y_4=0\ ,\ y_5+y_6=0 \\ y_1+y_2=0\ ,\ y_3+y_5=0\ ,\ y_4+y_6=0 \\ y_1+y_2=0\ ,\ y_3+y_6=0\ ,\ y_4+y_5=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

che indicheremo rispettivamente colle notazioni (12)(34)(56), (12)(35)(46), (12)(36)(45), ... [1]). L'esaedro formato dai sei iperpiani $y_i=0$ è in semplice relazione coi quindici piani (6). Basta osservare che i primi tre piani (6), ad es., formano un triedro esistente nell'iperpiano $y_1+y_2=0$ e che il vertice di questo triedro è precisamente il vertice $y_3=y_4=y_5=y_6=0$, $y_1+y_2=0$ dell'esaedro. Coi piani (6) si formano 15 di tali triedri, i cui vertici sono quelli dell'esaedro. Ogni faccia $y_i=0$ di questo esaedro contiene 10 vertici di altrettanti triedri facilmente indicabili; ecc. L'esaedro è *covariante* della V_3^3. *Covariante* di questa è pure l'esagono polare dell'esaedro rispetto alla quadrica

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2=0\ ^{2)}.$$

29. — Colle formole precedenti si verifica facilmente l'esistenza dei sistemi di ∞^2 rette di V_3^3. La (5) può scriversi (ad es.) sotto la forma

$$y_1^3+y_2^3+\ldots+y_6^3=(y_1+y_2+y_3)^3+(y_4+y_5+y_6)^3,$$

osservando che il secondo membro di questa è divisibile per $(y_1+y_2+y_3)+(y_4+y_5+y_6)$ e quindi, per la (4), è identico a zero: ossia

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3-(y_1+y_2+y_3)^3=(y_4+y_5+y_6)^3-(y_4^3+y_5^3+y_6^3)$$

---

[1]) Notiamo di passaggio che questi 15 piani costituiscono la completa intersezione di V_3^3 colla sua hessiana $\Sigma\frac{1}{y_i}=0$ (n. 11). Onde, fuori di questi piani, non esistono punti parabolici (n. 12).

[2]) Veggansi nella Memoria di Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3.° ordine* ... (Atti dell'Ist. ven., 6(6), 1888) la costruzione effettiva (dai 15 piani) dell'esaedro e dell'esagono, e le molteplici loro relazioni. Per queste ultime cfr. anche l'altro lavoro di Castelnuovo che si cita nella nota seguente [3]).

od anche

$$(y_1+y_2)(y_1+y_3)(y_2+y_3) = -(y_4+y_5)(y_4+y_6)(y_5+y_6).$$

Quindi le ∞^2 rette date, al variare di λ, μ, ν, dalle terne di equazioni

$$(7)\quad \mu(y_1+y_2) = -\nu(y_5+y_6)\ ,\ \nu(y_1+y_3) = -\lambda(y_4+y_6)\ ,\ \lambda(y_2+y_3) = -\mu(y_4+y_5)$$

appartengono a V_3^3. Notisi che queste rette si possono ottenere *come intersezioni di terne di iperpiani omologhi nei tre fasci, aventi per sostegni i piani* (12)(34)(56) , (13)(25)(46) , (16)(23)(45), *e riferiti in corrispondenza trilineare* [1]).

Verifichiamo che, oltre ai tre piani base dei tre fasci, le ∞^2 rette suddette segano altri due piani di V_3^3. Infatti, se sommiamo le tre equazioni (7) membro a membro, otteniamo, per la (4),

$$\lambda(y_1+y_5)+\mu(y_3+y_6)+\nu(y_2+y_4)=0,$$

la quale dimostra che quelle rette segano il piano (15)(24)(36): e se sommiamo le stesse (7) dopo di aver moltiplicato la prima per λ, la seconda per μ e la terza per ν, troviamo

$$\lambda\mu(y_3+y_5)+\lambda\nu(y_1+y_4)+\mu\nu(y_2+y_6)=0$$

la quale dimostra che le ∞^2 rette segano anche il piano (14)(26)(35) [2]).

---

[1]) Più forme ∞^1, i cui elementi si determinano biunivocamente coi valori di un parametro, si dicono *in corrispondenza plurilineare* se fra i loro parametri $k_1, k_2, k_3, \ldots$ esiste una relazione lineare rispetto a ciascuno. In un gruppo di elementi corrispondenti uno è determinato dai rimanenti arbitrariamente dati. Nel presente caso si ha la corrispondenza trilineare $k_1 k_2 k_3 = 1$.

La corrispondenza plurilineare fu studiata dall'August fino dal 1862. Cfr., anche per le indicazioni bibliografiche, CASTELNUOVO, *Studio sulla omografia di 2.ª specie* (Atti dell'Ist. ven., 5(6), 1887). E qui ricordo pure il recente lavoro di SEGRE, *Sur la génération projective des surfaces cubiques* (Archiv der Math. und Ph., 10(3), 1906), per il notevole concetto di Geometria proiettiva che vi è presentato: cioè di considerare le corrispondenze plurilineari come relazioni proiettive degeneri fra forme di specie superiore.

[2]) Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta...* (Atti dell'Ist. veneto, 2(7), 1891). In questa Memoria la V_3^3 si presenta come luogo dei centri (n. 8, Cap. 5.°) dei complessi lineari di un sistema lineare ∞^3. Nella Memoria stessa è pure stabilita l'importante proprietà che la V_3^3 è rappresentabile biunivocamente nello spazio ordinario, alle sue sezioni iperpiane corrispondendo le quadriche di questo spazio passanti per cinque punti.

30. — Sulla V_3^3 faremo da ultimo qualche osservazione relativa al suo *contorno apparente* da un punto P di S_4: il qual contorno apparente è la sezione fatta da un iperpiano fisso S^*_3 sul cono di 4.ª classe circoscritto a V_3^3 da P, ossia la proiezione fatta da P, su S^*_3, della superficie secondo cui quel cono tocca V_3^3. Questa superficie è una V_2^6 intersezione di V_3^3 colla prima polare V_3^2 di P rispetto a V_3^3 (n. 17); ha nei dieci punti doppî di V_3^3 altrettanti punti doppî (n. 18, 16) e contiene quindici coniche nei quindici piani di V_3^3. Cosicchè il detto contorno apparente in S^*_3 sarà una superficie di 6.° ordine e 4.ª classe, che avrà per piani tangenti doppî le imagini dei 15 piani, giacchè l'S_3 che congiunge P con ognuno di questi quindici piani tocca V_3^3 in ogni punto della conica relativa. Inoltre quel contorno apparente avrà evidentemente dieci punti doppî (aggruppati per quaterne, come per la V_3^3, sui quindici piani) nelle imagini dei dieci punti doppî di V_3^3; e possederà infine una curva cuspidale del 6.° ordine, situata sopra una quadrica, luogo delle traccie in S^*_3 delle rette proiettanti aventi contatto tripunto con V_3^3 (cfr. n. 17) e quindi contatto bipunto colla superficie V_2^6 sunnominata [1]).

Che se il punto P di proiezione giace su V_3^3, la sua quadrica polare è tangente in esso a V_3^3 e quindi sega V_3^3 in una superficie V_2^6, che ha punto doppio in P. L'ordine del contorno apparente diminuisce per conseguenza di due, ossia tale contorno è una superficie, di S^*_3, di 4.° ordine e di 4.ª classe. Poi l'iperpiano polare (tangente) π e la quadrica polare di P si segano in un cono di rette osculatrici a V_3^3 in P, cioè di rette proiettanti che toccano V_3^3 in punti infinitamente vicini a P; e i piani tangenti in questi punti alla superficie V_2^6, sono quelli tangenti al detto cono (cono tangente alla superficie stessa nel suo punto doppio P) cioè esistono in π. Segue che la traccia del detto cono in S^*_3 è una conica del contorno apparente, in ogni punto della quale il piano della conica (intersezione di π e di S^*_3) è piano tangente, onde questo è un piano doppio del contorno, il quale possiede quindi in tutto 16 piani doppî. Inoltre sono punti doppî di esso anche le traccie in S^*_3 delle sei rette di V_3^3 per P, giacchè un S_2 per una di tali rette sega V_3^3 ulteriormente in una conica, e quindi in quell'S_2 stanno due altre sole generatrici del cono circoscritto (le tangenti da P alla conica), Si hanno adunque in tutto 16 punti doppî, a sei a sei giacenti sui 16 piani doppî, (ogni piano di V_3^3 essendo comune a due

[1]) Cfr. n. 9, Cap. 9.°.

sestuple e incontrando perciò due di quelle sei rette), mentre da ogni punto doppio partono sei piani doppî, come è evidente (ricordando che ognuna delle sei rette incontra cinque piani). La superficie di S^*_3 a cui si arriva è detta *superficie di Kümmer*, di cui si potrebbe fare, per la via ora indicata, uno studio completo [1]).

31. — Ritornando a considerare una ipersuperficie qualunque, diremo da ultimo brevemente della sua generazione per sistemi lineari reciproci.

Richiamiamo formole e ragionamenti del n. 28, Cap. 6.°. Ritenendo che le u, v sieno forme nelle coordinate dei gradi p, q rispettivamente, le (12), (13) dànno, al variare dei parametri λ, μ legati dalla relazione (14), due sistemi lineari ∞^k di ipersuperficie degli ordini p, q (Cap. 10.°) che si dicono *reciproci fra loro*. Ad ogni ipersuperficie di un sistema corrisponde un sistema lineare ∞^{k-1} di ipersuperficie dell'altro e il luogo dei punti comuni a quella e a queste (cioè alla loro intersezione) si trova essere rappresentato dalla (16) del citato n. 28, con dimostrazione sostanzialmente identica a quella del n. stesso. Il luogo è quindi una ipersuperficie di ordine $p+q$. Ciò può vedersi anche sinteticamente applicando il principio di corrispondenza. Un punto x di un S_1 generico (fisso) stacca dal 1.° sistema un sistema lineare ∞^{k-1}, a cui corrisponde una ipersuperficie del 2.° segante l'S_1 in q punti y, e viceversa, dato un punto y, gli corrispondono p punti x. I $p+q$ punti uniti della corrispondenza $(p\,q)$, che così si ottiene sopra S_1, sono quelli del luogo.

Notiamo il caso particolare nel quale uno dei due sistemi sia una stella di iperpiani, che supporremo col centro nel punto $A_0 (x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0)$ e quindi rappresentata dalla

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r = 0, \tag{8}$$

mentre l'altro sistema, pure ∞^r, sia di ipersuperficie di ordine q rappresentato dalla

$$\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_r \varphi_r = 0: \tag{9}$$

e supponiamo inoltre che l'equazione della reciprocità sia data nella forma

$$\sum \lambda_i \mu_i = 0. \tag{10}$$

---

[1]) Si può dimostrare infatti che una tale superficie di S^*_3 è sempre ottenibile per proiezione nel modo detto, ed anzi una proprietà più generale. Cfr. il n. 2 del secondo lavoro di SEGRE citata nella nota al n. 22.

Allora l'ipersuperficie generata (d'ordine $q+1$) ha l'equazione

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \dots + x_r\varphi_r = 0 \tag{11}$$

alla quale si riduce la (16) suddetta nel caso presente.

Inversamente *ogni ipersuperficie d'ordine $q+1$ è generabile con sistemi lineari reciproci ∞^{r-1} di iperpiani e di ipersuperficie di ordine q*. Basta prendere sulla ipersuperficie il punto fondamentale A_0 e osservare che allora l'equazione di essa conterrà in tutti i termini una almeno delle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_r$ e però si potrà scrivere nella forma (11), ove le φ sono forme di ordine q delle $r+1$ coordinate. L'ipersuperficie si potrà quindi generare coi sistemi reciproci (8), (9) nella relazione di reciprocità espresse dalla (10): cioè come luogo delle intersezioni dei raggi della stella (8) (avente il centro in un punto arbitrario della ipersuperficie) colle ipersuperficie corrispondenti del sistema (9) [1].

Si può rilevare che il procedimento è estendibile. Se nelle (8) ,..., (11), si scrive k al posto di r rimane dimostrato che *una ipersuperficie di ordine $q+1$ di S_r, che contiene un S_{r-k}, si può generare con due sistemi lineari reciproci ∞^{k-1}, l'uno di ipersuperficie di ordine q, l'altro d'iperpiani passanti per quell'S_{r-k}*. La quale proposizione applicata per $q=1$ dà le varie generazioni della V^2_{r-1} già considerate in altro modo nel n. 28, Cap. 6.° (ultimo alinea); applicata per $q=2$, $r-k=1$ dà una generazione della V^3_{r-1}, in quanto una tale ipersuperficie contiene in ogni caso rette (infinite se $r>3$): ecc..

---

[1]) Un'ampia trattazione della generazione in S_3 di una superficie qualunque F mediante reti reciproche di superficie di ordine p, q è data dal Reye nella Memoria: *Die algebraischen Flächen*... (Math. Annalen, 2, 1870): nella quale la questione è ridotta a determinare sopra F un gruppo di p^3 (o q^3) punti base di una rete (cfr. n. 35 e seg.). La questione fu ripresa dall'Escherich nel lavoro: *Die reciproken linearen Flächensysteme* (Sitzungb. der k. Akad. der Wiss., Vien, 75, 1877): ove si giunge al rimarchevole risultato che, in generale, per p (ad es.) si possono prendere soltanto i valori da 1 a 7 (e allora per q da $n-1$ ad $n-7$, se n è l'ordine di F), tranne se F è del 16.° ordine, chè in tal caso è sempre generabile anche per due reti reciproche di 8.° ordine. È un risultato che dovrebbe essere assodato (essendo stato ottenuto con un computo di costanti) ed esteso ad S_r.

CAPITOLO 9.°

Varietà in generale.

1. — Definiamo *varietà algebrica* l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano ad un *sistema di equazioni algebriche,* cioè ad un numero qualunque di date equazioni algebriche, nelle quali, oltre le coordinate, possono anche comparire parametri indeterminati. Un tal sistema si può sempre trasformare in un altro di equazioni

$$(1) \qquad f_i(x_0\, x_1 \ldots x_r\, \lambda_0\, \lambda_1 \ldots \lambda_\mu) = 0 \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots)$$

razionali intere omogenee nelle $x_0\,, x_1\,, \ldots, x_r$ e razionali intere nei parametri indeterminati $\lambda_0\,, \lambda_1\,, \ldots, \lambda_\mu$ (potendosi anche per ciascuno di questi introdurre l'omogeneità).

È chiaro che la totalità dei punti comuni a due varietà algebriche, o, come si dice, *la loro intersezione,* è pure una varietà algebrica, poichè essa può pensarsi come data dal sistema di equazioni che si ottiene riunendo i due sistemi di equazioni che determinano le due varietà algebriche considerate.

Così anche si vede subito che è algebrica la varietà ottenuta proiettando da un S_i qualunque di S_r una varietà algebrica data. Infatti se, per semplicità, supponiamo che quell'S_i sia l'S_i fondamentale individuato dai vertici $A_0\,, A_1\,, \ldots, A_i$ della piramide fondamentale, per avere la proiezione della varietà algebrica data dall'S_i, basta (n. 8, Cap. 2.°) dare il significato di parametri alle coordinate correnti $x_0\,, x_1\,, \ldots, x_i$ che compaiono nelle sue equazioni.

2. — Può darsi che i punti, soddisfacenti colle loro coordinate alle (1), non dipendano tutti dalla variazione dello stesso numero di variabili

arbitrarie (numero delle coordinate e dei parametri che si possono scegliere arbitrariamente), ma che si distribuiscano in varie totalità dipendenti rispettivamente da numeri diversi di quelle variabili arbitrarie [1]. In tal caso si può dimostrare [2] che ciascuna di queste totalità è rappresentabile a sè (distintamente dalle altre) con un sistema di equazioni del tipo (1), e quindi è pure una varietà secondo la definizione data. E noi appunto intenderemo in seguito di limitare il concetto di varietà al caso che i suoi punti dipendano dalla variazione di un numero *determinato* di dette variabili arbitrarie, numero che chiameremo *dimensione* della varietà, e indicheremo con V_k una varietà di dimensione k (gruppo di un numero finito di punti, se $k=0$).

Una V_k è ***riducibile*** o ***composta*** se i suoi punti si possono distribuire in due o più varietà (della stessa dimensione k), e ***irriducibile*** o ***semplice*** nel caso contrario. E riducibile si dice pure una varietà che provenga dal ripetere due o più volte una varietà irriducibile, cioè dal considerarne ogni suo punto due o più volte.

3. — Vedremo più avanti (n. 11) che si può sempre sostituire, al sistema (1) che dà una V_k, un altro sistema di equazioni contenenti le sole coordinate, e allora la dimensione k è il numero di queste che si possono assegnare arbitrariamente. Associando tali equazioni della varietà a k equazioni lineari generiche nelle coordinate stesse, cioè alle equazioni di un S_{r-k} generico, si avrà un numero finito di soluzioni. Si potrà quindi con processi di eliminazione arrivare ad una equazione con una sola variabile, i cui coefficienti sieno funzioni razionali di quelli che compariscono nelle equazioni di V_k e di S_{r-k}, così che per ogni radice di quella equazione si ottenga razionalmente una soluzione di tutte queste equazioni. Il grado n della detta equazione è adunque il numero dei punti che l'S_{r-k} ha comuni colla varietà, numero finito e ben determinato, che dicesi *ordine* della varietà stessa, la quale si indica perciò con V_k^n

---

[1]) Esempio. Le tre quadriche $V^2{}_{r-1}$ rappresentate dalle $U_2-U_1U'_1=0$, $U_2-U_1U''_1=0$, $U_2-U_1U'''_1=0$ (ove le U_i sono forme di ordine i nelle $x_0, x_1, \dots, x_r$) hanno comune la $V^2{}_{r-2}$ data dalle $U_2=0$, $U_1=0$ e la $V^2{}_{r-4}$ data dalle $U_2=0$, $U'_1=0$, $U''_1=0$, $U'''_1=0$.

[2]) KRONECKER, *Grundzuge einer arithmetischen Theorie*... (Journal für Math., 92, 1881), pag. 28. Cfr. anche MOLK, *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité*... (Acta mathem., 6, 1885, pag. 147), e KÖNIG, *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, Leipzig, 1903), pag. 215 e seg..

(gruppo di n punti, se $k=0$). Quando un S_{r-k} ha con una V_k^n, $n+1$ punti comuni, ne ha infiniti (l'equazione di dianzi riducendosi ad una identità), cioè sega V_k^n secondo una o più varietà di dimensione ≥ 1 ed un numero finito (anche nullo) di punti.

Si ha la proprietà generale (che racchiude la precedente): — *Un* S_i *generico di* S_r $(i \geq r-k)$ *taglia una* V_k^n *in una* V_{i+k-r}^n. *Un* S_i *che abbia comune con* V_k^n *una* V_{i+k-r}^n *ed un punto, sega* V_k^n *in una varietà di dimensione* $\geq i+k-r+1$ *od in più varietà di cui una almeno di tal dimensione* [1]). Invero un S_{r-k} preso genericamente nell'S_i generico (e quindi genericamente nell'S_r) incontra V_k^n in n punti e però in altrettanti la sua sezione coll'S_i. Nel caso particolare poi facciasi muovere in S_i per il punto, anzi per un S_{r-k-1} fisso ma generico per il punto stesso, un S_{r-k}. Questo, per il caso trattato $(i=r-k)$, ha comune con V_k^n una varietà ad una dimensione (almeno), non giacente nell'S_{r-k-1} (che è generico per il punto nell'S_i e quindi nell'S_{r-k}); la quale varietà, per conseguenza, essendo ∞^{i-r+k} le posizioni di S_{r-k}, descrive un luogo ad $i-r+k+1$ dimensioni (almeno) [2]).

Un punto di una V_k^n si dice s^{uplo} se un S_{r-k} generico per il punto ha ivi incontro s^{punto} colla varietà, cioè se la radice corrispondente al punto della equazione di ordine n sopra considerata (che dà gli n punti d'intersezione di S_{r-k} con V_k^n) è s^{upla} per l'equazione stessa.

Una V_k^n con un punto n^{uplo} P è costituita di S_1 per P, perchè se Q è un altro punto di V_k^n e si fa muovere un S_{r-k} intorno alla retta PQ, o meglio (se $k<r-2$) intorno ad un S_{r-k-1} generico (fisso) passante per PQ, tale S_{r-k} ha comune con V_k^n in ogni sua posizione $n+1$ punti e quindi (almeno) una varietà ad una dimensione, che deve essere la stessa PQ: altrimenti (per un ragionamento simile al precedente) il suo luogo sarebbe una varietà a $k+1$ dimensioni (almeno).

Segue che una V_k^n con un S_t $(t<k)$ di punti n^{upli} è un luogo di ∞^{k-t-1} S_{t+1} passanti per l'S_t: si dice *cono* di *vertice* S_t (cfr. n. 5, Cap. 8.°). Se $k=t+2$, cioè se questi S_{t+1} *(spazî generatori)* sono ∞^1, la V_k^n suol dirsi un S_t - *cono*.

---

[1]) La dimensione di ciascuna varietà comune a S_i ed a V_k, essendo $i \geq r-k$, è sempre $\geq i+k-r$ (cfr. ultima alinea del n. 31, Cap. 9.°).

[2]) Osservisi (e considerazione analoga ripetasi per l'avvenire in casi analoghi) che le equazioni del luogo sono quelle di V_k^n associate a quelle dell'S_{r-k}, nelle quali entrano essenzialmente $i-r+k$ indeterminate.

Una V_k^n con un S_k di punti n^{upli} è lo stesso S_k ripetuto n volte.

4. — *Se V_k^n è irriducibile, gli n punti nei quali un S_{r-k} generico la incontra sono tutti distinti.* Infatti gli n punti in cui un S_{r-k} generico sega V_k^n si distribuiscano, ad es., in due gruppi, l'uno di α punti da contarsi ciascuno due volte e l'altro di β punti da contarsi ciascuno una volta sola ($2\alpha+\beta=n$, $\alpha>0$, $\beta\geqq 0$). Ciò significa che l'equazione di grado n, a cui si riduce la determinazione di quegli n punti (n. 3), ha β radici semplici e α radici doppie, le quali, come è noto [1]), si possono ottenere separatamente con due equazioni contenenti razionalmente i coefficienti di quella. Ne risulta che la V_k^n si spezza in due parti (date dalle equazioni di V_k^n a cui si associno rispettivamente le due equazioni ora dette), l'una di ordine α da contarsi due volte (o luogo di punti doppî) e l'altra di ordine β. Se $\beta=0$, si ha una sola V_k^α contata due volte (cfr. n. 2).

2 β + α

Ne discende che *ogni varietà V_k^n irriducibile è tagliata da un S_{r-k+1} generico in una V_1^n irriducibile.* Suppongasi infatti che la sezione di V_k^n con un S_{r-k+1} generico possa comporsi di più curve $V_1^{\alpha_1}, V_1^{\alpha_2}, \ldots, V_1^{\alpha_t}$ ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_t=n$). Si varî l'$S_{r-k+1}$ intorno ad un S_{r-k} (fisso) pure generico, che incontri quindi V_k^n in n punti distinti, dei quali α_1 saranno su $V_1^{\alpha_1}$, α_2 su $V_1^{\alpha_2}, \ldots, \alpha_t$ su $V_1^{\alpha_t}$. Queste t curve descriveranno t varietà affatto distinte, perchè, ad es., gli α_1 punti fissi che $V_1^{\alpha_1}$ ha sopra S_{r-k}, essendo distinti dagli α_2 punti fissi che vi ha $V_1^{\alpha_2}$, non potranno mai le $V_1^{\alpha_1}$, $V_1^{\alpha_2}$, per ragione di continuità, assumere la stessa posizione. La V_k^n si spezza adunque in t varietà (rappresentate dai t sistemi di equazioni che dànno le t curve, ove si considerino come parametri i coefficienti delle equazioni dell'S_{r-k+1}).

Da questa proprietà si deduce immediatamente quella più generale: — *Ogni varietà irriducibile V_k^n è tagliata da un S_{r-k+t} generico ($t>0$) in una V_t^n irriducibile.*

5. — *Sopra una V_k^n, appartenente ad S_r, si possono scegliere, in infiniti modi, $r+1$ punti indipendenti:* giacchè, se presi t ($<r+1$) punti indipendenti di V_k^n, non si potesse su V_k^n trovare un $(t+1)^{\text{esimo}}$ punto indipendente da quelli, V_k^n apparterrebbe ad un S_{t-1}. Se V_k^n è irriducibile, $r+1$ suoi punti generici sono indipendenti.

6. — Se V_k^n è irriducibile ed appartiene ad S_r, la sua sezione V_{k-1}^n me-

---

[1]) Cfr. Capelli, libro citato, pag. 557-8.

x, y qualunque di essa, la retta xy avrebbe un punto z sulla curva e le tangenti a questa in x, y giacerebbero sul piano tangente lungo xy al cono che da z proietta (doppiamente) la curva, cioè si taglierebbero: onde le tangenti della curva gobba, incontrandosi a due a due, passerebbero per un punto, il che non può essere (se la curva non è composta di rette concorrenti in un punto).

Se $t>1$ e t è il più piccolo valore per cui il fatto escluso possa avvenire, vale a dire se un S_{t-1} per t punti generici di V_k non ne contiene altri punti, la proiezione di V_k dall' S_{t-2}, individuato da $t-1$ suoi punti generici, sopra un S_{r-t+1}, sarà certamente biunivoca e si avrà in S_{r-t+1} una V'_k di cui ogni corda è (almeno) trisecante; il che è assurdo per il caso precedente, essendo $k<(r-t+1)-1$.

9. — Ciò premesso, gli S_i determinati da $i+1$ punti generici di una V_k irriducibile ed appartenente ad S_r, non aventi, se $i<r-k$, per ciò che ora si è dimostrato, altri punti comuni con V_k, formano al variare dei punti stessi una $\infty^{(i+1)k}$. Proiettando ora V_k da un S_{t-1} generico ($t<r-k$), quale infinità formano gli S_t proiettanti di cui ciascuno contiene uno di quegli S_i ($i\leq t$), cioè che sono $(i+1)$-secanti di V_k? Dovranno S_{t-1} ed S_i appartenere ad un S_t, cioè segarsi in un S_{i-1}: il che esige $(r-t)\,i$ condizioni (n. 11, Cap. 2.°). Dunque *gli* S_t $(i+1)$*-secanti, i quali passano per un* S_{t-1} *generico dato* ($i\leq t<r-k$), *sono* $\infty^{(i+1)k-(r-t)i}$.

Ora un tale S_t proietta i suoi $i+1$ punti d'intersezione con V_k, sopra S_{r-t}, in un unico punto di V'_k, che è suo punto $(i+1)^{\text{uplo}}$, giacchè, come subito si vede (cfr. n. 7), un S_{r-t-k} generico per questo punto in S_{r-t}, ha ivi con V'_k incontro $(i+1)^{\text{punto}}$. Si conclude quindi (se $(i+1)k-(r-t)i\geq 0$) che *la proiezione* V'_k *di* V_k *da un* S_{t-1} *generico dato sopra un* S_{r-t} *possiede una* $V'_{(i+1)k-(r-t)i}$ *di punti* $(i+1)^{\text{upli}}$ [1]. Questi punti sono $\binom{i+1}{2}^{\text{upli}}$ per la V'_{2k-r+t} di punti doppî (gli $i+1$ punti obbiettivi producenti un punto $(i+1)^{\text{uplo}}$ distribuendosi in altrettante coppie); sono $\binom{i+1}{3}^{\text{upli}}$ per la $V'_{3k-2(r-t)}$ di punti tripli; ...; $(i+1)^{\text{upli}}$ per la $V'_{ik-(r-t)(i-1)}$ di punti i^{upli}. Poichè $t<r-k$, si ha, come deve essere, $2k-r+t<k$, $3k-2r+2t<2k-r+t$, ecc..

---

[1]) Il dubbio che a comporre questa varietà possano entrare varietà di dimensione $<(i+1)k-(r-t)i$ si elimina, dopo aver estese certe nozioni, nella nota terza del n. 22.

Se $t = r - k - 1$, la proiezione è una ipersuperficie V'_k di S_{k+1} (n. 7), avente una V'_{k-1} doppia, una V'_{k-2} tripla (tripla pure per V'_{k-1}), ecc..

10. — Il lemma del n. 8 conduce ad un'altra conseguenza. Ne discende cioè immediatamente che, *proiettando una* V_k, *irriducibile ed appartenente ad* S_r, *da un* S_{t-1} *passante per* t *suoi punti generici sopra un* S_{r-t}, *se* $k < r - t$, *la proiezione* V'_k *è biunivoca*. Notisi che ora l'ordine della V'_k non è l'ordine n della V_k, ma questo diminuito di t unità; perchè le imagini dei punti successivi [1]) a ciascuno dei t punti riempiono uno spazio a $k-1$ dimensioni (cfr. n. 12), e per conseguenza un S_{r-t-k} generico di S_{r-t} sega V'_k soltanto negli $n-t$ punti imagini di quelli, nei quali, all'infuori

S_{r-k} dei detti t punti, l'S_{r-t} ≡ $S_{r-t-k} . S_{t-1}$ incontra V_k.

Si può raccogliere questo ed il risultato del n. 8 nell'unico enunciato: — *Se si proietta una* V^n_k, *irriducibile ed appartenente ad* S_r, *da un* S_{t-1} *individuato da* t' *punti generici di* S_r *e da* t'' *punti generici di* V^n_k $(t' + t'' = t)$ *sopra un* S_{r-t}, *se* $t < r - k$ *la proiezione è biunivoca e l'ordine della varietà proiezione* V'_k *è* $n - t''$. Perchè (cfr. n. 8, Cap. 2.°) si può proiettare successivamente da ciascuno dei considerati punti; ovvero prima dall'$S_{t'-1}$ dei punti generici di S_r sopra un $S_{r-t'}$ passante per l'S_{r-t} $(t' < r - k)$, e poi sopra l'S_{r-t} dall'$S_{t''-1}$ delle proiezioni dei rimanenti t'' punti $(t'' < r - t' - k)$.

Qui torna opportuna una osservazione importante. Premettasi che una varietà V_k appartenente ad S_r si dice *normale* di questo spazio quando non si può pensare come proiezione di una varietà *dello stesso ordine* appartenente ad uno spazio superiore. Si dice pure che una V_k ha per *spazio normale* un S_r quando la varietà *normale* dello stesso ordine, di cui essa sia proiezione, appartiene ad S_r. Or bene si ha la proprietà che *le* V^{r-k+1}_k, *irriducibili ed appartenenti ad* S_r, *sono sue varietà normali*. Infatti, per il secondo teorema del n. 6, non esistono varietà irriducibili di dimensione k e di ordine $r - k + 1$ appartenenti a spazio di dimensione superiore ad r.

11. — Ammettiamo il teorema: — *Ogni varietà (algebrica) di* S_r *di dimensione* $r - 1$ *si può rappresentare con una equazione unica fra le coordinate, ossia è una ipersuperficie*.

---

[1]) Punti di una varietà successivi ad un dato punto di essa sono quelli dati da valori delle coordinate infinitamente vicini alle coordinate del punto.

Se ne deduce facilmente l'altro teorema: — *Ogni varietà* V_k ($k < r-1$) *di* S_r *può considerarsi come intersezione completa di* $r+1$ *ipersuperficie al più, e quindi può rappresentarsi con altrettante equazioni al più, contenenti le sole coordinate* [1]. Basterà dimostrare che V_k è l'intersezione completa di $r+1$ coni che si ottengono proiettandola da $r+1$ spazî S_{r-k-2} presi in posizione generica. Infatti si considerino i coni ottenuti proiettando V_k da j S_{r-k-2} generici, e suppongasi che questi j coni abbiano comune, oltre V_k, una varietà V_{r-j}, come già si ha subito per $j=1$. Allora, se V'_{r-j} è una delle varietà irriducibili di cui si compone V_{r-j}, osservisi che preso un punto x di V'_{r-j}, fuori di V_k, e per esso un S_{r-k-1} generico, questo non incontra V_k (n. 7): sicchè, proiettando V_k da un S_{r-k-2} generico dell'S_{r-k-1}, cioè da un S_{r-k-2} generico di S_r, si ha un cono che non contiene x e quindi sega V'_{r-j} in una V'_{r-j-1}. Lo stesso ragionamento valendo per ogni componente di V_{r-j}, si conclude che l'$(j+1)^{\text{esimo}}$ cono che proietta V_k da un S_{r-k-2} generico taglia V_{r-j}, cioè i primi j coni, in una varietà V_{r-j-1}, oltre V_k. Continuando si arriva ad $r+1$ coni, la cui intersezione completa è la sola V_k [2].

Da questo teorema possiamo facilmente dedurre che *ogni* V_k^1 *è uno spazio (lineare)* S_k, giacchè proiettando V_k^1 da un S_{r-k-2} generico si ottiene una ipersuperficie del 1.° ordine, che è un iperpiano, e quindi, per quel teorema, V_k^1 può considerarsi come la completa intersezione di un certo numero di iperpiani.

Una V_k *irriducibile di* S_r, *tale che per un suo punto generico passino più di due* S_{k-1} *giacenti in essa, è un* S_k. In vero seghiamo con un S_{r-k+2}; si avrà una superficie V_2 tale che per un suo punto generico passano più di due rette esistenti sulla superficie: la quale V_2 dico essere un piano, e per ciò basterà dimostrare che due qualunque delle sue rette s'incontrano (n. 16, Cap. 1.°). Supponiamo che questo non sia: allora, presa una retta generica r di V_2, ne esisterà almeno un'altra r' che non l'incontra. Tutte le rette di V_2 uscenti dai punti di r (o di r') dovranno, per essere

---

[1] Per questo teorema e per il precedente cfr. KRONECKER, *l. c.*, pag. 30. Cfr. anche MOLK, *l. c.*, pag. 163, e KÖNIG, *l. c.*, pag. 232.

[2] Può darsi che occorrano proprio $r+1$ equazioni a rappresentare completamente una V_k appartenente ad S_r. Veggasi, per le curve gobbe di S_3, VAHLEN, *Bemerkung* ... (Journal für Math., 108, 1891): ove si dimostra che in S_3 la curva gobba razionale di 5.° ordine con una sola quadrisecante non può ottenersi come intersezione completa di tre superficie.

V_2 irriducibile, costituirla per intero, e poichè r' (od r) è retta di V_2, dovranno quelle rette incontrare tutte (nuovamente per la irriducibilità di V_2) tale retta r' (od r): sicchè V_2 sarà costituita di rette appoggiate ad r, r', nè potrà contenere alcuna retta appoggiata ad una sola di queste. Ne segue, la retta che parte da un punto generico x di V_2 ed incontra r, r' dovendo essere di V_2 medesima, che ciascuna delle altre due rette (almeno) t, t' di V_2 che passano per x non incontrerà nè r nè r'. Si conclude subito che V_2 (invocandone, come dianzi, la irriducibilità) dovrà essere costituita di rette appoggiate a tutte e quattro le rette r, r', t, t': il che è assurdo. Adunque la V_k, essendo incontrata da un S_{r-k+2} in un piano (e quindi da un S_{r-k} in un punto), è, per la proprietà precedente, un S_k, come si è affermato.

Simile ragionamento conduce manifestamente a quest'altra proposizione: — *Una V_k (irriducibile) di S_r, tale che per un suo punto generico passino due S_{k-1} giacenti su essa, è una V_k^2 specializzata $k-2$ volte* (n. 17, Cap. 6.°) [1].

12. — Se P è un punto semplice di V_k, *tangente in* P *a* V_k dicesi ogni retta che congiunge P con un punto di V_k ad esso successivo. Per determinare il luogo di queste tangenti osserviamo che un S_{r-k+1} qualunque passante per una di esse taglia V_k in una V_1 che tocca in P questa retta, e viceversa, se V_1 è la sezione di V_k con un S_{r-k+1} passante per P, la tangente a V_1 in P è tangente anche a V_k. Segue facilmente che le rette tangenti a V_k nel punto P sono in tutto ∞^{k-1} e costituiscono una varietà, che ha con un S_{r-k+1} per P una sola retta comune, e quindi con un S_{r-k} generico di S_r un solo punto comune. Tale varietà, essendo del 1.° ordine, è (n. 11) uno spazio S_k, che dicesi *tangente a* V_k *nel punto* P.

Quando si proietta una V_k da un suo punto generico sopra un S_{r-1}, i punti di V_k infinitamente vicini a P saranno proiettati dalle rette uscenti da P e contenute nell'S_k tangente a V_k in P: quindi, *nella proiezione* V'_k *di* V_k *giace l'*S_{k-1} *sezione di quell'* S_k *coll'* S_{r-1}.

Se P è un punto s^{uplo} di una curva, appartenente a qualsiasi spazio, esistono s rette (distinte o coincidenti), che si dicono *tangenti alla curva in* P, ciascuna congiungente questo punto con un punto successivo della curva, rette cioè che sono posizioni limiti delle rette congiungenti P a

[1]) SEGRE, *Sur un théorème de la géométrie à n dimensions* (Math. Ann., 30, 1887).

quegli s punti della curva esistenti in un iperpiano, i quali cadono in P quando l'iperpiano viene a passare per questo punto. Ciò posto, se P è un punto s^{uplo} di una V_k $(k > 1)$, con ragionamento analogo a quello fatto sopra, cioè considerando le sezioni di V_k con S_{r-k+1} per P, le quali hanno in P un punto s^{uplo}, si conclude che esiste un cono di ordine s costituito dalle rette congiungenti P coi punti di V_k successivi ad esso, cono che si dice *tangente a* V_k *nel punto* s^{uplo}.

Indicando sempre con V'_k una proiezione biunivoca di V_k per ogni spazio proiettante che sia s-secante di V_k si ha in corrispondenza un punto s^{uplo} di V'_k, nel quale il cono tangente è costituito di s S'_k che sono le imagini degli s S_k tangenti a V_k nei punti di appoggio dello spazio proiettante.

Un iperpiano che passi per l' S_k tangente a V_k in un suo punto semplice P taglia V_k in una V_{k-1} che ha un punto doppio in P, perchè un S_{r-k} condotto per P nell'iperpiano sega l'S_k in un S_1 (tangente in P a V_k) e quindi ha in P due intersezioni colla V_{k-1}. Reciprocamente, se un iperpiano taglia V_k in una V_{k-1} con un punto doppio in un punto P semplice di V_k, quell' iperpiano contiene l' S_k tangente a V_k nel punto P, perchè un S_{r-k} per P, nell'iperpiano, ha due intersezioni in P con V_{k-1} e quindi con V_k, cioè contiene una tangente in P a V_k, ed il luogo di tali tangenti nell' iperpiano, avendo un punto sopra ogni suo S_{r-k-1} generico, è un S_k. Adunque, se diciamo *iperpiano tangente* a V_k in un suo punto semplice P un iperpiano, che la tagli in una V_{k-1} con un punto doppio in P (definizione valevole anche se $k = r - 1$, per il n. 9, Cap. 8.°) si ha che *gli iperpiani tangenti ad una varietà* V_k *sono gli iperpiani passanti per i suoi* S_k *tangenti*.

Anche gli S_t $(r - 1 > t > k)$ passanti per l'S_k tangente in un punto P (semplice) di V_k si dicono *tangenti* in P a V_k: e *tangente* pure si dice ogni S_t $(1 < t < k)$ passante per P e posto nell'S_k tangente, il quale è manifestamente tangente alle V_t sezioni di V_k mediante gli S_{r-k+t} contenenti l'S_t [1]).

13. — Aggiungansi alle precedenti queste altre osservazioni, nell'ipotesi di V_k irriducibile ed appartenente ad S_r.

Anzitutto, se V_{r-1} è un cono di vertice S_{t-1}, cioè costituita di S_t per l'S_{t-1}, l'S_{r-1} tangente in un punto P a V_{r-1} lo è in tutti i punti dell'S_t

---

1) Vedasi DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ...* (Rend. della R. Accad. di Napoli, 1886).

che passa per P, giacchè l'S_{r-1} contiene tutti gli S_t a questo successivi (in quanto congiungono i punti successivi a P con S_{t-1}), e però tutte le tangenti nei punti del considerato S_t.

Un S_{r-1} *tangente in un punto generico* P *ad una* V_k *non può toccarla in altri punti in numero finito.* Infatti, avendosi ∞^{r-k-1} S_{r-1} tangenti in ogni punto di V_k (n. 12), la totalità degli S_{r-1} tangenti sarebbe allora ∞^{r-1}: quindi per un S_{r-3} generico ne passerebbero ∞^1 inviluppanti un cono, di cui, per l'osservazione precedente, ogni S_{r-1} tangente toccherebbe in un numero finito (≥ 2) di S_{r-2}. Segando il cono con un S_2 generico si avrebbe quindi una curva piana (irriducibile) di cui ogni tangente toccherebbe in più di un punto, cioè sarebbe tangente (almeno) doppia, il che è assurdo.

Se un S_{r-1} *tangente ad una* V_k *in un punto generico la tocca in* ∞^t *punti* ($k > t > 0$), *questi devono essere di un* S_t. Suppongasi che costituiscano una $V_t^{(\omega)}$: allora un S_{r-t} generico incontra V_k in una V_{k-t}, per la quale un S_{r-t-1} tangente in un punto generico P la tocca in altri $\omega-1$ punti. Ciò è chiaro osservando che l'S_{r-t-1}, contenendo l'S_{k-t} tangente in P a V_{k-t}, giace in un S_{r-1} tangente in P a V_k e che questo S_{r-1} sega S_{r-t} appunto nell'S_{r-t-1}, onde in questo debbono trovarsi gli S_{k-t} sezioni (con S_{r-t}) degli S_k tangenti a V_k negli altri $\omega-1$ punti di contatto dell'S_{r-1} che stanno nell'S_{r-t}. Adunque, per la proprietà precedente, $\omega=1$, cioè la V_t è un S_t. Quando avviene il fatto supposto si dice che S_k *tocca* V_k *nell'* S_t o *lungo l'* S_t, e V_k risulta una totalità di S_t (o di spazî di maggiore dimensione).

Le due proprietà dimostrate si estendono ad un S_h tangente in un punto generico ad una V_k, quando sia $r-1 > h \geq k$, facendo una proiezione da un S_{r-h-2} sopra un S_{h+1}, e tenendo presente che, se un S_h tocca V_k in ∞^t punti che si proiettano in un S_t, i punti stessi (essendo S_{r-h-2} generico) debbono costituire un S_t.

14 — Possiamo ora introdurre un importante concetto. Consideriamo il sistema lineare costituito da tutte le ipersuperficie della stessa classe n. Questo sistema (come quello di tutte le ipersuperficie dello stesso ordine n) si può pensare come un $S_{\binom{n+r}{r}-1}$, cioè come uno spazio lineare ad $\binom{n+r}{r}-1$ dimensioni, i cui elementi, punti ad es., sono le ipersuperficie stesse (cfr. Cap. 10.°). Ebbene, se una V_k non è una totalità di spazî lineari, un S_{r-1} tangente in un punto generico non può toccarla altrove

(n. 13) e quindi (n. 12) gli S_{r-1} tangenti a V_k sono ∞^{r-1}. Si può adunque pensare V_k come una ipersuperficie inviluppo di una certa classe n, cioè come un punto di un $S_{\binom{n+r}{r}-1}$, e una totalità di tali V_k come una totalità di punti dello spazio stesso.

Che se V_k è luogo di $\infty^{k-t} S_t$ e avviene che l'S_{r-1} tangente in un punto generico tocchi in un S_t (o spazio di dimensione inferiore), ricordisi (n. 18, Cap. 2) che S_t è punto di una varietà di un $S_{\binom{r+1}{t+1}-1}$, cosicchè V_k è una V_{k-t} di tale varietà. Se anche V_{k-t} presenta fatto analogo, si ripeta analoga considerazione, e così di seguito, fino a che si giunga ad una $V_{k'}$ di un $S_{r'}$ avente $\infty^{r'-1}$ iperpiani tangenti; per la quale vale la considerazione generale fatta sopra.

Questa vale pure se $k=0$, cioè se V_k^n è il sistema di n punti, giacchè questi costituiscono un inviluppo di classe n, rappresentato dalla equazione che è il prodotto delle equazioni degli n punti. Le coordinate del punto che rappresenta V_k^n nello spazio $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ si esprimono allora per funzioni (simmetriche) delle coordinate degli n punti $x, y, \ldots$ cioè colle

$$X_{il\ldots} = \sum x_i y_l \ldots$$

in cui la somma s'intende fatta tenendo fissi gli indici $i, l, \ldots$ e permutando le lettere $x, y, \ldots$.

Adunque *una totalità di* V_k^n *può identificarsi ad una totalità di punti (o iperpiani) di un certo spazio (lineare).* Se questa totalità è algebrica, quella pure si dice *algebrica*, se questa è composta di parti di varî dimensioni, lo stesso è di quella, ed una totalità di data dimensione di V_k si dice *irriducibile* (o *riducibile)* se tale è la varietà a cui è identificata.

15. — Ma si può fare un passo ulteriore. Un aggregato di n punti $x, y \ldots$ presi rispettivamente in n spazî distinti (o sovrapposti) $S_p, S_q, \ldots$ si può sempre considerare come un punto di un certo spazio. Ad es., le

$$(2) \qquad X_{il\ldots} = x_i y_l \ldots$$

(i assumendo i valori $0, 1, \ldots, p$; l i valori $0, 1, \ldots, q$; ...) dànno appunto, per determinati valori delle $x_i, y_l, \ldots$, le coordinate di un punto di uno spazio a $(p+1)(q+1)\ldots - 1$ dimensioni, cioè di quello in cui le $(p+1)(q+1)\ldots$ X_{il}, aventi variabilità generale, sono coordinate omogenee. In questo spazio ogni totalità di detti aggregati è rappresentata da una totalità di punti. Così il complesso di tutti i medesimi aggregati è una varietà algebrica a $\sigma = p + q + \ldots$ dimensioni definita dalle (2), ove le x_i, $y_i \ldots$ sono n sistemi di parametri variabili indipendenti. L'ordine della varietà è $\frac{\sigma!}{p!\,q!\ldots}$, come è facile dimostrare [1]).

In ciò che ora si è detto è incluso il concetto di *corrispondenza*. Per semplicità di discorso consideriamo due soli spazî S_p, S_q ed in essi due varietà V_k, $V_{k'}$. Se per ogni punto x di V_k è individuato un numero finito o infinito di punti y (detti *corrispondenti* od *omologhi* a quello) di $V_{k'}$ e reciprocamente, avremo fra V_k e $V_{k'}$ una corrispondenza, la quale è data dalla totalità di coppie di punti x, y corrispondenti, cioè da una totalità di punti di un $S_{(p+1)(q+1)-1}$. Nuovamente, se questa totalità di punti è algebrica, quella dicesi *una corrispondenza algebrica*, e se la totalità si compone di altre di varie dimensioni, ovvero, essendo di un'unica dimensione, è una varietà irriducibile (o riducibile), lo stesso è della corrispondenza.

Noi ci limitiamo naturalmente alle corrispondenze algebriche. Una tale, continuando a considerare due sole varietà, è adunque definita da un sistema di equazioni algebriche (comprendenti le equazioni delle due varietà) le quali nello spazio $S_{(p+1)(q+1)-1}$ (ad es.) definiscono una varietà algebrica. Ma, poichè le equazioni di questa varietà si possono sempre ridurre a sole equazioni nelle coordinate X_{il} di detto spazio (n. 11), segue, per le (2), ritornando alla considerazione diretta degli spazî S_p, S_q, che *la nostra corrispondenza è rappresentata da equazioni algebriche nelle sole coordinate x_i, y_l dei due spazî.*

16. — Consideriamo il caso particolare di una corrispondenza (sottintendasi algebrica, irriducibile) fra due varietà V_k, $V_{k'}$, per la quale ad ogni punto y di $V_{k'}$ corrisponda un numero finito α di punti x di V_k. In tal caso è facile vedere che *i rapporti delle coordinate del punto x si esprimono come radici di altrettante equazioni di grado α, con coefficienti funzioni razionali delle coordinate del punto y.*

Infatti supponiamo dapprima che la varietà V_k sia un S_1. Allora si

---

[1]) Cfr. Segre, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazî* (Rendic. di Palermo, 5, 1891).

ha un solo rapporto $\frac{x_1}{x_0}$ che dà i punti di S_1, e il sistema di equazioni che fissa la corrispondenza darà α valori diversi per $\frac{x_1}{x_0}$ corrispondentemente ad ogni sistema di valori delle y_i. Quindi sarà possibile arrivare, con sole operazioni razionali, ad una equazione di grado α in $\frac{x_1}{x_0}$, che darà gli α punti x corrispondenti ad un medesimo punto y. Che se V_k è una varietà qualunque e $x_0, \ldots, x_r$ sono le coordinate di un suo punto generico x, proiettiamo V_k dall' S_{r-2} fondamentale determinato dai punti $A_2, \ldots, A_r$ (supposto che la piramide fondamentale abbia posizione generica) e diciamo corrispondenti un punto y di V_k ed un iperpiano per questo S_{r-2}, quando l'iperpiano proietta uno dei punti x corrispondenti ad y. Poichè la coordinata dell'iperpiano per x, nel fascio che esso descrive di sostegno S_{r-2}, è $\frac{x_1}{x_0}$, questa è una funzione algebrica ad α valori delle coordinate y_i, cioè si ricade nel caso precedente. Analogamente per $\frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_r}{x_0}$.

17. — Se $\alpha = 1$, le x_i sono adunque esprimibili razionalmente per le y_i e si avrà

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots : \psi_r(y),$$

le ψ_i essendo forme di uno stesso ordine. Allora la corrispondenza si dice *univoca* (in un senso, e sottintendendo algebrica) o *razionale*. Se poi, insieme alle precedenti, valgono le analoghe

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_r = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_r(y),$$

allora la corrispondenza si dice *biunivoca* (sottintendendo algebrica) o *birazionale* [1]). In questo caso le due varietà hanno la stessa dimensione, il che del resto si verifica sempre quando ad ogni punto di una corrisponde un numero finito α' di punti dell'altra, e viceversa ad ogni punto di questa un numero finito α di punti di quella, cioè, come dicesi, quando esiste fra le due varietà una corrispondenza $(\alpha\alpha')$.

Due varietà in corrispondenza birazionale con una terza lo sono pure

---

[1]) In seguito (n. 7, Cap. 10.°) si dimostra che una corrispondenza birazionale così che alle sezioni iperpiane corrispondano le sezioni iperpiane è una omografia.

fra loro. Le corrispondenze birazionali fra due S_k sono dette anche corrispondenze *cremoniane*.

Una varietà V_k, che può trasformarsi birazionalmente in uno spazio lineare S_k, dicesi *razionale* od *omaloide*. E più in generale, ogni totalità di elementi identificabile ad una varietà razionale V_k (n. 14) dicesi *ente razionale* ∞^k. Per poter affermare che una V_k è razionale occorre e basta che le coordinate dei suoi punti sieno funzioni razionali di k parametri indipendenti ed inoltre che ad ogni punto di V_k corrisponda un solo gruppo di valori dei parametri stessi. Questa seconda condizione è superflua, cioè conseguenza della prima, per $k=1$, come si vedrà in seguito (n. 1, Cap. 12.°) ed è pure superflua per $k=2$ [1]).

È evidente che se una varietà (o ente) corrisponde biunivocamente ad una razionale, sarà essa stessa razionale, e che due V_k (o enti) razionali sono riferibili fra loro birazionalmente in infiniti modi.

18. — Una corrispondenza $(\alpha\,\alpha')$ tra due curve razionali, e in generale fra due enti razionali ∞^1, si può rappresentare (n. 17) con una equazione degli ordini α, α' fra i parametri x, y degli elementi omologhi dei due enti:

$$(3) \qquad f(x\,y) = \sum a_{ij}\, x^{\alpha-i}\, y^{\alpha'-j} = 0\,.$$

Essa è individuata da $\alpha\alpha' + \alpha + \alpha'$ coppie di elementi omologhi, tanti essendo i rapporti indipendenti dei coefficienti a_{ij}. Se $\alpha = \alpha' = 1$, si ha il concetto di proiettività già posto a fine del n. 3, Cap. 3.°. Ogni trasformazione proiettiva di ciascuno dei due enti razionali in un altro cambia una corrispondenza $(\alpha\,\alpha')$ ancora in una corrispondenza $(\alpha\,\alpha')$.

I due enti sieno sovrapposti (cioè ne costituiscano uno solo). Si può chiedere allora quanti elementi coincidano coi loro corrispondenti, cioè, come dicesi, siano *uniti*. Se i parametri x, y hanno eguale significato, facendo $x = y$ nella (3), si trova che *gli elementi uniti di una corrispondenza* $(\alpha\,\alpha')$, *sopra un ente razionale* ∞^1, *sono* $\alpha + \alpha'$; che è il *principio di corrispondenza* formulato da Chasles [2]).

Se la detta equazione (3) è simmetrica in x, y, deve essere $\alpha = \alpha'$, e la corrispondenza si chiama *sistema simmetrico di grado* α, non occor-

[1]) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Math. Ann., 44, 1894).

[2]) Cfr. SEGRE, *Intorno alla storia del principio di corrispondenza*... (Bibliotheca mathematica, 6, 1892).

rendo allora alcuna distinzione fra i due enti sovrapposti. Un sistema simmetrico di grado α è individuato da $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$ coppie di elementi corrispondenti e possiede 2α elementi uniti.

L'importanza del principio di corrispondenza sta in ciò che esso ci permette di stabilire il numero degli elementi uniti di una corrispondenza $(\alpha\alpha')$ di un ente razionale ∞^1 in sè, senza che sia necessario di avere effettivamente costruita l'equazione (3) che la rappresenta.

19. — Se una radice della equazione che dà gli $\alpha+\alpha'$ elementi uniti è multipla secondo il numero m, l'elemento corrispondente assorbe m di quegli elementi uniti, o, come dicesi, ha la *moltiplicità* m. La determinazione di tale moltiplicità è talvolta un problema difficile. Ecco un'osservazione su ciò, utile in molti casi.

Supponiamo, come è permesso (facendo, se occorre, una trasformazione lineare), che uno degli elementi uniti sia dato da $x=y=0$, cioè che l'equazione della corrispondenza (variata l'indicazione dei coefficienti) sia

$$bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\ldots=0, \tag{4}$$

e quindi l'equazione che dà gli elementi uniti sia

$$(b+c)x+(d+e+f)x^2+\ldots=0.$$

L'elemento considerato è semplice o multiplo (almeno doppio), secondochè $b+c\neq 0$ ovvero $b+c=0$. Ora se l'elemento stesso è tale che, in qualunque dei due enti sovrapposti lo si consideri, sempre due dei suoi elementi corrispondenti dell'altro ente cadano in esso, dovrà essere nella (4) $b=0$, $c=0$ e quindi $b+c=0$: non viceversa. Dunque, *in una corrispondenza (non simmetrica), condizione sufficiente (non necessaria) perchè un elemento sia (almeno) doppio è che considerato in amendue gli enti sempre coincida con due dei suoi corrispondenti.*

Invece *per un sistema simmetrico è condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento sia (almeno) doppio che coincida con due dei suoi corrispondenti:* perchè nella (4), per un sistema simmetrico, deve essere $b=c$, e però ecc..

20. — Sarà bene a questo punto introdurre un concetto fondamentale della geometria moderna, del quale avremo anche a far uso, cioè il *genere* di un ente semplicemente infinito (sottintendasi sempre algebrico).

Cominciamo dal considerare una curva piana irriducibile di ordine n, fornita di punti multipli *ordinari* $s_1^{\text{uplo}}, s_2^{\text{uplo}}, \dots, s_i^{\text{uplo}}$, tali cioè che le s_i tangenti alla curva in ciascun punto s_i^{uplo} sieno tutte distinte, onde la classe m della curva è (n. 18, Cap. 8.°)

$$m = n(n-1) - \sum s_i(s_i - 1) .$$

Il numero p definito dalla

$$(5) \qquad 2p = (n-1)(n-2) - \sum s_i(s_i - 1)$$

od anche, per la precedente, dalla

$$2p = m - 2n + 2 ,$$

dicesi *genere della curva piana* [1]).

L'estensione di questa definizione ad ogni ente ∞^1 si fa coll'aiuto del teorema di Riemann: — *Due curve piane irriducibili* C, C′ *in corrispondenza birazionale sono dello stesso genere* —. Sieno $n, m, p; n', m', p'$ ordine, classe, genere delle curve C, C′ rispettivamente. Il teorema è evidente se le due curve sono omografiche, avendosi allora $n = n'$, $m = m'$ ed anche se sono correlative (per una curva-inviluppo il genere essendo definito in modo correlativo al suindicato). Per dimostrarlo in ogni caso possiamo quindi ritenere, senza alcuna limitazione, che le due curve C, C′ sieno poste nello stesso piano. Presi in questo due punti generici O, O′, consideriamo nel fascio di rette di centro O (ad. es.) una corrispondenza tale che due rette omologhe passino rispettivamente per due punti di C, i cui corrispondenti su C′ sieno allineati con O′. Manifestamente la corrispondenza è un sistema simmetrico: inoltre il grado di questo sistema è $n(n'-1)$. In vero una retta r per O incontra C in n punti, i cui corrispondenti congiunti con O′ dànno n rette intersecanti C′ in altri $n(n'-1)$ punti, i cui corrispondenti su C congiunti con O forniscono le $n(n'-1)$ rette omologhe ad r. Il che sta se gli n punti in cui r incontra C sono distinti ovvero cadono (in tutto od in parte) in un

[1]) Questa definizione e le proprietà che seguono enunciamo in forma generale, sebbene le considerazioni qui esposte valgano solo per curve piane con multiplicità ordinarie, perchè la definizione e le proprietà stesse si possono dare anche per curve piane con multiplicità qualunque, come mostreremo nel Cap. 1.° dell'Appendice.

punto multiplo sulle varie (distinte) direzioni date dalle tangenti in esso; potendo, in amendue i casi, gli n punti corrispondenti essere tutti distinti ovvero cadere (nel modo ora detto) in un punto multiplo di C′ (e lo stesso ripetasi degli altri $n(n'-1)$ punti di C′ e dei loro corrispondenti). Le rette unite del sistema simmetrico sono le m' rette che vanno da O ai punti di C corrispondenti ai punti di contatto delle tangenti condotte da O′ a C′, ed inoltre le rette, di cui indicheremo il numero con z, che godono della proprietà che degli n punti, in cui ciascuna interseca C, due abbiano i loro corrispondenti allineati con O′. Quelle rette sono soluzioni semplici (anche per essere O, O′ generici), mentre queste sono soluzioni doppie, perchè (n. 19) ciascuna coincide, come è chiaro, con due delle sue corrispondenti (fra le ultime potendo o no trovarsi le rette che vanno ai punti multipli di C, anche contate più volte). Si ha adunque (n. 18)

$$2\,n(n'-1)=m'+z.$$

Se ripetiamo il medesimo ragionamento, scambiando l'ufficio delle due curve, si ha pure

$$2\,n'(n-1)=m+z.$$

Eliminando z da queste due relazioni, segue

$$m-2n=m'-2n',$$

e quindi

$$p=p',$$

come volevamo dimostrare [1]).

Conseguenza immediata, quando si pensi alla corrispondenza biunivoca algebrica fra i punti di una curva, e le rispettive tangenti, è che *il genere di una curva-luogo è eguale al genere della curva-inviluppo ad essa aderente.*

21. — *Genere di una curva irriducibile appartenente ad* S_r è il genere di una sua proiezione sopra un piano (da un S_{r-3} generico): definizione ben determinata, perchè due proiezioni piane della stessa curva (da due S_{r-3} generici) sono in corrispondenza birazionale con questa e quindi fra loro, e sono perciò dello stesso genere per il teorema di Riemann.

---

[1]) La dimostrazione è di SCHUBERT, nella Nota *Ueber die Erhaltung des Geschlects* ... (Math. Ann., 16, 1880).

Se la curva considerata ha punti multipli ordinarî (cioè a tangenti distinte) $s_1{}^{uplo}$, $s_2{}^{uplo}$, ..., $s_t{}^{uplo}$, una sua proiezione piana (da un S_{r-3} generico) ha i punti imagini di questi pure multipli ordinarî e rispettivamente colle stesse moltiplicità. Inoltre sono punti doppî della proiezione (n. 9) le imagini delle coppie di punti *(punti doppî apparenti)* che si trovano in S_{r-2} proiettanti: cosicchè, dicendo h il numero di tali coppie, ed n l'ordine della suddetta curva, il genere di questa è dato dalla

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2} - h.$$

Se la proiezione della curva stessa si fa da un S_{r-3} che ne congiunga $r-2$ punti generici si ottiene una curva piana di ordine $n-r+2$ (n. 10), e quindi (questa essendo dello stesso genere di quella) *per il genere p di una curva di ordine n, irriducibile, appartenente ad S_r, si ha la limitazione*

$$p \leq \frac{(n-r+1)(n-r)}{2}$$

(valida anche per $r=2$).

Il teorema di Riemann si estende subito a due curve qualunque (irriducibili) in corrispondenza birazionale. Ne risulta, come sopra, ben determinata la definizione di *genere di un ente (irriducibile)* ∞^1, intendendo con tale denominazione il genere di una curva, alla quale quell'ente sia identificato (n. 14). Se gli ∞^1 elementi dell'ente sono degli spazî S_{k-1} e però l'ente stesso una V_k, è chiaro che il genere dell'ente è anche il genere della curva sezione di V_k con un S_{r-k+1}.

Manifestamente il teorema di Riemann si estende ancora, cioè si ha che due *enti* ∞^1, *irriducibili, in corrispondenza birazionale sono dello stesso genere.*

22. — Riprendiamo la considerazione di una curva piana irriducibile C di ordine n con punti multipli ordinarî $s_1{}^{uplo}$, $s_2{}^{uplo}$, ..., $s_t{}^{uplo}$. Dall'espressione della sua classe m, data nel n. 20, risulta

$$n(n-1) \geq \sum s_i(s_i-1)$$

cioè

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2} \geq n-1 \geq 0.$$

Si potrà adunque (se $n > 1$) considerare una curva C' di ordine $n-1$ che abbia punti $(s-1)^{upli}$ nei punti s^{upli} e passi per altri $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2}$ punti semplici di C (cfr. n. 13, Cap. 8.°). Il numero delle intersezioni delle due curve è $n(n-1)$, e si ha per conseguenza:

$$n(n-1) \geq \sum s_i(s_i-1) + \frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

ossia:

$$(n-1)(n-2) \geq \sum s_i(s_i-1),$$

o infine

$$p \geq 0.$$

Adunque *il genere di una curva piana irriducibile (e quindi di ogni ente irriducibile* ∞^1*) è un numero positivo, o nullo.* Una curva, per cui si abbia $\Sigma s_i(s_i-1) > (n-1)(n-2)$ è necessariamente riducibile (dovendo in tal caso C contenere C' od una sua parte).

Fermiamoci al caso $p=0$. Allora, valendo nelle ultime diseguaglianze il segno $=$, si verifica subito che, se si abbandona il passaggio per uno dei punti semplici di C della curva C' antecedentemente considerata, questa varia in un fascio, incontrando C in un solo punto variabile. Quindi la curva C, di cui i punti vengono così a corrispondere biunivocamente ed algebricamente ai valori di un parametro (quello del fascio), è una curva razionale. Viceversa, avendosi una tal curva, s'interpreti il parametro che ne dà i punti, uno ad uno, come parametro che dà, pure uno ad uno, i punti di una retta o di una conica, le quali sono curve di genere zero, e si trova, per il teorema di Riemann, che anche la curva data è di genere zero. Si può adunque affermare che *un ente* ∞^1 *di genere zero è razionale, e viceversa.*

23. — Ripigliamo lo studio di una V_k^n qualunque appartenente ad S_r, facendo dapprima alcune osservazioni generali sulla totalità ∞^{2k} delle sue corde o bisecanti, totalità irriducibile se, come supporremo, tale è V_k^n.

Può darsi che una retta per un punto P di V_k^n sia di quella totalità in quanto risulti posizione limite di qualche corda i cui punti d'appoggio tendono a cadere in P con una certa legge. Siffatta retta si dirà *corda* *impropria relativa al punto* P, chiamando *proprie* le corde i cui punti d'appoggio sono distinti.

Se il punto P è semplice, sono evidentemente corde improprie relative ad esso tutte le tangenti in P a V_k^n, cioè tutte le rette uscenti da P dell'S_k ivi tangente.

24. — Suppongasi ora che P sia un punto doppio e facciasi dapprima il caso di $k=1$. Allora non soltanto le due tangenti alla curva V_1^n nel punto doppio, le quali per semplicità supporremo distinte, sono corde improprie, ma sono tali tutte le rette del fascio che ha il centro in P e che giace nel piano π di quelle due tangenti, e quelle sole. Per convincersene basta osservare che un S_{r-1} variabile comunque per un punto M di π contiene $\frac{n(n-1)}{2}$ corde di V_1^n congiungenti a due a due gli n punti d'intersezione dell'S_{r-1} con V_1^n, e che, quando l'S_{r-1} viene a passare per P, almeno due di questi punti cadono in P (sulle due tangenti) e quindi almeno una di quelle corde cade in MP. Non possono esservene altre fuori di quel fascio, perchè se una corda propria appoggiata alla V_1^n nei punti A_1, A_2 ha per limite una corda impropria r relativa a P, proiettando la curva stessa da un punto O della A_1A_2 sopra un S_{r-1}, il punto doppio A proiezione dei punti A_1, A_2 si approssima indefinitamente al punto doppio proiezione di P; sicchè questo punto doppio proiezione viene ad avere le due tangenti coincidenti (propriamente diventa ciò che dicesi un tacnodo), il che non può avvenire se il centro di proiezione non cade su π.

La proprietà dimostrata si conferma col computo seguente. Un S_{r-1} per P contiene $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ corde congiungenti i suoi residui $n-2$ punti d'intersezione con V_1^n, le $n-2$ corde (da contarsi due volte) congiungenti P a questi stessi punti e infine la corda intersezione di S_{r-1} e π, cioè in tutto appunto $\frac{n(n-1)}{2}$ corde.

Proprietà analoga si ha per un punto s^{uplo} di V_1^n colle s tangenti distinte. Esistono allora $\frac{s(s-1)}{2}$ fasci di corde improprie date dai piani congiungenti a due a due le tangenti stesse. Nel caso che queste tangenti sieno (a gruppi o tutte) coincidenti e comunque si specializzi la natura del punto s^{uplo}, i detti piani vengono in vario modo a coincidere, ma *in niun caso cresce l'infinità delle corde improprie relative al punto medesimo*, perchè, divenendo esse ∞^2, costituirebbero una parte della totalità delle corde, la quale sarebbe quindi riducibile, contrariamente al supposto di V_1^n irriducibile [1]).

25. — Le cose procedono diversamente per una V_k di S_r quando $k>1$. Un punto doppio di V_k, in relazione alle sue corde improprie, è allora da distinguere in due specie. Si dice *punto doppio improprio* se ogni retta per esso fa parte della varietà delle corde di V_k e *proprio* nel caso contrario [2]).

Proiettando una V_k da un S_{t-1} generico sopra un S_{r-t} $(k<r-t)$ si ha, come sappiamo (n. 7), una V'_k riferita a quella biunivocamente. Si è pure veduto (n. 9) che, supposta V_k priva di singolarità, V'_k possiede una V'_{2k-r+t} di punti doppî (di ciascuno dei quali il cono tangente è, per il n. 12, composto di due S_k) [3]). Dico che *ogni tale punto doppio* P *è improprio:* cioè che, assunto in S_{r-t} un punto generico O, la retta OP è corda impropria di V'_k. Per ciò dicasi $P_1 P_2$ la corda di V_k passante per P ed incontrante S_{t-1}: questa è anche corda di V_k incontrante l'$S_t \equiv O\,S_{t-1}$ ed anzi apparterrà ad una varietà irriducibile $\infty^{2k-r+t+1}$ di corde appoggiate ad S_t (cfr. nota [3])). Una generica di queste corde non è appoggiata ad S_{t-1}, perchè ad S_{t-1} se ne appoggiano soltanto (come già fu detto) ∞^{2k-r+t} e quindi dà per proiezione sopra S_{r-t} da S_{t-1}, oppure da S_t, una corda uscente da O, appoggiata a V'_k in due punti distinti. Dunque la suddetta varietà di corde si proietta da S_t sull'S_{r-t} in $\infty^{2k-r+t+1}$ generatrici di un cono, irriducibile, di vertice O, del quale la generatrice generica taglia V_k in due punti distinti, cioè è corda propria, e del quale

---

[1]) Cfr. B. LEVI, *Sulla varietà delle corde...* (Memorie dell'Accad. di Torino, 48 (2), 1898).

[2]) Cfr. SEVERI, *Intorno ai punti doppî improprî di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni...* (Rendiconti di Palermo, 15, 1901), e *Sulle intersezioni delle varietà algebriche...* (Mem. dell'Accad. di Torino, 52 (2), 1902).

[3]) *Precisamente una* V'_{2k-r+t}, *non una tale insieme ad altre varietà di punti doppî di dimensione* $<2k-r+t$: altrimenti si potrebbero fare sezioni di V_k con particolari $S_{2r-2k-t}$ condotti per l'S_{t-1} di proiezione, aventi, oltre ai punti doppî apparenti (rispetto ad S_{t-1}) che competono ad una sezione ottenuta con un $S_{2r-2k-t}$ generico, altri punti doppî apparenti in numero finito; mentre, stante la irriducibilità della varietà delle corde di V_k, il numero finito delle sue corde giacenti in un $S_{2r-2k-t}$ non può variare che diventando infinito. Analoga considerazione può farsi per la $V_{3k-2(r-t)}$ di punti tripli... del teorema del n. 9.

è generatrice anche la retta OP (proiezione dall' S_t della $P_1 P_2$), onde questa è posizione limite di quella.

Aggiungasi la proprietà seguente che (almeno nel caso considerato) dà ragione della denominazione di punti doppî impropri: — *La curva sezione della* V'_k *di* S_{r-t} *mediante un* $S_{r-t-k+1}$, *il quale contenga uno o più punti di* V'_{2k-r+t}, *ha lo stesso genere di una curva sezione mediante un* $S_{r-t-k+1}$ *generico* —. Si suppone naturalmente $k<r-t-1$ e quindi $2k-r+t<k-1$. Cosicchè, proiettando V'_k da un $S_{r-t-k-2}$ generico di S_{r-t} sopra un S_{k+1} si ha una V''_k con una V''_{k-1} di punti doppî, nella quale è contenuta (per la nota [3])) la V''_{2k-r-t} proiezione di V'_{2k-r+t}. Per conseguenza segando V''_k con un S_2 generico, si trova una curva piana che ha lo stesso numero di punti doppî di una curva piana ottenuta segando V''_k con un S_2 che contenga uno o più punti doppî di V''_{2k-r+t}: ma tali sezioni piane hanno (n. 21) lo stesso genere delle curve obbiettive di cui sono imagini, e però ecc..

26. — Per illustrare maggiormente la distinzione fra punti doppî proprî e improprî facciamo qualche osservazione nel caso di una V_{r-2} di S_r $(r \geq 4)$.

Se il cono tangente in un punto doppio P *di* V_{r-2} *si spezza in due* S_{r-2} *segantisi secondo un* S_{r-4}, *il punto doppio* P *è improprio:* cioè una retta l, generica per P, è corda impropria. In vero i due S_{r-1} congiungenti l con quei due S_{r-2} s'incontrano in un S'_{r-2} contenente l e segante i due medesimi S_{r-2} in due S_{r-3} (distinti): cosicchè un S_2 per l nell' S'_{r-2} incontrerà questi in due rette l', l'' (distinte). Un S_3 di S_r, che venga a passare per tale S_2, sega V_{r-2} in una curva con punto doppio in P e colle l', l'' ivi tangenti. La l, essendo del loro fascio, è corda impropria della curva e quindi della V_{r-2}.

Ogni corda impropria l relativa ad un punto doppio P *(proprio od improprio) di* V_{r-2} *è corda impropria relativa a* P *di qualche curva sezione di* V_{r-2} *mediante un* S_3 *per* P. Assumasi infatti sulla l un punto generico O e si consideri il cono delle corde di V_{r-2} passanti per O, cono a cui appartiene l. Un S_3 passante per il piano π tangente a questo cono lungo l (cioè un S_3 che contenga l e la corda propria infinitamente vicina) sega V_{r-2} secondo una curva la quale ha un punto doppio in P ed il piano delle due tangenti è precisamente π, cioè (n. 24) l è corda impropria della curva, come fu asserito. Adunque tutte le corde improprie si ottengono in ogni caso col variare di S_3 per P.

Ne segue che, *se il cono tangente in un punto doppio* P *di* V_{r-2} *appartiene ad un* S_{r-1}, *il punto* P *è proprio:* giacchè una retta l per P che sia corda impropria sarà tale, in virtù dell'osservazione ora fatta, per qualche sezione di V_{r-2} con un S_3 per P e quindi l giacerà nel fascio determinato dalle due generatrici di detto cono che sono in S_3, cioè l starà in S_{r-1}. Anzi la stessa considerazione applicata ad una retta l partente da P ed esistente nell' S_{r-1} (prendendo cioè un S_3 passante per un S_2 di S_{r-1} contenente l) mostra che *sono corde improprie di* V_{r-2} *tutte le rette della stella* P *in* S_{r-1}.

27. — L'estensione delle cose precedenti ad una V_k qualunque (irriducibile) non è immediata e richiede ulteriori indagini [1]. Certamente allora le corde improprie in un punto doppio possono riempire un S_{k+1} o un S_{k+2}, ... (non un S_{2k}, se $r > 2k$, per la irriducibilità della varietà delle corde): di che ci limiteremo a dare due esempî in S_5.

Si proietti una superficie V_2 di S_6 sopra un S_5 da un punto O di una sua corda. I punti P_1, P_2 di appoggio di questa corda si proiettano in un punto doppio P della proiezione V'_2, dal qual punto escono tante corde improprie quante sono le traccie sull'S_5 dei piani di S_6 proiettanti da O le corde di V_2 infinitamente vicine alla $P_1 P_2$, cioè le ∞^3 rette partenti da P e giacenti nell'S_4 determinato dai due piani tangenti in P alla V'_2.

Se si considera invece nell'S_5 una superficie V_2 intersezione di tre ipersuperficie, di cui due si tocchino in un punto P, le corde improprie di V_2 uscenti da P stanno tutte nell'S_3 comune ai due S_4 tangenti alle tre ipersuperficie.

28. — **Una importante trasformazione birazionale di una V_k (riducibile o irriducibile) è quella già considerata nel n. 7, che si ottiene proiettando V_k sopra un S_{k+1} da un S_{r-k-2} generico, non avente quindi punti comuni con V_k, onde qualsiasi S_{r-k-1} proiettante non può avere con V_k che un numero finito di punti comuni. La proiezione V'_k è una ipersuperficie di S_{k+1}. Assumiamo l'S_{r-k-2} come spazio $A_{k+2} A_{k+3} \dots A_r$ della piramide fondamentale ed S_{k+1} come lo spazio fondamentale opposto $A_0 A_1 \dots A_{k+1}$, e diciamo $x_0, x_1, \dots, x_r$ le coordinate di un punto di V_k ed $y_0, y_1, \dots, y_{k+1}$ ($y_{k+2} = y_{k+3} = \dots = y_r = 0$) quelle del punto corrispondente**

[1] L'argomento merita di essere studiato, estendendolo pure a multiplicità > 2, anche perchè si collega alla generazione delle singolarità per proiezione.

di V'_k. Per essere i due punti in uno stesso spazio proiettante deve aversi $y_0 : y_1 : \ldots : y_{k+1} = x_0 : x_1 : \ldots : x_{k+1}$ (n. 8, Cap. 2.°), e quindi le formule della trasformazione birazionale devono prendere l'aspetto:

$$(6) \quad x_0 : x_1 : \ldots : x_{k+1} : x_{k+2} : \ldots : x_r = y_0 \varphi : y_1 \varphi : \ldots : y_{k+1} \varphi : \varphi_{k+2} : \ldots : \varphi_r \,,$$

essendo le $\varphi_i = \varphi_i (y_0 y_1 \ldots y_{k+1})$ forme dello stesso ordine n e $\varphi = \varphi (y_0 y_1 \ldots y_{k+1})$ una forma di ordine $n-1$. Se l'equazione della V'_k è

$$(7) \qquad f(y_0\, y_1 \ldots y_{k+1}) = 0 \,,$$

per ogni punto y, di cui le coordinate soddisfino a questa equazione, si ha dalle (6) un punto x determinato (corrispondente) di V_k, tranne se $\varphi = 0$.

Se le coordinate $y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ di un punto y soddisfano alle $f = 0$, $\varphi = 0$, devono pure rendere *tutte* le φ_i $(i = k+2, \ldots, r)$ nulle, altrimenti le (6) darebbero un punto x (corrispondente di y) di V_k giacente in S_{r-k-2}, il che è escluso. Per un punto y in discorso le (6) presentano adunque per le x_i valori indeterminati. Con un procedimento al limite si troverebbe il punto corrispondente al considerato punto y od un numero finito di punti a questo corrispondenti, giacchè è chiaro che la detta indeterminazione deve presentarsi certamente quando l'S_{r-k-1} proiettante il punto y sia plurisecante di V_k.

Eliminiamo dalle (6), (7) le y_i: si ottengono le equazioni

$$(8) \qquad \begin{cases} f(x_0\, x_1 \ldots x_{k+1}) = 0 \\ x_{k+2}\, \varphi\,(x_0\, x_1 \ldots x_{k+1}) = \varphi_{k+2}\,(x_0\, x_1 \ldots x_{k+1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_r\, \varphi\,(x_0\, x_1 \ldots x_{k+1}) = \varphi_r\,(x_0\, x_1 \ldots x_{k+1}) \end{cases}$$

che rappresentano la V_k, eccettuati i sistemi di valori di $x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$ che rendono $f = 0$, $\varphi = 0$ e quindi anche, come vedemmo, tutte le $\varphi_i = 0$ $(i = k+2, \ldots, r)$. Per ciascuno di questi sistemi di valori si deve ottenere un punto od un numero finito di punti di V_k; mentre le (8), per l'indeterminazione che ne risulta delle $x_{k+2}, \ldots, x_r$, risultano invece soddisfatte dalle coordinate dei punti di un S_{r-k-1} proiettante. Dunque le (8) rappresentano la varietà V_k, oltre un luogo di S_{r-k-1} proiettanti (fra i quali quelli plurisecanti).

Questa è la cosidetta *rappresentazione monoidale* delle varietà. L'ipersuperficie data dalla prima delle (8) è un cono di sostegno S_{r-k-2}, di ordine m (se m è l'ordine di V_k), e le rimanenti (se non è $k=r-2$) sono coni di sostegni $S_{r-k-3}=A_{k+2}\dots A_{i-1}\,A_{i+1}\dots A_r$, di ordine n, che si potrebbero dire *monoidali*, in quanto posseggono uno spazio $(n-1)^{\text{uplo}}$ nello spazio S_{r-k-2} ed ivi il cono tangente $\varphi=0$, come subito si vede, ad es. segando cogli spazî $S_{k+2}=A_0\,A_1\dots A_{k+1}\,A_i$.

29. — Applichiamo allo spazio ordinario: si ha allora la rappresentazione monoidale delle curve gobbe dovuta a Cayley. Vale a dire, avendosi una curva gobba di ordine m, preso un punto dello spazio fuori della curva e dal quale la curva sia proiettata biunivocamente, *la curva stessa è intersezione di un cono di ordine m avente il vertice nel punto e di un monoide di un certo ordine n col punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ nel punto stesso, le quali due superficie si segano inoltre in $m(n-1)$ rette.* Se il punto si prende come quarto vertice del tetraedro di riferimento, le equazioni del cono e del monoide hanno la forma

$$f(x_0\,x_1\,x_2)=0 \qquad x_3\,\varphi=\varphi_3\,;$$

e le dette $m(n-1)$ rette sono quelle d'intersezione del cono $f=0$ col cono $\varphi=0$ tangente al monoide nel punto $(n-1)^{\text{uplo}}$.

Se da un punto dello spazio escono h corde della curva gobba, esse sono rette doppie del cono $f=0$ e figurano due volte fra le nominate $m(n-1)$ rette: sicchè, dette h' le rimanenti di queste, si ha

$$m(n-1)=2h+h'\,.$$

D'altra parte le stesse $h+h'$ rette sono rette semplici del monoide partenti dal suo punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ e quindi deve essere (n. 15, Cap. 8)

$$n(n-1)\geq h+h'\,.$$

Eliminando h', segue

$$\frac{m(n-1)}{2}\geq h\geq (n-1)(m-n)\,.$$

Escluso che la curva sia piana, si ha certo $n>1$, e quindi risulta

$$\frac{m}{2}\geq m-n\,,$$

cioè si ha per l'ordine n del monoide il limite inferiore

$$n \geq \frac{m}{2}.$$

30. — La rappresentazione monoidale di una varietà V_k, esposta nel n. 28, può opportunamente completarsi così da isolare la V_k stessa? Si può nel modo seguente.

Anzitutto ricordiamo che nelle (6), (8) le $\varphi, \varphi_{k+2}, \ldots, \varphi_r$ s'intendono prime fra loro, cioè si suppone che sia eliminato ogni fattore eventualmente comune a tutte. Ciò essendo, la varietà, che diremo W, d'intersezione di $f=0$, $\varphi=0$, costituita di S_{r-k-1} proiettanti (dall' S_{r-k-2}) deve essere di dimensione $r-2$, perchè un fattore comune alle $f=0$, $\varphi=0$, lo è anche alle $\varphi_i=0$ $(i=k+2, \ldots, r)$. Dunque i detti S_{r-k-1} sono ∞^{k-1} e, siccome ciascuno ha con V_k un numero finito di punti comuni, è chiaro che W sega V_k in una V_{k-1}. Se adunque si aggiunge alle (6) la diseguaglianza

$$\varphi \neq 0, \tag{9}$$

si viene a trascurare della V_k la detta V_{k-1}. Ma, poichè questa si può in infiniti modi imaginare come limite di altre V_{k-1} contenute nella V_k, si può dire che *le* (8), (9) *isolano la varietà* V_k.

Questo modo di individuare una varietà è sostanzialmente quello chiamato da Kronecker *figurazione principale*. Esso richiede una diseguaglianza ed $r-k$ equazioni al più, a differenza dell'altro modo esposto nel n. 11 che richiede $r+1$ equazioni al più e che Kronecker chiama *figurazione completa*.

31. — Ammetteremo il teorema: — *Una* V_k^n *ed una* $V_{r-k}^{n'}$ di S_r, *che non hanno comuni infiniti punti, s' intersecano in* nn' *punti* — [1]. Il teorema si verifica immediatamente nel caso che una varietà V_k^n (ad es.) sia scomposta in n S_k: ed anzi, se si ritenesse che il numero delle intersezioni dipenda solo da n, n', si avrebbe così una dimostrazione del teorema.

---

[1]) HALPHEN ha dato di questo teorema, mediante la rappresentazione monoidale delle varietà, una dimostrazione (Bulletin della Soc. math. de France, 2, 1874, pag. 34), la quale fu resa più rigorosa e più semplice da NOETHER (Math. Ann., 11, 1877, pag. 570). Altra dimostrazione fu data da PIERI (Giornale di Matematiche, 26 (1), 1888) coll'uso del principio di corrispondenza esteso.

il quale si verifica pure senz'altro anche nel caso che ciascuna delle due varietà sia intersezione completa di ipersuperficie.

Segue che *una* V_k^n *ed una* $V_{k'}^{n'}$, *se* $k+k'>r$, *si tagliano in una* $V_{k+k'-r}^{nn'}$, *se non hanno comune una varietà di dimensione superiore a* $k+k'-r$. Infatti un $S_{2r-k-k'}$ generico di S_r taglia $V_{k'}^{n'}$ (ad es.) in una $V_{r-k}^{n'}$ la quale ha con V_k^n, per il teorema precedente, nn' punti comuni, non infiniti, chè, altrimenti, variando l'$S_{2r-k-k'}$ intorno ad un $S_{2r-k-k'-1}$ fisso generico, si ha una varietà comune a V_k^n, $V_{k'}^{n'}$ di dimensione $>r-k-k'$. A quest'ultima conclusione si viene pure, per lo stesso teorema, se, oltre una $V_{k+k'-r}^{nn'}$, le due varietà hanno un altro punto comune, facendo variare di nuovo un $S_{2r-k-k'}$ intorno ad un tal punto o meglio intorno ad un $S_{2r-k-k'-1}$ fisso generico per esso.

Quando V_k^n, $V_{k'}^{n'}$ hanno comune una varietà di dimensione $>k+k'-r$ (≥ 0), le due varietà possono, oltre di essa, avere comuni altre varietà, ma *la dimensione di ciascuna di queste è sempre* $\geq k+k'-r$. Infatti se P è un punto generico di una tale varietà, delle rette comuni agli S_k, $S_{k'}$ (o coni) tangenti a V_k^n, $V_{k'}^{n'}$ rispettivamente in P, ve ne sono certamente $\infty^{k+k'-r-1}$ (o più) e però P ha (almeno) $\infty^{k+k'-r-1}$ punti ad esso successivi della varietà suddetta, onde questa è (almeno) di dimensione $k+k'-r$.

Capitolo 10.°

Sistemi lineari d'ipersuperficie.

1. — Per l'addietro si ebbe già qualche occasione di fare uso della nozione di *sistema lineare d'ipersuperficie*, che è la totalità di ipersuperficie rappresentate da una equazione della forma

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_h f_h = 0 \tag{1}$$

ove $f_1, f_2, \dots, f_h$ sono date forme, nelle $r+1$ coordinate $x_0, x_1, \dots, x_r$, dello stesso ordine n, linearmente indipendenti, e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ sono parametri variabili. Si vuole ora esporre brevemente le proprietà generali di tali sistemi.

Anzitutto si noti che, se ai rapporti dei parametri $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_h$ si attribuiscono sistemi diversi di valori, si ottengono superficie differenti, il che si dimostra, tenendo presente l'indipendenza lineare delle h forme $f_1, f_2, \dots, f_h$, in modo analogo a quello tenuto nel n. 5, Cap. 1.°. Perciò si dice che il sistema (1) è ∞^{h-1} o di *dimensione* $h-1$: mentre, riguardo all'ordine delle ipersuperficie, si dice *di ordine* n. In particolare, quando $r>1$, si chiama *fascio* se $h=2$, e *rete* se $h=3$ [1]).

Se $r=1$, il sistema è costituito di gruppi di punti di una retta o di gruppi di elementi di un ente razionale ∞^1: dicesi *involuzione di ordine* n e *specie* $h-1$ e suole indicarsi con I_n^{h-1}. Se $h=2$ si ha una involuzione I_n^1, che può anche ritenersi come un particolare sistema simmetrico di grado $n-1$ (n. 18, Cap. 9.°), facendo corrispondere due punti x', x'' che

---

[1]) Omettiamo qui ed in seguito le considerazioni correlative. Per queste si avrebbero corrispondentemente la *schiera* e il *tessuto*.

sono di uno stesso gruppo dell'involuzione. L'equazione del sistema simmetrico si ha sostituendo, nella equazione dell'involuzione $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, alle coordinate correnti quelle dei due punti x', x'' ed eliminando i parametri λ_1, λ_2; ossia è, indicando quelle sostituzioni in f_1, f_2 con un secondo indice in basso,

$$f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = 0 ,$$

da cui s'intenda soppresso il fattore $(x'_0 x''_1 - x'_1 x''_0)$, che manifestamente vi compare.

Facendo nel 1.° membro della (1) $x_0 = x_1 = \dots = x_{r-k-1} = 0$, si ha ancora una combinazione lineare di forme; onde *un sistema lineare di ipersuperficie di* S_r *è segato da un* S_k *secondo un sistema lineare di ipersuperficie di questo spazio*: in particolare da un S_1 in una involuzione. La dimensione del sistema sezione è eguale alla dimensione $h-1$ del sistema dato (1) solo se nessuna ipersuperficie di questo passa per S_k, ed è invece $h-t-1$ se sono ∞^{t-1} le ipersuperficie di (1) passanti per S_k; il che è caso particolare di un teorema generale che vedremo in seguito (n. 17).

2. — Si considerino le $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ come coordinate omogenee di un punto (o iperpiano) di uno spazio S_{h-1}. Ogni ipersuperficie (1) corrisponde ad un punto di questo spazio e, per ciò che si è detto nel n. precedente, reciprocamente. L'essere h punti di S_{h-1} indipendenti esprime che le ipersuperficie, nelle cui equazioni (1) le coordinate di quei punti hanno il significato di parametri, sono linearmente indipendenti: il che è ovvio, osservando che amendue le proprietà sono espresse da ciò che il determinante delle coordinate o dei parametri è diverso da zero. La trasformazione di coordinate (n. 4, Cap. 1.°) significa che *un sistema* (1) *si può sempre ottenere dalla combinazione lineare delle equazioni di h sue ipersuperficie qualsiansi linearmente indipendenti.* Tali corrispondono ai vertici di una piramide fondamentale di S_{h-1}.

Gli S_{i-1} di S_{h-1} dànno ipersuperficie di (1) che si ottengono dalla combinazione di i di esse linearmente indipendenti (per una considerazione algebrica analoga a quella accennata dianzi), dànno cioè sistemi lineari che si dicono *subordinati* del sistema (1). Così tutti i sistemi lineari di ipersuperficie di ordine n di un S_r sono subordinati del sistema lineare $\infty^{\binom{n+r}{r}-1}$ di tutte le ipersuperficie di ordine n di S_r.

Le relazioni fra i sistemi subordinati ed in generale tutte le proprietà del sistema (1) che provengono dalla sua determinabilità lineare sono quindi identiche a quelle dello spazio S_{h-1} e si enunciano immediatamente. Ad es., si ha fra le dimensioni k, k' di due sistemi lineari (di S_r) dello stesso ordine e le dimensioni l, t dei loro *sistemi congiungente* e *intersezione* (sistemi dello stesso ordine, l'uno di minima dimensione che li contiene, l'altro di massima dimensione in essi contenuto) la relazione $k+k'=l+t$ (n. 11, Cap. 1.°).

Adunque un sistema lineare (1) si identifica ad un S_{h-1}, ovvero ha questo per imagine. Si può anche dire, come spesso si suole, dando ad una trasformazione lineare delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ il significato di trasformazione proiettiva (non di trasformazione di coordinate, come si è fatto avanti), cioè sostituendo all' S_{h-1} considerato un altro ad esso proiettivo, che si è stabilita una proiettività fra il sistema (1) ed un S_{h-1}. Viceversa, se le ipersuperficie di un sistema (1) sono riferite biunivocamente (ed algebricamente) ai punti (od iperpiani) di un S_{h-1} e ai sistemi lineari subordinati di quel sistema corrispondono gli spazî subordinati di questo spazio, si ha un riferimento proiettivo (cfr. n. 4, Cap. 3.°).

3. — Le cose esposte conducono naturalmente ad un notevole coordinamento fra i sistemi lineari di ipersuperficie luogo e quelli di ipersuperficie inviluppo, utilizzato in molteplici lavori, specialmente di Rosanes e di Reye.

Le ipersuperficie luogo di ordine n di equazione (cfr. n. 1, Cap. 8.°)

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = 0 \tag{2}$$

sono i punti di un $S'_{\binom{n+r}{r}-1}$ aventi le coordinate $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Parimenti le ipersuperficie inviluppo di classe n di equazione

$$\sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_n} = 0 \tag{3}$$

sono i punti di un $S''_{\binom{n+r}{r}-1}$ aventi le coordinate $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

Ora due ipersuperficie (2), (3) si dicono *coniugate* se ha luogo la relazione bilineare nei coefficienti

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0\,. \tag{4}$$

Evidentemente ciò significa che fra i due spazî S', S'', ad $\binom{n+r}{r} - 1$ dimensioni, è posta una correlazione (in cui si corrispondono le piramidi fondamentali), e due ipersuperficie coniugate sono in tale correlazione due punti coniugati. Segue, poichè nella correlazione ad un S_{h-1} corrisponde un Σ_{h-1} che ha per sostegno un $S_{\binom{n+r}{r}-h-1}$, che *ad ogni sistema lineare* ∞^{h-1} *d' ipersuperficie luogo corrisponde un sistema lineare* $\infty^{\binom{n+r}{r}-h-1}$ *d' ipersuperficie inviluppo, così che ogni ipersuperficie di quel sistema è coniugata ad ogni ipersuperficie di questo.* Due tali sistemi lineari si dicono pure *coniugati* [1]).

Notiamo una proprietà (intrinseca, cioè non esprimibile colla detta rappresentazione) di due sistemi lineari coniugati di uno stesso S_r. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un iperpiano η, n^{uplo}, cioè di equazione

$$\eta_x^n = \sum \eta_{i_1} \eta_{i_2} \ldots \eta_{i_n} \; x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = 0 .$$

sia coniugato ad una ipersuperficie inviluppo (3) è che sia soddisfatta, secondo la (4), la condizione

$$\sum \eta_{i_1} \eta_{i_2} \ldots \eta_{i_n} \; a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$$

---

[1]) Nel caso di un S_1, cioè di due sole variabili x_0, x_1, le ξ_0, ξ_1 hanno come queste il significato di coordinate di punti e la condizione d' incidenza $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 = 0$ esprime che il punto $\frac{x_1}{x_0}$ coincide col punto $-\frac{\xi_0}{\xi_1}$. Sicchè due forme (scritte nelle stesse variabili x_0, x_1) o due gruppi di n punti dati dalle

$$\Sigma\, a_s \binom{n}{s} x_0^s\, x_1^{n-s} = 0$$

$$\Sigma\, b_s \binom{n}{s} x_0^s\, x_1^{n-s} = 0$$

dovranno dirsi coniugati, in base alla definizione superiore, se

$$\Sigma\, (-1)^s \binom{n}{s} a_s\, b_{n-s} = 0 ,$$

giacchè, per applicare la definizione stessa, si dovrà alla seconda equazione (ad es.) sostituire la seguente

$$\Sigma (-1)^s\, b_s \binom{n}{s} \xi_1^s\, \xi_0^{n-s} = 0 .$$

cioè che l'iperpiano η sia un iperpiano dell'inviluppo. Adunque *gli iperpiani n^{upli} di un sistema di ipersuperficie luogo di ordine n sono gli iperpiani tangenti comuni alle ipersuperficie del sistema coniugato, e viceversa.* Correlativamente.

Ne discende l'osservazione, utile in seguito, che $\binom{n+r}{r}$ iperpiani n^{upli} generici sono ipersuperficie di ordine n linearmente indipendenti (onde una forma di ordine n si può sempre esprimere come somma di $\binom{n+r}{r}$ potenze n^{esime} di forme lineari), perchè se uno di essi fosse combinazione lineare degli altri $\binom{n+r}{r}-1$, una ipersuperficie tangente a questi (considerati come semplici) e però coniugata agli stessi (considerati come n^{upli}), dovrebbe essere coniugata e quindi tangente anche a quello, il che è assurdo per essere gli iperpiani generici. Correlativamente.

4. — Possono esservi varietà della medesima o di diversa dimensione $(\leq r-1)$ comuni alle $f_1=0$, $f_2=0$, ..., $f_h=0$ e per conseguenza a tutte le ipersuperficie di un sistema lineare (1). Si dicono *varietà base* del sistema. Se $h \leq r$, esiste una varietà base almeno di dimensione $r-h$, e soltanto quando qualche varietà base è di dimensione $> r-h$ possono esservi insieme ad essa altre varietà base di dimensioni differenti (cfr. n. 3, Cap. 8.°).

Da $h-1$ punti generici di S_r è individuata una ipersuperficie del sistema lineare (1). Basta prendere il primo punto esternamente alla varietà base del sistema, onde le ipersuperficie di questo, passanti per esso, (avendo i loro parametri vincolati da una relazione lineare) formeranno un sistema lineare ∞^{h-2}; poi il secondo punto fuori della varietà base di questo, onde le ipersuperficie di (1) per questi due punti formeranno un sistema lineare ∞^{h-3}; poi il terzo punto fuori della varietà base di questo, e così di seguito.

5. — Si ha ora il teorema: *Un sistema algebrico ∞^{h-1} di ipersuperficie di S_r, dello stesso ordine, tale che per $h-1$ punti generici passi una sola ipersuperficie del sistema, è un sistema lineare.* (37)

Dimostriamo in primo luogo il teorema nel caso $r=1$, $h=2$ cioè supponiamo di avere sopra una retta (o sopra un ente razionale ∞^1) una ∞^1 algebrica di gruppi di n punti $x', x'', \dots, x^{(n)}$, tutti variabili, così che un punto generico stia in un solo gruppo. Nell'S_n imagine di tutti i gruppi di n punti della retta (n. 2) quell' ∞^1 algebrica sarà rappresentata da una curva C, ogni punto della quale, essendo individuato da un punto della retta, avrà le sue coordinate y_i funzioni razionali della coordinata o parametro x_1 di questo punto:

$$\rho y_i = \varphi_i(x_1) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

I rapporti $\varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_n$ non varieranno sostituendo successivamente ad x_1 i parametri $x'_1, x''_1, \dots, x_1^{(n)}$ degli n punti di un gruppo, perchè a questi punti corrisponde lo stesso punto y di C, ma uno almeno di quei rapporti prenderà valore diverso per altri valori di x_1, determinanti altri gruppi e quindi altri punti di C. Se un tal rapporto, liberato dagli eventuali fattori comuni al numeratore e al denominatore, è $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$, si concluderà che l'equazione $f(x_1) - \lambda\varphi(x_1) = 0$ per ogni valore di λ dà n punti di un gruppo e questi soli (e pero è d'ordine n in x_1). Il nostro sistema algebrico è adunque una involuzione di ordine n.

Continuando a ritenere $h = 2$, supponiamo ora r qualunque > 1. Una ipersuperficie del sistema algebrico per un punto A di una retta generica di S_r determinerà su essa un gruppo di n punti, compreso A. Al variare di A sulla retta si avrà su questa, per il caso precedente, una involuzione di ordine n, i cui gruppi corrispondono biunivocamente alle ipersuperficie del sistema. Introducendo il parametro λ che dà uno ad uno i gruppi dell'involuzione, dovranno adunque i coefficienti dell'equazione di una ipersuperficie essere funzioni razionali di λ, cioè l'equazione stessa avere la forma (dopo aver moltiplicato per il prodotto degli eventuali denominatori)

$$X_0\lambda^t + X_1\lambda^{t-1} + \dots + X_t = 0$$

ove $X_0, X_1, \dots, X_t$ sono forme di ordine n nelle coordinate $x_0, x_1, \dots, x_r$. Ma, poichè per un punto dello spazio passa una sola ipersuperficie dovrà essere $t = 1$ [1]), e però il sistema algebrico considerato, un fascio.

---

[1]) Per $t > 1$ potrebbe essere il primo membro della precedente equazione la potenza t^{esima} di una espressione lineare in λ: ma si sottintende che un' ipersuperficie generica del sistema algebrico ∞^{h-1} dato non risulti dal ripetere due o più volte l' ipersuperficie generica di un altro sistema, cioè si esclude questo caso di riducibilità di quel sistema algebrico (mentre ogni altro caso di riducibilità del sistema stesso è manifestamente escluso dall' ipotesi del teorema).

Dimostreremo il caso generale per induzione, cioè supporremo che il nostro teorema (già dimostrato per $h=2$) sussista per una dimensione qualsiasi $\leq h-2$ e lo dimostreremo per la dimensione $h-1$. Prendiamo $h-1$ punti generici (fissi) di S_r $(r \geq 1)$, $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$ e diciamo σ_k il sistema costituito dalle ipersuperficie del dato sistema algebrico, passanti per $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}, P_{k+1}, \ldots, P_{h-1}$: il qual sistema σ_k sarà un fascio per ciò che si è ammesso (anzi per la dimostrazione precedente) [1]. Per un punto X generico di S_r passa una ipersuperficie di ciascuno dei fasci σ_k, cioè in tutto $h-1$ ipersuperficie. Queste e la ipersuperficie determinata nel sistema da tutti i punti P sono h ipersuperficie linearmente indipendenti, perchè $h-1$ qualunque di esse hanno comune un punto non contenuto nella rimanente e quindi determinano un sistema lineare ∞^{h-1}, che ora si mostrerà coincidere col sistema algebrico considerato. Infatti i detti $h-1$ fasci σ_k del sistema algebrico appartengono anche al sistema lineare ∞^{h-1}, perchè ciascuno ha con questo due ipersuperficie comuni; per conseguenza il sistema algebrico e il sistema lineare ∞^{h-1} contengono le $h-1$ ipersuperficie dei fasci stessi passanti per un altro punto Y generico di S_r. Tali $h-1$ ipersuperficie sono linearmente indipendenti, perchè di nuovo $h-2$ di esse hanno comune un punto che non giace nella rimanente e quindi individuano un sistema lineare ∞^{h-2}, quello staccato dal punto Y, tanto nel sistema lineare ∞^{h-1}, quanto (per ciò che si è ammesso) nel nostro sistema algebrico. Variando Y in S_r, risulta l'identità affermata dei due sistemi. Il teorema è quindi dimostrato.

6. — Un altro teorema che, sotto diverse ipotesi, conduce alla stessa conseguenza di quello del n. 5 è il seguente: — *Un sistema algebrico* σ, ∞^{h-1}, *di ipersuperficie di* S_r, *dello stesso ordine, tale che per* $h-1$ *punti generici di una varietà* V *(irriducibile, appartenente o no ad* S_r*) passi una sola ipersuperficie di* σ, *colle condizioni ulteriori che per* V *non passi alcuna superficie di* σ *e che una ipersuperficie generica di* σ *non tocchi* V *in ogni punto variabile che ha comune con essa, è un sistema lineare* [2].

[1] Se $r=1$, invece di ipersuperficie, fascio, ... si dirà gruppo di punti, involuzione di 1.° ordine....

[2] Che le due ultime condizioni sieno necessarie appare da semplici esempi. Così, se σ è il sistema (non lineare) delle quadriche di S_3 passanti per una conica e tangenti a tre rette (fisse) generiche, e V è il piano della conica, per un punto generico di V passa una sola quadrica del sistema (il piano stesso contato due

Supponiamo dapprima $h-1=1$: cioè supponiamo che per un punto generico di V passi una sola ipersuperficie di σ. Se questo sistema non fosse un fascio, per un punto x generico di S_r dovrebbero passare due (o più) ipersuperficie di esso (n. 5), le quali, cadendo x su V, dovrebbero coincidere in una sola (non passante per V). Ciò porterebbe a concludere che V sarebbe dell'inviluppo delle ipersuperficie di σ, e che queste quindi toccherebbero V in ogni punto comune variabile, contro il supposto [1]).

---

volte), ma la prima condizione non è soddisfatta. Così pure, se σ è il sistema ∞^2 (non lineare) degli iperpiani che hanno con una C^{2n} ($n>1$) irriducibile, appartenente ad un S_{2n} (cfr. Cap. 12.°) due soli punti comuni, avendo in ciascuno un contatto n^{punto}, e V è la C^{2n}, per due punti di questa passa un solo iperpiano, ma non è soddisfatta la seconda condizione.

[1]) Occorre qui, per la dimostrazione, ricordare dal Calcolo che, sotto condizioni certo verificate dai sistemi algebrici, una ∞^1 di ipersuperficie possiede una ipersuperficie inviluppo W_{r-1} che si può definire come il luogo della V_{r-2}, detta *caratteristica*, comune a due ipersuperficie consecutive del sistema. Lungo una V_{r-2} caratteristica la W_{r-1} è toccata da una ipersuperficie del sistema. Nel solo caso che la detta ∞^1 sia un fascio (del quale la ipersuperficie generica sia irriducibile), la W_{r-1} manca (se non si voglia considerare come inviluppo la varietà base di dimensione $< r-1$).

Occorre inoltre avvertire che una varietà V, che sia toccata in ciascun suo punto da qualche ipersuperficie del sistema ∞^1, giace necessariamente sull'inviluppo W_{r-1}. Limitandoci al caso che V sia una curva (dal qual caso si trae subito quello di V qualunque) questa proprietà è geometricamente evidente se il contatto di una ipersuperficie colla curva si traduce in passaggio per due punti successivi e si può dimostrare analiticamente così. La curva si rappresenti colle ($x_0=1$)

$$x_i=f_i(\lambda)\qquad(i=1,2,\ldots,r)$$

indicando $f_i(\lambda)$ funzioni (analitiche) di un parametro λ. Il sistema ∞^1 si potrà rappresentare con una equazione

$$\varphi(x_i\,\lambda)=0$$

contenente lo stesso parametro λ, così che una ipersuperficie data da un valore di λ tocchi la curva in un punto di coordinate x_i date dallo stesso valore di λ. Poichè la tangente alla curva nel punto x sta nell'iperpiano ivi tangente alla ipersuperficie dovrà essere

$$\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}=0,$$

Ora abbia $h-1$ un valore >1: siccome abbiamo dimostrato il teorema per il valore 1, procederemo per induzione, cioè ammettendolo per valori inferiori ad $h-1$, dimostreremo che sussiste anche per $h-1$. Infatti due punti generici di V staccano rispettivamente da σ due sistemi ∞^{h-2} che sono lineari, per le ipotesi e per ciò che si è ammesso; i quali hanno comune il sistema ∞^{h-3} che i due punti insieme staccano da σ, sistema pure lineare per le stesse ragioni. Segue che le ipersuperficie di σ si distribuiscono in infiniti sistemi lineari ∞^{h-2} aventi a due a due un sistema lineare ∞^{h-3} comune. Identificando tutte le ipersuperficie di S_r, dell'ordine considerato, ai punti (o iperpiani) di uno spazio (n. 2), si può quindi applicare il teorema del n. 16, Cap. 1.° e concludere che quei sistemi ∞^{h-2}, e quindi tutte le ipersuperficie di σ, costituiscono un medesimo sistema lineare ∞^{h-1}, non potendo i sistemi ∞^{h-2}, staccati da σ fissando ogni volta un punto di V, avere comune uno stesso sistema lineare ∞^{h-3}, perchè ogni ipersuperficie di questo sistema verrebbe a contenere tutti i punti di V.

7. — Come caso particolare del teorema dimostrato si ha che un sistema algebrico ∞^{h-1} di iperpiani di S_r, tale che per $h-1$ punti generici di una varietà V irriducibile ed appartenente ad S_r ne passi uno solo e che un iperpiano generico del sistema non tocchi V in ogni punto variabile comune, è una stella Σ_{h-1} [1]).

Di questo caso particolare facciamo un'applicazione a dimostrare che *una corrispondenza birazionale fra due varietà V_k, V'_k (irriducibili) tale che alle sezioni iperpiane dell'una corrispondano sezioni iperpiane dell'altra, è una omografia*, cioè la corrispondenza birazionale è subordinata di una omografia fra i due spazî S_r, S'_r a cui appartengono rispettivamente V_k, V'_k. Siccome, per l'ipotesi, gli iperpiani dei due spazî si corrispondono biunivocamente, sarà sufficiente accertarsi che in tale corrispon-

---

oltre la $\varphi(x_i\,\lambda)=0$. Ma da questa, derivando rispetto a λ, si ricava

$$\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0,$$

quindi, per la precedente, si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0$, che, insieme alla $\varphi=0$, rappresenta una V_{r-2} caratteristica, e però ecc..

[1]) Cfr. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico*... (Annali di Matem., 22 (2), 1894), nota al n. 23.

denza ad un Σ_{h-1} di iperpiani di S_r corrisponde pure un Σ'_{h-1} di iperpiani di S'_r. Ciò segue dall'osservare che a quel Σ_{h-1} corrisponde una totalità (algebrica) σ' di iperpiani di cui passa uno per $h-1$ punti generici di V'_k, giacchè a questi punti corrispondono $h-1$ punti di V_k individuanti un iperpiano di Σ_{h-1}, al quale corrisponde un iperpiano di σ' per quei $h-1$ punti. D'altra parte gli iperpiani di σ' sono generalmente iperpiani secanti di V, giacchè, al variare della stella Σ_{h-1}, essi descrivono tutto lo spazio S'_r. Adunque, come si è detto, σ' è un Σ_{h-1}: e però ecc..

8. — *Se una ipersuperficie generica di un sistema lineare ha punto s^{uplo} variabile al variare della ipersuperficie, il luogo di questo punto è una varietà base $(s-1)^{\text{pla}}$ per il sistema lineare* [1]. Facciasi dapprima il caso di un fascio $f+\lambda\varphi=0$. Le coordinate $x_0, x_1, \dots, x_r$ del punto s^{uplo} della ipersuperficie del fascio, cui corrisponde il parametro λ, sono per ipotesi, funzioni algebriche di λ [2]) tali che sussistono le

$$f_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} + \lambda \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} = 0; \tag{5}$$

ove gli indici in basso indicano le derivate rispetto ad $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{s-1}}$ e gli indici stessi $i_1, i_2, \dots, i_{s-1}$ devono sostituirsi con tutte le combinazioni ad $s-1$ ad $s-1$ (con ripetizione) dei numeri $0, 1, 2, \dots, r$. Le precedenti, introducendo per le x_i le dette funzioni algebriche di λ, diventano identità rispetto a λ: sicchè, derivando rispetto a λ, si ha pure identicamente

$$\sum_k \frac{\partial f_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \lambda} + \lambda \sum_k \frac{\partial \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \lambda} + \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} = 0,$$

donde, moltiplicando per x_{i_1} (ad es.), dando ad i_1 i valori $0, 1, 2, \dots, r$, e sommando, si ricava, in forza dell'identità di Eulero,

$$(n-s+1)\sum_k \left(\frac{\partial f_{i_2 i_3 \dots i_{s-1}}}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial \varphi_{i_2 i_3 \dots i_{s-1}}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_k}{\partial \lambda} + (n-s+2)\,\varphi_{i_2 i_3 \dots i_{s-1}} = 0.$$

Ma l'espressione fra le parentesi grandi è zero per le (5): segue adunque per i detti punti s^{upli} $\varphi_{i_2 i_3 \dots i_{s-1}} = 0$; onde $\varphi = 0$, che è una ipersuperficie generica del fascio, ha i detti punti s^{upli} per punti $(s-1)^{\text{upli}}$.

---

[1]) BERTINI, *Sui sistemi lineari* (Rend. Ist. lomb., 15 (2), 1880).

[2]) Possono essere anche eventualmente funzioni di altri parametri nel caso che l'ipersuperficie generica contenga una V_k $(k>0)$ s^{upla} variabile, ma ciò non ha influenza nella dimostrazione. - Del resto in tal caso possiamo ridurci a soli punti s^{upli} isolati, segando con un S_{r-k} generico e ragionando sul fascio sezione che ne risulta.

Il teorema si estende subito ad un sistema lineare qualunque. Prendansi infatti due ipersuperficie generiche del sistema; il luogo dei punti s^{upli} delle ipersuperficie del loro fascio sarà una varietà $(s-1)^{\text{upla}}$ base di questo. Se una, F, di quelle due ipersuperficie è fissa e l'altra variabile, si avrà sopra F il luogo dei punti s^{upli} di tutte le superficie del sistema, il qual luogo sarà $(s-1)^{\text{uplo}}$ per F: ma, poichè F è generica, si conclude che questo luogo esiste su tutte le ipersuperficie del sistema, ed è per questo una varietà base $(s-1)^{\text{upla}}$. Del resto la precedente dimostrazione analitica è applicabile anche nel caso generale.

Se il considerato luogo di punti s^{upli}, che è adunque $(s-1)^{\text{uplo}}$ per la varietà base, è una ipersuperficie, il sistema lineare si spezza in questa contata $s-1$ volte ed in un sistema lineare residuo.

Dal precedente teorema discende l'importante conseguenza: — *Una ipersuperficie generica di un sistema lineare non può avere punti multipli fuori delle varietà base del sistema.* — Per $r=1$ si ha soltanto questa proprietà che si enuncia così: — *Un gruppo generico di una involuzione sopra una retta (o ente razionale ∞^1), senza punti fissi, è formato di punti tutti distinti*; — la quale proprietà è racchiusa in una più generale (n. 18).

9. — Però esistono in un sistema lineare (1) delle ipersuperficie dotate di punto doppio. Fra i parametri λ di una tale ipersuperficie e le coordinate x_i del suo punto doppio devono sussistere le (n. 10, Cap. 8.°)

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Onde, se $h > r+1$, dando ad x valori generici, queste sono soddisfatte da uno od infiniti sistemi di valori dei rapporti delle λ, cioè *il luogo dei punti doppî è tutto lo spazio* S_r. Se invece $h \leq r+1$, eliminando da quelle equazioni le λ, si trova che il luogo dei punti doppî è rappresentato dall'annullare la matrice di ordine h (cioè dall'annullare tutti i determinanti di ordine h di questa matrice, il che si ottiene coll'annullarne $r-h+2$)

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_h}{\partial x_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_2}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial f_h}{\partial x_r} \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Luogo di punti doppi [illegible]
[illegible] del [illegible]

Questo luogo dicesi *jacobiana* del sistema (1). Se $h = r + 1$, la jacobiana è una ipersuperficie di ordine $(r+1)(n-1)$, la quale, nel caso che le f_i sieno le derivate prime di una forma, è l' hessiana della ipersuperficie rappresentata da questa forma eguagliata a zero (n. 11. Cap. 8.°). Se $h < r + 1$, la jacobiana è una varietà di dimensione $r-(r-h+2)=h-2$ e si può dimostrare [1] che è di ordine $\binom{r+1}{h-1}(n-1)^{r-h+2}$, risultato che comprende il precedente.

La jacobiana di un sistema (1) può definirsi anche come *luogo del punto i cui iperpiani polari* (rispetto alle $f_1=0, f_2=0, \ldots, f_h=0$ e quindi) *rispetto a tutte le ipersuperficie del sistema* (1) *passano per un* S_{r-h+1}. Infatti la (6) esprime anche la dipendenza lineare (cioè l'equivalenza ad $h-1$ equazioni) delle

$$y_0 \frac{\partial f_i}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \ldots + y_r \frac{\partial f_i}{\partial x_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

il che significa appunto ciò che si è affermato. Gli iperpiani polari di un punto non giacente sulla jacobiana, rispetto alle ipersuperficie di un sistema lineare ∞^{h-1}, passano per un S_{r-h} [2]).

Una terza definizione della jacobiana nasce dalla considerazione del sistema ∞^{h-2} costituito dalle ipersuperficie del sistema (1) passanti per un punto generico x della jacobiana stessa. Gli $h-2$ iperpiani tangenti in x ad $h-2$ ipersuperficie generiche di quel sistema si segano in un S_{r-h+2} i cui S_1 uscenti da x toccano tutte le ipersuperficie di esso, perchè il sistema è individuato dalle dette $h-2$ ipersuperficie e da quella che ha in x un punto doppio. Onde *tutte le ipersuperficie di* (1) *per un punto generico della jacobiana hanno ivi un medesimo* S_{r-h+2} *tangente*: e *reciprocamente*, come si vede osservando che $h-2$ direzioni generiche uscenti dal punto individuano una ipersuperficie di (1), di cui l'iperpiano tangente ivi (dovendo passare anche per l' S_{r-h+2}) è indeterminato.

---

[1]) Vedasi Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti* ... (Rend. Accad. Lincei, 9 (5), 1900), n. 5 (ove si sostituiscano a d, p, m, n, h, q rispettivamente $r, n-1, r, h-1, 1, h-2$).

[2]) In generale le ipersuperficie polari dello stesso ordine di un dato punto, rispetto alle ipersuperficie di un sistema lineare, formano un altro sistema lineare.

10. — Se $r=1$, delle tre definizioni precedenti rimangono solo le prime due. La jacobiana di una involuzione I_n^1 (sopra una retta o sopra un ente razionale ∞^1) è il sistema dei suoi *elementi doppî* (elementi cioè in cui coincidono due elementi di un gruppo dell'involuzione) ovvero degli elementi ciascuno dei quali ha un medesimo elemento come gruppo polare di 1.° ordine rispetto a tutti i gruppi dell'involuzione. Questi elementi doppî, in numero $2(n-1)$, sono dati dalla

$$J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0$$

(od anche dall'equazione del sistema simmetrico, sostituibile all'involuzione, facendovi $x'=x''$ (n. 1)).

Un elemento y, che possiamo supporre l'elemento 0 (cioè di coordinata $y_0=0$) sia s^{uplo} (e non più) per un gruppo $f_1=0$ di una involuzione (cioè elemento di coincidenza di s elementi del gruppo) onde $f_1 \equiv x_0^s \varphi_1$, essendo φ_1 una forma di ordine $n-s$ in x_0, x_1, e l'elemento stesso y non sia (di un altro gruppo $f_2=0$ e quindi) di nessun altro gruppo. Poichè (per il teorema d' Eulero) si ha l'identità

$$\frac{1}{n} x_1 J \equiv \begin{vmatrix} f'_1 & f_1 \\ f'_2 & f_2 \end{vmatrix},$$

indicando con un indice in alto derivate prime prese rispetto ad x_0, segue, per il supposto fatto,

$$\frac{1}{n} x_1 J \equiv x_0^{s-1} \left[s\,\varphi_1 f_2 + x_0 (\varphi'_1 f_2 - \varphi_1 f'_2) \right],$$

la quale mostra che l'elemento y è $(s-1)^{\text{uplo}}$ per la jacobiana e non più; chè, altrimenti, $y_0=0$ dovrebbe essere radice di $\varphi_1 f_2=0$ contro l'ipotesi.

Che se l'elemento y è s^{uplo} per due gruppi della I_n^1, esso lo è per ogni altro gruppo e la I_n^1 si ottiene aggiungendo a quell'elemento contato s volte i gruppi di una I_{n-s}^1. Siccome questa ha $2(n-s)-2$ elementi doppî, il considerato elemento y assorbe della involuzione primitiva $2(n-1)-2(n-s)+2=2s$ elementi doppî, purchè il gruppo della I_{n-s}^1 determinato dall'elemento y abbia questo semplice.

Riunendo i due casi si può quindi affermare che, *se un elemento è s^{uplo} per i gruppi di una involuzione I^1_n ed è $(s+t)^{uplo}$ per un suo particolare gruppo, assorbe $2s+t-1$ elementi doppî.*

Consideriamo, ad esempio, una involuzione I^1_n con due elementi n^{upli}; in questi, per ciò che si è detto, cadranno tutti gli elementi doppî. Se i due elementi n^{upli} sono 0, ∞, l'equazione dell'involuzione è

$$\lambda_1 x_0^n + \lambda_2 x_1^n = 0$$

e, come si vede, i gruppi dell'involuzione sono ciclico-proiettivi, cioè ogni gruppo è dato dai successivi corrispondenti ad un elemento in una omografia ciclica (cfr. n. 3, Cap. 3.°).

* 11. — Se l'ipersuperficie *generica* di un sistema lineare è riducibile, il sistema stesso si dice *riducibile*. Tale è un sistema lineare ottenuto da un sistema (1) coll'aggiungere una ipersuperficie fissa ad ogni ipersuperficie del sistema (la cui equazione cioè sia la (1) moltiplicata per il primo membro dell'equazione della ipersuperficie fissa). Tale è pure il sistema lineare che si ottiene da una involuzione in un fascio di ipersuperficie (ogni ipersuperficie del sistema essendo data da ogni gruppo della involuzione); il che risulta immediatamente dall'applicazione del teorema del n. 5, ovvero osservando che, se l'equazione del fascio è

$$\lambda u - \mu v = 0$$

(ove u, v sono date forme dello stesso ordine e λ, μ parametri) ed è

$$k_0 \varphi_0(\lambda \mu) + k_1 \varphi_1(\lambda \mu) + \ldots + k_h \varphi_h(\lambda \mu) = 0$$

l'equazione dell'involuzione, ogni gruppo di ipersuperficie di questa, dato da un sistema di rapporti delle k, ha l'equazione

$$k_0 \varphi_0(vu) + k_1 \varphi_1(vu) + \ldots + k_h \varphi_h(vu) = 0.$$

Ora è notevole la proprietà che i due casi considerati sono i soli possibili. Si dimostrerà cioè che *un sistema lineare privo di parte fissa e riducibile è necessariamente una involuzione in un fascio.* Sieno infatti $F_1, F_2, \ldots, F_t$ $(t \geq 2)$ le ipersuperficie irriducibili di cui è composta la ipersuperficie F generica del sistema, delle quali nessuna è fissa per ipotesi. Per il teorema del n. 8 dobbiamo inoltre ritenere che quelle t ipersuperficie sono *distinte.* Se $F'_1, F'_2, \ldots, F'_t$ sono le ipersuperficie componenti un'altra ipersuperficie generica del sistema, F', è ben chiaro che il teorema è dimostrato se si dimostra che $F_1, F_2, \dots, F_t, F'_1, F'_2, \dots, F'_t$ appartengono ad uno stesso fascio, perchè, variando, ad es., F' e tenendo fissa F, il fascio non può variare, essendo determinato da due delle curve $F_1, F_2, \dots, F_t$. Ma F, F' determinano un fascio del sistema lineare considerato: siamo adunque ridotti a dimostrare il teorema per un fascio φ di ipersuperficie riducibili. In tal caso, dicendo sempre $F_1, F_2, \dots, F_t$ le componenti di una ipersuperficie F generica di φ, si prova facilmente che per un punto P generico di S_r passa una sola ipersuperficie dei sistemi descritti da $F_1, F_2, \dots, F_t$, onde questi sistemi debbono formarne uno solo e precisamente (n. 5) un fascio. In vero una F_1 ed una F_2 (ad. es.) per P non possono essere componenti di due ipersuperficie di φ, passando per P una sola F, nè essere componenti della medesima F, perchè questa avrebbe allora in P un punto doppio, contrariamente al teorema del n. 8. La proprietà è quindi dimostrata. Algebricamente si enuncia così (essendo le $f_1, f_2, \dots, f_h$ forme dello stesso ordine, collo stesso numero di variabili e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ parametri indeterminati): *Se la forma $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_h f_h$ è riducibile, debbono le f_i avere un fattore comune, ovvero essere forme dello stesso ordine di due altre forme* (pure dello stesso ordine nelle dette variabili); o anche possono verificarsi le due cose insieme [1].

12. — Un sistema lineare si dice *semplice* o *composto*, secondochè le ipersuperficie del sistema che passano per un punto generico hanno questo solo punto comune (oltre le varietà base), ovvero hanno altri punti comuni. Se le ipersuperficie di un sistema lineare che passano per un punto A generico passano di conseguenza per una varietà V^ρ_t (gruppo di ρ punti se la dimensione $t = 0$), quelle che passano per un punto B generico di V^ρ_t (o di una sua parte) debbono avere comune questa medesima V^ρ_t (e quindi essere le stesse di prima), altrimenti quelle che passano per A, contenendo B, non avrebbero comune la sola V^ρ_t. Si ha adunque una totalità ∞^{r-t} di V^ρ_t, tale che un punto generico dello spazio appartiene ad una sola V^ρ_t, ogni ipersuperficie del sistema essendo tutta costituita di queste V^ρ_t. Se il sistema lineare è un fascio irriducibile, le V^ρ_t sono le stesse ipersuperficie del fascio. Se $t > 0$, la totalità delle V^ρ_t si dice *con-*

[1] Cfr. il lavoro di BERTINI citato nella nota [1]) del n. 8 ed i due lavori sullo stesso argomento di LUROTH (Math. Ann. 42, 1893 e 44, 1894).

Se un sistema lineare è riducibile, o contiene una parte fissa o è un'involuzione in un fascio, o è
[illegible]

gruenza lineare, e, se $t=0$, involuzione di S_r di ordine ρ: ed il sistema lineare si dice composto colla congruenza lineare o coll' involuzione. Se $r=1$, è necessariamente $t=0$, ossia una involuzione sopra una retta (o ente razionale ∞^1) può essere composta soltanto con una involuzione di 1.ª specie, I_ρ^1. (40)

Un sistema lineare riducibile (senza parti fisse) è composto con un fascio e reciprocamente. Infatti esso è una involuzione in un fascio (n. 11), e quindi, se tale involuzione non è composta, il sistema è composto col fascio stesso, le sue ipersuperficie per un punto contenendo la ipersuperficie del fascio per questo punto, mentre, se l' involuzione è composta con una involuzione di 1.ª specie (solo caso possibile, come ora si vide) il sistema è composto col fascio dato da questa.

Un sistema lineare irriducibile ∞^{h-1}, se $h-1>r$ può essere semplice o composto: se $h-1<r$ è certamente composto con una congruenza lineare, perchè le ipersuperficie per un punto hanno comune (almeno) una V_{r-h+1}: se $h-1=r$ è in generale composto con una involuzione (di ordine n^r, se non esistono varietà base e le ipersuperficie sono di ordine n), ma può essere semplice ed allora il sistema lineare si dice omaloidico. (41)

13. — Alle considerazioni precedenti si collega la nozione di *grado* di un sistema lineare, cioè del numero D delle intersezioni *variabili* di r ipersuperficie generiche del sistema. Si osservi dapprima che *il grado* D *è sempre finito* (≥ 0). Infatti se due ipersuperficie generiche del sistema hanno una ipersuperficie comune, variando una di esse e tenendo fissa l'altra, si vede che l' ipersuperficie comune, dovendo sempre far parte della ipersuperficie fissa, non può variare ed è quindi varietà base del sistema: così, se tre ipersuperficie generiche hanno una V_{r-2} comune, tenendo fisse due e variando la terza, la V_{r-2} non può variare, altrimenti genererebbe una V_{r-1} comune alle due ipersuperficie fisse, la quale per il caso precedente dovrebbe essere varietà base, mentre non sta sulla terza ipersuperficie, e però la V_{r-2} è pure varietà base: e così di seguito, fino a concludere che r ipersuperficie generiche non possono avere una linea comune variabile. La proprietà suddetta è adunque dimostrata: anzi è dimostrato che l ipersuperficie generiche non possono avere comune una varietà di dimensione $>r-l$, variabile con esse.

Notisi poi che l ($\leq r$) ipersuperficie generiche possono non segarsi affatto (fuori della varietà base), ma se si segano in una varietà V_{r-l} (ad $r-l$ dimensioni), $l-1$ ipersuperficie generiche si segano in una

[illegible] linea [illegible] di ipersuperficie può essere
composto solo con un' involuzione [illegible]
Se uno poi è composto con ipersuperficie [illegible]
dovuto a un fascio

V_{r-l+1}, ..., due ipersuperficie generiche si segano in una V_{r-2}. Inoltre *ciascuna di queste* V_{r-l}, V_{r-l+1}, ..., V_{r-2} *descrive tutto lo spazio* S_r. Basta dimostrarlo per la V_{r-2} (chè questa si può pensare descritta da ciascuna delle precedenti); cioè basta dimostrare che la V_{r-2} non può avere per luogo una V_{r-1}. In vero, se ciò fosse, di due ipersuperficie generiche, segantisi in una V_{r-2} di V_{r-1}, tenendo fissa una e variando l'altra a descrivere il sistema stesso, avremmo che la V_{r-2} (la quale non è varietà base) genererebbe una ipersuperficie comune alla V_{r-1} e alla ipersuperficie fissa: sicchè una ipersuperficie generica del sistema avrebbe colla V_{r-1} una ipersuperficie comune (che non sarebbe quindi variabile), il che non può essere.

Facciamo anche quest'altra osservazione. *Un sistema lineare* ∞^{h-1}, *non composto con una congruenza lineare, per il quale sia* $h-t$ *il massimo numero di punti generici che staccano da esso un sistema* ∞^{t-1} *pure non composto con una congruenza lineare, ha il grado* $D \geq h-t+1$, *e, se* $D = h-t+1$, *non è composto con una involuzione.* Infatti, in virtù della ipotesi, le ipersuperficie del sistema ∞^{h-1} passanti per $h-t+1$ punti generici non passano di conseguenza per infiniti punti, e però deve essere $D \geq h-t+1$: mentre, se il sistema è composto con una involuzione di ordine ρ, si ha similmente $D \geq \rho(h-t+1)$. I sistemi lineari di curve piane irriducibili, che non sono fasci, possono essere composti soltanto con una involuzione; onde per un sistema lineare irriducibile di curve piane si ha $t=3$ e quindi $D \geq h-2$.

14. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare sia composto con una congruenza lineare (o fascio) è che sia di grado zero* [1]. Che un sistema composto con una congruenza lineare di V_t ($t \geq 1$) sia di grado $D=0$, è evidente, perchè r ipersuperficie generiche non possono avere alcun punto comune variabile, altrimenti avrebbero comune la V_t per quel punto, contrariamente all'essere D finito (n. 13). Viceversa, se $D=0$, sia l il massimo valore ($r-1 \geq l \geq 1$) per il quale avviene che l ipersuperficie generiche del sistema abbiano una V_{r-l} comune variabile; onde una $(l+1)^{\text{esima}}$ ipersuperficie generica non abbia alcun punto variabile comune con V_{r-l}, cioè abbia la sua intersezione con questa tutta contenuta nelle varietà base. Allora è evidente che se la $(l+1)^{\text{esima}}$ ipersuperficie si fa passare per un punto generico di V_{r-l} (il qual punto

[1]) Bertini, *Sui sistemi lineari di grado zero* (Rend. Accad. Lincei, 10 (5), 1901).

si può pensare come generico di S_r (n. 13)), la conterrà tutta o in parte. Ciò significa che le ipersuperficie del sistema per un punto generico dello spazio hanno comune necessariamente una varietà ad $r-l (\geq 1)$ dimensioni, cioè il sistema è composto con una congruenza lineare, come si è affermato.

Altra condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema lineare sia composto con una congruenza lineare (o fascio) è che le ipersuperficie di esso passanti per un punto generico passino (almeno) per un punto a questo successivo, cioè abbiano ivi (almeno) una tangente comune: per il qual teorema, come per il precedente deve supporsi $r > 1$. Che la condizione sia necessaria è evidente: per dimostrare che è sufficiente basterà far vedere, in grazia dell' ultimo teorema, che è $D = 0$. Se fosse infatti $D > 0$, $r-1$ ipersuperficie generiche del sistema avrebbero comune una linea L variabile; cosicchè, considerando insieme un fascio generico del sistema, dovrebbe ogni ipersuperficie di questo fascio avere comune con L un numero finito di punti, che, per l'ipotesi, sarebbero di contatto, e quindi L dovrebbe appartenere all' inviluppo del fascio, il che non può essere (nota seconda al n. 6).

Immediata conseguenza dell' ultimo teorema e della terza definizione di jacobiana data nel n. 9 è che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la jacobiana di un sistema lineare ∞^r di S_r sia indeterminata è che il sistema lineare sia composto con una congruenza lineare (o fascio).*

15. — Consideriamo il caso particolare in cui un sistema lineare (1) ∞^{k-1} sia composto con una congruenza lineare di S_t (se $t = r-1$, fascio di S_{r-1}). A questo fatto si può dare un aspetto algebrico espressivo.

Seghiamo il sistema lineare con un S_{r-t} generico. Avremo in questo una rappresentazione della congruenza tale che un punto generico di S_{r-t} individua un S_t, e viceversa un S_t generico individua un punto di S_{r-t}. Il sistema lineare dato sarà segato in un sistema lineare di $V_{r-t-1}^{\,n}$ (ipersuperficie di S_{r-t}), della stessa dimensione di quello, perchè per una generica V_{r-t-1} non può passare più di una ipersuperficie del nostro sistema, per un punto generico di V_{r-t-1} passando un solo S_t. Anzi ad ogni sistema lineare di S_r composto colla congruenza lineare considerata, corrisponderà così un sistema lineare, di egual dimensione, di ipersuperficie di S_{r-t}, e (prescindendo da parti fisse) reciprocamente. Sieno x_i ($i = 0, 1, \ldots, r$) le coordinate in S_r e y_j ($j = 0, 1, \ldots, r-t$) quelle in S_{r-t}; siccome ogni punto x dà un S_t e quindi un punto y, dovranno le y_j essere funzioni razionali delle x_i, cioè

$$(7) \qquad \rho y_j = u_j(x_i) \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, r \\ j = 0, 1, \dots, r-t \end{array} \right\}$$

le u_j essendo forme dello stesso ordine nelle x_i, Se il sistema lineare di ipersuperficie di S_{r-t} che rappresenta il sistema lineare dato ha l'equazione

$$\mu_1 \varphi_1(y_j) + \mu_2 \varphi_2(y_j) + \dots + \mu_h \varphi_h(y_j) = 0,$$

sostituendo alle y_j le loro espressioni (7) si avrà l'equazione

$$\mu_1 \varphi_1(u_j) + \mu_2 \varphi_2(u_j) + \dots + \mu_h \varphi_h(u_j) = 0$$

che sarà l'equazione (1) dello stesso dato sistema moltiplicata eventualmente per un fattore fisso. Cosicchè, *nel caso particolare considerato, le $f_1, f_2, \dots, f_h$ (moltiplicate eventualmente per un fattore fisso) sono forme dello stesso ordine di $r-t+1$ forme delle variabili x_i* [1]).

---

1) Per $r=2$, $r=3$, la proprietà è vera generalmente, quando cioè la congruenza lineare sia di V_t^ρ ($\rho > 1$) qualsiansi. Per $r=2$ (nel quale caso manca il fattore fisso proveniente dalla varietà fondamentale di S_{r-t}, la quale sopra S_1 non esiste), si ha infatti una involuzione sopra un S_1, i cui gruppi di ρ punti si possono far corrispondere ai punti di un altro S_1; e per $r=3$ si applica un teorema di Castelnuovo, citato nella nota seconda al n. 17, Cap. 9.°, e si fa quindi corrispondere i gruppi di ρ punti dell'involuzione che si ha sopra un S_2 ai singoli punti di un altro S_2: e allora in amendue i casi vale il ragionamento superiore (per $r=2$ già fatto sostanzialmente nel n. 11). Segue di qui, ricordando l'ultima proprietà del n. 14, che *condizione necessaria e sufficiente affinchè $r+1$ ($=3, 4$) forme dello stesso ordine ad $r+1$ variabili (linearmente indipendenti) abbiano il determinante jacobiano identicamente nullo è che (moltiplicate eventualmente, quando $r+1=4$, per un fattore fisso) sieno forme di altre $r+1-t$ forme di egual ordine in dette variabili* ($t=1$, se $r=2$; $t=1, 2$, se $r=3$). Questa e la precedente proprietà sussisterebbero generalmente se le involuzioni di S_r ($r>3$) fossero razionali.

Infine si noti che, *se due forme binarie f_1, f_2 dello stesso ordine hanno il jacobiano identicamente nullo, le due forme differiscono per un fattore costante, e reciprocamente*. Infatti dalla identità (cfr. n. 10)

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f_1 \\ f'_2 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

Per maggiore chiarezza accenniamo ad un esempio in S_3. Si consideri la congruenza lineare delle rette appoggiate agli spigoli opposti $A_0 A_2$, $A_1 A_3$ del tetraedro fondamentale. Le formule che trasformano le rette di questa congruenza nei punti di un piano si possono scrivere (tenendo presente che ad una retta del piano corrisponde una quadrica) nella forma

$$\rho y_0 = x_0 x_1 \,, \; \rho y_1 = x_1 x_2 \,, \; \rho y_2 = x_2 x_3 \,.$$

Al sistema lineare ∞^5 di curve piane di 3.° ordine

$$\lambda_1 y_0^2 y_1 + \lambda_2 y_0^2 y_2 + \lambda_3 y_1^3 + \lambda_4 y_1^2 y_2 + \lambda_5 y_1^2 y_0 + \lambda_6 y_0 y_1 y_2 = 0$$

viene a corrispondere il sistema ∞^5 di superficie

$$x_1^2 x_2 (\lambda_1 x_0^2 x_1 + \lambda_2 x_0^2 x_3 + \lambda_3 x_2^2 x_1 + \lambda_4 x_2^2 x_3 + \lambda_5 x_0 x_1 x_2 + \lambda_6 x_0 x_2 x_3) = 0 \,,$$

le quali, prescindendo dalla parte fissa $x_1^2 x_2$, sono tutte le superficie di 3.° grado che hanno $A_1 A_3$ per direttrice doppia ed $A_0 A_2$ per direttrice semplice. Adunque il primo membro dell'equazione di ogni superficie di 3.° grado di questo sistema (composto colla detta congruenza), quando vi si aggiunga il fattore $x_1^2 x_2$, è una forma cubica di tre forme quadratiche $(x_0 x_1 , x_1 x_2 , x_2 x_3)$.

16. — Consideriamo una varietà irriducibile V_k ed un sistema lineare (1). La totalità delle V_{k-1} secondo cui V_k è tagliata dalle ipersuperficie del sistema si dice *serie* o *sistema lineare* di V_{k-1} giacenti su V_k, con l'avvertenza che ove il sistema (1) avesse su V_k una V_{k-1} base (o sezione di una varietà base), la quale verrebbe così a comparire come parte in tutte le V_{k-1} della serie, si possa ad arbitrio toglierla ovvero conservarla in tutte. Così, segando una curva d'ordine m con un sistema lineare (1) d'ipersuperficie di ordine n, il quale abbia l punti base su essa, si ottiene *una serie lineare di gruppi* di nm punti con quegli l punti fissi, ovvero,

---

segue, posto $\frac{x_1}{x_0} = z$, $f_1 = x_0^n \varphi_1(z)$, $f_2 = x_0^n \varphi_2(z)$,

$$\begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi_1 \\ \varphi'_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = 0 \,,$$

e però ecc..

togliendo $1, 2, \ldots, l$ di questi punti, si ottengono delle serie lineari di gruppi di $nm - 1$, $nm - 2, \ldots, nm - l$ punti.

Siccome aggiungendo ad un sistema lineare una ipersuperficie fissa si ha sempre un sistema lineare, è evidente che, aggiungendo ad una serie lineare di V_{k-1} su V_k una qualsiasi V_{k-1} (fissa), si ottiene pure una serie lineare.

Tutti gli iperpiani di S_r o di una sua stella segano, ad es., sopra una V_k una serie lineare. Altro esempio è la sezione di un sistema lineare d'ipersuperficie di S_r per mezzo di un S_k (cfr. n. 1).

17. — Se per una V_{k-1} generica di una serie lineare di V_k passa una sola ipersuperficie del sistema lineare (1) che sega la serie, questa ha evidentemente la dimensione $h - 1$ del sistema stesso. Ma se invece per la detta V_{k-1} generica passano due ipersuperficie del sistema, esse determinano un fascio di ipersuperficie di questo sistema passanti per la stessa V_{k-1}, e la ipersuperficie del fascio che contiene un punto di V_k fuori della base del fascio contiene per intero V_k (n. 3, Cap. 8.°). Quindi la dimensione della serie lineare non eguaglia quella $h - 1$ del sistema (1) che la determina solo quando V_k è contenuta in una od infinite ipersuperficie del sistema.

Supponiamo che per V_k passino ∞^{t-1} ipersuperficie del sistema (1) (e non ∞^t), le quali formeranno evidentemente un sistema lineare. Una ipersuperficie di (1) che sega su V_k una V_{k-1} della serie determinerà col sistema ∞^{t-1} un sistema ∞^t costituito da tutte le ipersuperficie di (1) passanti per quella V_{k-1} (altrimenti si vedrebbe, con ragionamento analogo a quello di dianzi, che per V_k passerebbero ∞^t ipersuperficie di (1)). Si prenda ora nel sistema (1) un sistema ∞^{h-t-1} indipendente dal sistema ∞^{t-1} (cfr. n. 2) e quindi avente con ognuno dei suddetti sistemi ∞^t una sola ipersuperficie comune, e si concluderà che *la dimensione della serie lineare di* V_{k-1} *determinata su* V_k *da un sistema lineare* ∞^{h-1}, *di cui sia* ∞^{t-1} *il sistema subordinato passante per* V_k, *è* $h - t - 1$ (anche se $t = 0$, cioè se per V_k non passa alcuna ipersuperficie del sistema ∞^{h-1}); ed inoltre *si può sempre (in infiniti modi, se* $t > 0$*) staccare dal sistema dato un sistema lineare* ∞^{h-t-1} *che dia uno ad uno gli elementi della serie lineare.*

Può la dimensione di una serie lineare essere anche zero, cioè la serie essere composta di una sola varietà (riducibile o no). Viceversa una V_{k-1} qualunque di una V_k è una serie lineare di dimensione zero.

Con ragionamento analogo a quello del n. 4 si vede che la dimensione di una serie lineare è anche il numero dei punti generici che individuano un elemento della serie. Basta prendere un punto di V_k fuori della base del sistema lineare ∞^{h-t-1} di ipersuperficie, con cui si ottengono uno ad uno le V_{k-1} della serie, e poi un secondo punto di V_k fuori della base del sistema ∞^{h-t-2} che quel primo punto stacca dal sistema ∞^{h-t-1}: poi un terzo punto di V_k fuori della base del sistema ∞^{h-t-3} che il secondo punto stacca dal sistema ∞^{h-t-2}, e così di seguito, fino a prendere $h-t-1$ punti di V_k individuanti una ipersuperficie del sistema ∞^{h-t-1} e quindi una V_{k-1} della serie (perchè mai le basi dei successivi sistemi invaderanno tutta V_k, questa non esistendo in alcuna ipersuperficie del sistema ∞^{h-t-1}).

18. — Lo studio delle serie lineari è il fondamento della geometria delle trasformazioni birazionali. Ci limiteremo qui soltanto ad osservare una proprietà che in un certo senso è una estensione del teorema del n. 8.

Un gruppo generico di una serie lineare sopra una curva C *non può avere punti multipli variabili.* Infatti, in caso opposto, preso un fascio generico del sistema lineare che dà la serie, una ipersuperficie variabile del fascio avrebbe con C un incontro multiplo variabile, che non potrebbe provenire da punto multiplo di detta ipersuperficie del fascio (n. 8), sicchè questo avrebbe un inviluppo, di cui C farebbe parte, il che non può essere (cfr. la nota seconda del n. 6). Ed ora la proprietà si estende. *Se un sistema lineare di curve sopra una superficie* S *è tale che una sua curva generica abbia punti multipli variabili, il luogo di questi sarà una linea multipla di* S. Altrimenti, staccando di nuovo un fascio generico dal sistema lineare di ipersuperficie che dà il sistema di curve, dovrebbe accadere (sempre per il n. 8): o che ogni ipersuperficie del fascio tocca S in una linea ed allora si avrebbe l'assurdo che S sarebbe inviluppata dal fascio; o che ogni ipersuperficie del fascio tocca S in un numero finito di punti (variabili) ed allora questi descriverebbero una linea sulla quale si avrebbe una serie lineare ∞^1 di gruppi di punti (data dal detto fascio) con punti multipli variabili, contrariamente a ciò che si è veduto avanti. Similmente la proprietà si estende ancora, e si trova che *una* V_{k-1} *generica di una serie lineare sopra una* V_k *non può avere punti multipli variabili fuori delle varietà multiple di* V_k.

Capitolo 11.°

Proprietà dei sistemi lineari rispetto alle varietà base. Formula di postulazione.

1. — Premettiamo che, *se* V_ω ($\omega > 0$) *è una varietà* s^{upla} *per una ipersuperficie (ossia è costituita di punti* s^{upli}*), il cono d'ordine s tangente in un punto generico x di* V_ω *all'ipersuperficie ha l'* S_ω *tangente in x a* V_ω *per spazio* s^{uplo} *e però è costituito di* $S_{\omega+1}$ *per l'* S_ω. Infatti, condotto un S_1 per x nell'S_ω ed un S_2 generico per l'S_1, questo S_2 sega l'ipersuperficie in una linea che ha s^{uplo} il punto x e tale anche il punto successivo ad x sull'S_1, onde (come si riconosce con considerazione al limite, quando un punto s^{uplo} di una curva piana cade in un altro punto s^{uplo}) le s tangenti alla linea in x cadono in S_1. Adunque il cono di ordine s tangente in x alla ipersuperficie è dall'S_2 detto segato in s rette coincidenti in S_1 ed ha quindi questo, e però tutto S_ω multiplo secondo s. Se $\omega = r-2$, il cono considerato si spezza in s iperpiani per S_ω.

Ciò posto, considerisi un sistema lineare ∞^{h-1} di ipersuperficie di ordine n. *I coni tangenti in un punto base* s^{uplo} *qualunque alle ipersuperficie del sistema formano un sistema lineare di dimensione* $\leq h-1$ (potendo la dimensione ridursi anche a zero, cioè i coni coincidere in uno solo). Ciò si vede subito, ad es., prendendo il punto base come vertice A_0 della piramide fondamentale, ricordando (n. 15, Cap. 8.°) che il coefficiente di x_0^{n-s} nell'equazione di una ipersuperficie del sistema è il primo membro dell'equazione del cono tangente in quel punto ed osservando che il coefficiente di x_0^{n-s} nell'equazione di una ipersuperficie variabile del sistema stesso è appunto una combinazione lineare di h dei suddetti coefficienti. È da aggiungere l'avvertenza, derivante dalla proprietà superiore, che il sistema lineare dei coni tangenti nel punto s^{uplo} è un sistema lineare nella stella il cui sostegno è il punto stesso, quando questo è *isolato* (cioè non giace in altra varietà base), mentre, se il punto appartiene ad una varietà base V_ω $(\omega > 0)$ s^{upla} *isolata* (cioè non contenuta in altra varietà base di maggior dimensione), quel sistema lineare di coni è nella stella avente per sostegno l'S_ω tangente nel punto considerato a V_ω.

Diremo che un punto base s^{uplo} isolato è *punto base ordinario* se il cono d'ordine s ivi tangente ad una ipersuperficie generica del sistema è privo di multiplicità (nella stella che ha il centro nel punto) ed è variabile coll'ipersuperficie stessa. Diremo altresì che una varietà base V_ω $(\omega > 0)$ s^{upla} isolata è *una varietà base ordinaria* se il cono d'ordine s tangente in un punto generico di V_ω ad una ipersuperficie generica del sistema è privo di multiplicità (nella stella che ha per sostegno l' S_ω tangente nel punto a V_ω) ed è variabile colla ipersuperficie stessa [1]: potendoci pur essere *di conseguenza* in V_ω varietà di dimensione $< \omega$, nei punti delle quali esistano multiplicità qualsiansi. Ad es., in S_3 le superficie di un dato ordine passanti semplicemente per una linea dotata di punti tripli aventi le tangenti non complanari hanno questi punti come punti doppî (appunto per l'esistenza di dette tangenti, che sono tali anche per le superficie).

In seguito intendiamo sempre di limitarci alle sole multiplicità base ordinarie [2]. Manifestamente la sezione di un sistema lineare con multiplicità base ordinarie fatta mediante un S_t generico è pure un sistema lineare con multiplicità base ordinarie.

2. — È utile di non vincolarsi, nella considerazione di un sistema lineare, a *tutte* le sue varietà base. Giova cioè di considerare anche un gruppo soltanto di esse e riferirsi a questo gruppo (cioè ai punti ed alle varietà base del gruppo colle relative multiplicità) nello studio delle proprietà del sistema lineare. Il gruppo scelto, anche nel caso non escluso

---

[1] Se $\omega = r-2$ (anche $r=2, \omega=0$) il detto cono tangente è formato di s iperpiani di un fascio, che devono essere tutti variabili, perchè la molteplicità si dica ordinaria.

[2] Però le proprietà seguenti non subiscono modificazioni essenziali nel caso di multiplicità qualunque, introducendo i concetti relativi alla scomposizione delle singolarità.

che abbracci tutti i punti e le varietà base, dicesi *gruppo base* ed un sistema si dice *completamente* od *incompletamente determinato da un gruppo base*, o, più brevemente, *completo* od *incompleto rispetto ad un gruppo base*, secondochè esso è costituito da tutte le ipersuperficie d'ordine n che hanno nei punti e nelle varietà del gruppo base le multiplicità fissate, oppur no. Che dette ipersuperficie costituiscano un sistema lineare è manifesto dall'osservare che di esse linearmente indipendenti esisterà un numero $< \binom{n+r}{r} - 1$, e che, se più ipersuperficie hanno un punto s^{uplo}, questo è pure s^{uplo} per le ipersuperficie del sistema lineare da esse determinato (basta, ad es., prendere in questo punto, come si è fatto sopra, un vertice della piramide fondamentale).

Un sistema completo rispetto ad un gruppo base sarà completo rispetto ad un altro gruppo base contenuto in quello se le condizioni espresse dalle varietà base tralasciate sono necessaria conseguenza delle altre (es. un fascio di cubiche piane rispetto a 9 ed 8 dei suoi punti base): e sarà incompleto nel caso contrario. *Un sistema incompleto è contenuto totalmente* [1] *in un sistema completo e in uno solo* (si sottintende sempre rispetto ad un dato gruppo base). La differenza (positiva) tra la dimensione del sistema completo e la dimensione del sistema incompleto dicesi *difetto di completezza* o semplicemente *deficenza* dell'ultimo sistema. Il gruppo base può non esistere (cioè non esistere punti e varietà base o nessuno essere considerato): tutti i sistemi incompleti di un dato ordine n sono contenuti allora nell'unico sistema completo $\infty^{\binom{n+r}{r}-1}$ di tutte le ipersuperficie di ordine n. Così sopra una retta (o ente razionale ∞^1) tutte le involuzioni (senza punti fissi) di ordine n sono contenute nell'unica involuzione (completa) di specie n costituita da tutti i gruppi di n punti della retta.

3. — Indichiamo nello spazio S_r con ..., $|\Phi^n|$, $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|$, ... sistemi lineari completi di ordine ..., $n, n+1, n+2$, ... collo *stesso gruppo base*, essendo ..., Φ^n, Φ^{n+1}, Φ^{n+2}, ... rispettivamente ipersuperficie generiche di essi. Diciamo ρ_i la dimensione del sistema $|\Phi^i|$ e θ_i il numero delle condizioni *indipendenti* che vengono imposte alla ipersuperficie Φ^i

[1]) Un sistema lineare è contenuto *totalmente* in un altro se le sue ipersuperficie sono ipersuperficie di questo e *parzialmente* se risultano ipersuperficie di questo aggiungendo una ipersuperficie fissa.

dal possedere le singolarità espresse dal gruppo base. Manifestamente

$$\rho_i = \binom{i+r}{r} - 1 - \theta_i \, .$$

Se il sistema d'ordine i esiste, la differenza del 2.° membro deve essere ≥ 0 (il sistema essendo costituito di una sola ipersuperficie se la differenza è nulla). Ma ora osservisi che, quando esiste, ad es., il sistema di ordine n, esistono anche i sistemi (completi, collo stesso gruppo base) di ordine $n+1$, $n+2$, ..., giacchè il sistema $|\Phi^{n+1}|$, ad es., contiene, tra le altre, quelle ipersuperficie che si compongono di una ipersuperficie di $|\Phi^n|$ e di un piano. Anzi il numero θ_{n+1} è $\geq$ del numero delle condizioni espresse dal gruppo base per una ipersuperficie composta di una Φ^n e di un iperpiano generico (perchè i coefficienti dell'equazione di questa ipersuperficie composta sono particolari rispetto ai coefficienti della Φ^{n+1}), e quest'ultimo numero, a sua volta, è il numero θ_n di condizioni che compete ad una Φ^n (le prime condizioni date dall'annullarsi di certe derivate (n. 13, Cap. 8.°) risultando combinazioni lineari a coefficenti indeterminati delle seconde). Cosicchè si ha intanto

$$\ldots \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq \theta_{n+2} \leq \ldots ,$$

ove, a sinistra, ci si arresta al primo ordine, dicasi ν, per il quale il sistema esiste ($\rho_\nu \geq 0$) od anzi all'ordine precedente $\nu-1$, per il quale si conviene che sia $\rho_{\nu-1} = -1$ e quindi $\theta_{\nu-1} = \binom{\nu-1+r}{r}$.

4. — Consideriamo anzitutto il caso che il gruppo base contenga soltanto un numero finito t di punti multipli (ordinarî) $P_1, P_2, \ldots, P_t$. Se le multiplicità di questi punti sono rispettivamente $s_1, s_2, \ldots, s_t$, dico che per le ipersuperficie d'ordine $l \quad \Sigma s_i$ il numero k delle condizioni *indipendenti* espresse da quei punti è precisamente la somma di quelle che i t punti presentano considerati staccatamente, cioè si ha

$$k = \sum \binom{r+s_i-1}{r}$$

(n. 14, Cap. 8.°): onde nelle diseguaglianze del n. precedente, a partire da un certo valore di n opportunamente alto (che può anche essere inferiore a $\sum s_i$ [1])), vale sempre il segno di eguaglianza, essendo poi il valore *costante* delle θ_i il valore k ora scritto.

Si tratta di provare che le dette $\Sigma\binom{r+s_i-1}{r}$ condizioni, consistenti nell'annullarsi in P_1 le derivate $(s_1-1)^{esime}$, in P_2 le derivate $(s_2-1)^{esime}$, ..., in P_t le derivate $(s_t-1)^{esime}$ di una forma di grado $l \geq \Sigma s_i$, sono linearmente indipendenti. Non lo sieno e, per es., una di esse relativa a P_1 sia conseguenza delle altre. In tale ipotesi, se consideriamo una ipersuperficie di ordine l composta di un cono di ordine s_2 e vertice P_2, ..., di un cono di ordine s_t e vertice P_t, sicchè il resto è una ipersuperficie di ordine $l' = l-(s_2+...+s_t) \geq s_1$, accadrebbe che, imponendo a quest'ultima un punto s_1^{uplo} in P_1, delle $\binom{r+s_1-1}{r}$ condizioni a ciò occorrenti una sarebbe conseguenza delle rimanenti, il che è assurdo, perchè queste condizioni, che sono le sole a cui la ipersuperficie d'ordine l' è assoggettata, sono indipendenti (per il succitato n. 14, Cap. 8.°).

Tenendo presente che fra le superficie del sistema lineare considerato vi sono quelle costituite di coni arbitrarî di ordine $s_1, s_2, ..., s_t$ coi vertici in $P_1, P_2, ..., P_t$ ordinatamente e di una ipersuperficie arbitraria d'ordine $l-\Sigma s_i$, è chiaro che il sistema stesso non possiede altri punti base oltre i t assegnati, che in questi le multiplicità sono quelle fissate (non superiori) e infine che in ciascuno dei t punti base i coni tangenti sono tutti i coni dell'ordine rispettivo col vertice ivi.

5. — Fermiamoci al caso particolare $r=2$, cioè consideriamo un sistema lineare di curve piane $|C^n|$. Allora (prescindendo da una eventuale parte fissa) si hanno soltanto punti base e quindi il teorema del n. precedente ha validità generale [2]).

Adunque, a partire da un valore opportunamente alto l di n, la di-

---

[1]) Ad es., se $s_1=s_2=...=s_t=1$, cioè i punti base sono tutti semplici, questi presentano condizioni indipendenti alle ipersuperficie di ordine $t-1$ che li contengono, giacchè $t-1$ iperpiani per $t-1$ dei punti non passano necessariamente per il rimanente.

[2]) In questo n. e nei due successivi si ritiene che i punti base, come già si è avvertito (n. 1), sieno ordinarî (con tangenti variabili), ma i risultati a cui si arriva nei detti due n. sussistono senza modificazioni (e perciò si enunciano generalmente) quando i punti base sono punti multipli qualunque, come si mostrerà nell' Appendice.

mensione di un sistema lineare completo $|C^n|$ (rispetto ad un dato gruppo base) è

(1) $$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k \quad (n \geq l)$$

ove k è costante ed $= \Sigma \binom{s_i+1}{2}$, se $s_1, s_2, \dots$ sono le multiplicità dei punti costituenti il gruppo base. Per valori di n inferiori ad l, la dimensione del sistema è data invece dalla

(2) $$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - \theta_n \quad (n < l)$$

ove $\theta_n < k$. Il numero k dicesi *postulazione del gruppo base* e la (1) formula *di postulazione* (Cayley, Noether) o *formula caratteristica* (Hilbert).

Quando la dimensione ρ_n di un sistema completo $|C^n|$ è espressa dalla formula di postulazione (1) ($n \geq l$), il sistema si dice *regolare*; nel caso opposto, nel quale la dimensione ρ_n è data dalla (2) ($n < l$), il sistema dicesi *sovrabbondante* o *irregolare*. Tuttavia anche in questo caso giova tener conto della formula di postulazione (1) e chiamare *dimensione virtuale* ρ'_n di $|C^n|$ il valore che assume il 2.° membro della (1):

$$\rho'_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k \quad (n \text{ qualsiasi}),$$

chiamando per contrapposto *effettiva* la vera dimensione ρ_n di $|C^n|$. La differenza positiva fra la dimensione effettiva e la virtuale dicesi *sovrabbondanza* σ_n del sistema:

$$\sigma_n = \rho_n - \rho'_n$$

($\sigma_n > 0$ per un sistema sovrabbondante, $\sigma_n = 0$ per un sistema regolare). Per un sistema completo qualsiasi la dimensione effettiva è adunque espressa dalla formula

(3) $$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k + \sigma_n$$

e, per un sistema incompleto, di cui δ_n sia la deficienza, dalla

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k + \sigma_n - \delta_n$$

6. — Per i sistemi lineari irriducibili completi di curve piane aggiungeremo alcune formule, che sono conseguenza della (3) e del concetto di genere, considerando però il gruppo base costituito da *tutti* i punti (semplici o multipli) comuni alle curve del sistema.

La (3), cioè

$$\rho_n = \frac{n(n+3)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2} + \sigma_n$$

e la (n. 20, Cap. 9.°)

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

che dà il genere di una curva generica del sistema o, come anche si dice, il genere del sistema, forniscono per somma e sottrazione le altre due

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum s_i^2 = n^2 - \rho_n - p + \sigma_n + 1 \\ \sum s_i = 3n - 1 + p - \rho_n + \sigma_n . \end{cases}$$

La prima di queste, introducendo il grado D del sistema, che è $= n^2 - \Sigma s_i^2$, conduce alla

$$(5) \qquad D = \rho_n + p - \sigma_n - 1,$$

per la quale, alle (4), si possono sostituire le

$$\sum s_i^2 = n^2 - D$$

$$\sum s_i = 3n - D + 2p - 2 .$$

Notiamo alcune conseguenze della (5) per applicazioni da fare in seguito.

Se il sistema lineare è un fascio, sarà $\rho_n = 1$, $D = 0$ e quindi $p = \sigma_n$. Se $\rho_n > 1$, avendosi $D \geq \rho_n - 1$ (n. 13, Cap. 10.°), segue dalla (5) $\sigma_n \leq p$, e quindi, se $p = 0$, sarà $\sigma_n = 0$. Viceversa, essendo sempre $\rho_n > 1$, se $\sigma_n = p$, dalla (5) segue $D = \rho_n - 1$: cosicchè, preso un fascio subordinato del dato sistema lineare che sia determinato da $\rho_n - 2$ punti di una curva generica del sistema stesso e da un altro punto esterno alla curva, i punti di questa si otterranno uno ad uno colle curve del fascio, cioè la detta curva generica sarà razionale ($p = 0$). Si conclude che *la sovrab-*

bondanza σ_n *è sempre minore del genere* p, *eccettuati i fasci per i quali* $\sigma_n = p$ *ed i sistemi di curve razionali, i quali sono tutti regolari.* In particolare notisi che *un sistema completo di curve razionali, se è di dimensione* ρ_n, *è di grado* $\rho_n - 1$, *e viceversa* [1]).

Dalla (5) si può anche ricavare una condizione sufficiente affinchè un sistema lineare (irriducibile) completo di curve piane sia semplice. Infatti, se esso è composto con una involuzione d'ordine μ (n. 12, Cap. 10.°), siccome si ha $D \geq \mu(\rho_n - 1)$, dalla (5) segue $D \geq \mu(D - p + \sigma_n)$, da cui $D \leq \frac{\mu}{\mu - 1}(p - \sigma_n)$. Se dunque sussiste la relazione $D > \frac{\mu}{\mu - 1}(p - \sigma_n)$ per qualunque numero intero μ, il sistema non può essere composto. Ora dall'essere $\mu \geq 2$ si ricava $2 \geq \frac{\mu}{\mu - 1}$; quindi la detta relazione è certo soddisfatta se lo è l'altra $D > 2(p - \sigma_n)$, e quindi anche se lo è la $D > 2p$. Adunque (teorema di Segre) *un sistema lineare completo di curve piane è certo semplice se il suo grado* $D > 2p$ [2]). Così i sistemi completi di curve razionali sono tutti semplici [3]).

7. — Continuando a considerare il caso del piano ($r = 2$), riprendiamo le cose del n. 5. Sieno $|C^n|$, $|C^{n+1}|$, $|C^{n+2}|$ tre sistemi lineari successivi completi e regolari (collo stesso gruppo base) di dimensioni ρ_n, ρ_{n+1}, ρ_{n+2} rispettivamente, tali cioè che sia applicabile la (1) ($n \geq l$): e però si abbia

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\rho_n &= \binom{n+2}{2} - 1 - k \\
\rho_{n+1} &= \binom{n+3}{2} - 1 - k \\
\rho_{n+2} &= \binom{n+4}{2} - 1 - k .
\end{aligned}
\right.
$$

---

1) Esclusi i fasci, anche i sistemi ellittici (cioè di genere 1) sono regolari, avendosi, se $\rho_n > 1$, $D > \rho_n - 1$, e quindi, per la (5), $\sigma_n < 1$, cioè $\sigma_n = 0$. Un sistema completo ellittico, se è di dimensione $\rho_n > 1$, è di grado ρ_n, e viceversa.

2) Per mezzo della geometria sopra una curva, si ottengono proprietà più generali delle suddette ed altre. Cfr. il Cap. II delle *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* di CASTELNUOVO (Mem. della R. Accad. di Torino, 42 (2), 1891), ovvero il § 9 della *Geometria delle serie lineari ...* di BERTINI (Annali di Matem., 22 (2), 1894).

3) Sono pure semplici i sistemi completi ellittici, escluse le reti.

Associamo ad ogni C^{n+1} ogni retta del piano: avremo un sistema $\infty^{\rho_{n+1}+2}$ di ordine $n+2$ (non lineare). Sia $|C_1^{n+2}|$ il sistema lineare di minima dimensione in cui questo è contenuto e sia ρ'_{n+2} la sua dimensione. Manifestamente il sistema $|C_1^{n+2}|$ coinciderà con $|C^{n+2}|$ o sarà contenuto in esso: onde si avrà $\rho_{n+2} \geqq \rho'_{n+2}$. Prendiamo nel piano due rette generiche a, b, e consideriamo i due sistemi lineari che si ottengono aggiungendo a $|C^{n+1}|$ rispettivamente quelle due rette. Siccome ogni curva comune a questi due sistemi deve contenere amendue le rette a, b, è chiaro che il loro sistema d'intersezione si ha aggiungendo a $|C^n|$ le due rette medesime, onde (n. 2, Cap. 10.°) il loro sistema di appartenenza ha la dimensione $2\rho_{n+1} - \rho_n$. D'altra parte ogni retta per il punto ab associata a $|C^{n+1}|$ dà un sistema contenuto in quello che si stacca da $|C_1^{n+2}|$ col fissare il passaggio per il punto ab: sicchè amendue i sistemi sunnominati sono contenuti in questo sistema (ma non si può dire in generale che gli appartengano). Quindi deve essere

$$\rho'_{n+2} - 1 \geqq 2\rho_{n+1} - \rho_n ,$$

donde, per le (6), $\rho'_{n+2} \geqq \rho_{n+2}$. Adunque (essendo anche $\rho'_{n+2} \leqq \rho_{n+2}$) $\rho'_{n+2} = \rho_{n+2}$; ossia i sistemi $|C^{n+2}|$, $|C_1^{n+2}|$ coincidono. La proprietà può estendersi. Si ha cioè similmente che il sistema $|C^{n+3}|$ coincide col sistema lineare minimo che contiene le curve di ordine $n+3$ ottenute associando ad ogni curva di $|C^{n+2}|$ ogni retta del piano, od anche associando ad ogni curva di $|C^{n+1}|$ ogni coppia di rette del piano (giacchè, per la proprietà precedente, si possono prendere $\rho_{n+2}+1$ curve indipendenti C^{n+2}, ciascuna costituita di una retta e di una C^{n+1}). Ma è lo stesso aggiungere ad ogni C^{n+1} ogni coppia di rette oppure ogni retta doppia oppure ogni conica del piano, chè quelle si esprimono linearmente per queste, e reciprocamente (cfr. ultimo alinea del n. 3, Cap. 10.°). Adunque, proseguendo con analoghi ragionamenti, si può concludere: — Se $|C^n|$, $|C^{n+1}|$ *sono due sistemi lineari completi e regolari collo stesso gruppo base, il sistema lineare di minima dimensione che contiene tutte le* C^{n+m} *composte di ogni* C^{n+1} *e di ogni curva irriducibile d'ordine* $m-1$, *o di ogni retta* $(m-1)^{\text{upla}}$ *(oppure di ogni curva di ordine* $m-1$ *spezzata in modo determinato), è il sistema completo (e regolare)* $|C^{n+m}|$ *definito dallo stesso gruppo base* [1]. L'ipotesi

[1] Il teorema sta anche se non esiste gruppo base. Allora il sistema di tutte le curve di un dato ordine è un sistema completo e regolare.

si può raccogliere in queste due affermazioni che $|C^{n+1}|$ sia completo e che n sia abbastanza grande (in che resta compreso che $|C^n|$, $|C^{n+1}|$ sono regolari).

Osserviamo anche quest'altra proprietà: — *Un sistema lineare, completo rispetto ad un dato gruppo base, di curve piane di ordine n, sega sopra una retta generica del piano una involuzione completa, se n è abbastanza elevato* — Infatti, prendendo n così elevato che il dato sistema completo $|C^n|$ e quello completo collo stesso gruppo base $|C^{n-1}|$ sieno regolari, dalle

$$\rho_{n-1} = \binom{n+1}{2} - 1 - k$$

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k$$

si ricava che $\rho_n - \rho_{n-1} - 1$ è eguale ad n e quella è appunto (n. 17, Cap. 10.°) la dimensione dell'involuzione segnata dal sistema $|C^n|$ sopra una retta generica (le curve del sistema passanti per questa essendo costituite della retta stessa e del sistema $|C^{n-1}|$).

8. — Ci proponiamo ora di estendere al caso di $r=3$ i risultati dei n. 5, 7.

Domandiamo in primo luogo se esiste in S_3 proprietà analoga al secondo teorema del n. 7: cioè, se, fissato il gruppo base di un sistema lineare completo di superficie $|\Phi^n|$, si possa far crescere l'ordine n di queste così che il sistema lineare di curve piane $|C^n|$ segnato da esse sopra un piano generico ω sia completo e regolare, rispetto, s'intende, al gruppo base sezione del gruppo base delle superficie [1]). La risposta è affermativa e si ottiene coll'aiuto del primo teorema del n. 7.

Siccome il piano segante ω è generico, il gruppo base sezione potrà contenere soltanto punti base ordinarî: onde risulterà intanto dal n. 5 che, chiamando $|\Gamma^n|$ il sistema completo in cui è contenuto $|C^n|$, si può supporre n così grande che $|\Gamma^n|$ sia regolare, anzi che lo sia anche il

[1]) Esempî. Il sistema di quadriche (∞^1) per una quartica di 1.ª specie sega sopra un piano un sistema (∞^1) completo e regolare: quello (∞^0) per una quartica di 2.ª specie, un sistema (∞^0) incompleto e regolare (cioè è regolare il sistema completo in cui esso è contenuto): un fascio di superficie cubiche sega sopra un piano un sistema (∞^1) completo e irregolare: una rete di quadriche (per 7 punti), un sistema ∞^2 incompleto e regolare: ecc..

sistema completo $|\Gamma^{n-1}|$ contenente il sistema $|C^{n-1}|$, nel quale il piano ω taglia il sistema completo di superficie $|\Phi^{n-1}|$ (collo stesso gruppo base dato). Se per questo valore di n il sistema $|C^n|$ non fosse completo, cioè non coincidesse con $|\Gamma^n|$, dimostriamo ora che, facendo crescere ulteriormente n, ciò può ottenersi.

Cominciamo dal supporre che il dato gruppo base contenga soltanto linee basi L, di ciascuna delle quali è assegnata la moltiplicità λ in un punto generico. Allora l'accrescimento che deve darsi ad n per raggiungere lo scopo si determina colla seguente costruzione. Imaginisi che il piano ω sia variabile in un fascio di cui l'asse a sia una retta generica di S_3 e per ogni posizione di ω si stacchi una curva del sistema $|\Gamma^n|$ razionalmente: ad es., se r_n è la dimensione di $|\Gamma^n|$, prendendo una curva gobba di ordine r_n, in particolare r_n rette sghembe, ed obbligando la Γ_n a passare per gli r_n punti nei quali ω sega la curva gobba. Il luogo di quella curva, al variare di ω intorno ad a, è una superficie τ, di ordine $n+k$, ove si indichi con k la moltiplicità della retta a per la superficie. Va notato che dell'arbitrarietà che compare nella costruzione di τ (ad es. la scelta della curva gobba di ordine r_n di cui si è detto dianzi) si può sempre disporre in modo che la sezione Γ^n di τ con uno dei piani ω del fascio (all'infuori della retta a k^{upla}) sia una curva assegnata a priori entro al corrispondente sistema $|\Gamma^n|$.

Dico che l'ordine $n+k$ soddisfa alla condizione imposta superiormente. Notisi dapprima che se τ ha μ^{pla} una linea L, in un punto generico P di questa i soli piani che tagliano τ in linee aventi ivi una moltiplicità $>\mu$ sono i μ piani tangenti in P a τ, piani passanti per la tangente in P ad L. Ma di tali tangenti solo un numero finito incontra la retta generica a; dunque il piano ω, generico per a, non passa per alcuna di esse, e però la multiplicità μ deve essere proprio eguale alla multiplicità λ che la Γ^n di τ ha nei punti sezione di ω colla L considerata. Per conseguenza le superficie τ (al variare anche di a) passano per le linee del gruppo base colle multiplicità fissate e quindi sono tutte contenute nel sistema lineare completo $|\Phi^{n+k}|$ di superficie d'ordine $n+k$ definito dal medesimo gruppo base. Di qui segue la verità dell'affermazione suddetta, osservando che, preso un piano generico ω e considerati di esso i sistemi $|\Gamma^{n-1}|$, $|\Gamma^n|$ completi e regolari, il sistema $|\Phi^{n+k}|$ sega ω in un sistema lineare che contiene ogni Γ^n associata ad ogni retta k^{upla} del piano (perchè assunta questa come retta a si può avere, come notammo, una τ passante per la

Γ^n)[1]. Ma il sistema lineare minimo che contiene queste curve composte è (n. 7) il sistema lineare, completo e regolare $|\Gamma^{n+k}|$ (definito sempre dal gruppo base sezione); dunque il precedente sistema lineare, segato dalle $|\Phi^{n+k}|$, coincide con questo, e però ecc..

Che se il dato gruppo base contenesse inoltre un punto base M (o più) con multiplicità (ordinaria) μ, occorrerà in generale crescere ancora l'ordine $n+k$. Associamo ad ogni superficie τ ogni cono d'ordine μ col vertice in M. Si avranno superficie di ordine $n+k+\mu$, contenute nel sistema completo $|\Phi^{n+k+\mu}|$ definito dal gruppo base, onde il sistema lineare che questo segherà in un piano ω conterrà le curve costituite di ogni Γ^n accresciuta (di ogni retta k^{upla} associata ad ogni curva di ordine μ e quindi) di ogni curva di ordine $k+\mu$ del piano. Si conclude, come avanti, che il sistema $|\Phi^{n+k+\mu}|$ sega su ω un sistema completo (e regolare). E ciò si conclude pure per un sistema $|\Phi^{\nu}|$ ove $\nu > n+k+\mu$ aggiungendo ad ogni $\Phi^{n+k+\mu}$ ogni superficie di S_3 di ordine $\nu-(n+k+\mu)$ e riapplicando la proprietà del n. 7.

Adunque *un sistema lineare, completo rispetto ad un dato gruppo base, di superficie di* S_3 *sega sopra un piano generico un sistema completo e regolare (rispetto al gruppo base sezione di quello) quando l'ordine delle superficie superi un certo limite* (che può anche essere inferiore a quello indicato). Si aggiunga, come corollario, nella stessa ipotesi dell' ordine n abbastanza grande, che *il sistema lineare di superficie sega sopra una retta generica una involuzione completa*, come segue subito dal secondo teorema del n. 7.

9. — Sia $|\Phi^n|$ un sistema lineare completo di superficie, rispetto ad un dato gruppo base, di ordine qualunque n, e sieno ρ_n la sua dimensione ed r_n la dimensione del sistema sezione di $|\Phi^n|$ con un piano generico. Di quest'ultimo sistema indichiamo inoltre con δ_n il difetto di completezza, con σ_n la sovrabbondanza (del sistema completo in cui è contenuto) e con k_0 la postulazione del gruppo base (sezione del gruppo base dato). Se ρ_{n-1} è la dimensione di $|\Phi^{n-1}|$ (sistema lineare completo collo stesso gruppo base di $|\Phi^n|$ e di ordine $n-1$), osservando che le Φ_n passanti per il piano segante sono costituite da questo piano e dalle Φ^{n-1}, si ha (n. 17, Cap. 10.°)

$$\rho_n - \rho_{n-1} = r_n + 1$$

---

[1]) Se $k=0$ si ha, senz'altro, che $|\Phi_n|$ sega già su ω un sistema completo.

ed inoltre (n. 5)

$$r_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k_0 + \sigma_n - \delta_n;$$

donde

$$\rho_n - \rho_{n-1} = \binom{n+2}{2} - k_0 + \sigma_n - \delta_n,$$

vera anche se $|\Phi^{n-1}|$ non esiste, purchè si ponga $\rho_{n-1} = -1$. Aggiungiamo a questa le altre che se ne ottengono dando ad n i valori $n+1, n+2, \ldots, n+m$ (m qualsiasi), e sommiamo: avremo

$$\rho_{n+m} - \rho_{n-1} = \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{2} + \ldots + \binom{n+m+2}{2} - k_0(m+1) + \sum_{i=n}^{i=n+m} \sigma_i - \sum_{i=n}^{i=n+m} \delta_i$$

ovvero [1])

$$(7) \qquad \rho_{n+m} - \rho_{n-1} = \binom{n+m+3}{3} - \binom{n+2}{3} - k_0(m+1) + \sum_{i=n}^{i=n+m} \sigma_i - \sum_{i=n}^{i=n+m} \delta_i .$$

Ora suppongasi (n. 8) che l sia un limite tale che, per $n \geq l$, le $|\Phi^n|$ seghino sopra un piano generico un sistema completo e regolare (cessando per $n < l$ l'una o l'altra di queste due proprietà). Allora, essendo le σ_i, δ_i nulle per $i \geq l$, ponendo $n = l$ e

$$(8) \qquad k_1 = \binom{l+2}{3} - k_0 l - \rho_{l-1} - 1$$

si ricava dalla precedente

$$\rho_{l+m} = \binom{l+m+3}{3} - 1 - (l+m+1)k_0 - k_1 .$$

Per conseguenza si ha

$$(9) \qquad \rho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)k_0 - k_1, \quad \text{per } n \geq l-1,$$

---

[1]) Si ricordi la formula combinatoria ($n - t \geq k$)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-t}{k} + \binom{n-t}{k-1} + \binom{n-t+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

(che, ad es., proviene dalla $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, applicando successivamente questa stessa formula).

(cioè non solo per $n \geq l$, ma anche per $n = l - 1$, in virtù della (8)). Adunque *un dato gruppo base impone alle superficie di ordine n passanti per esso, quando i valori di n superano un certo limite, un numero di condizioni espresso da* $(n+1)\,k_0 + k_1$, *dove* k_0, k_1 *sono due costanti che dipendono dal gruppo base.* Precisamente k_0 dipende soltanto dalle curve basi, è la postulazione del gruppo dei punti base che si ottiene segando con un piano generico le curve base, e la sua determinazione si riduce ad un problema di geometria piana già risoluto (n. 5): mentre k_1 dipende da tutto il gruppo base e la sua determinazione è in generale assai difficile [1]).

Il numero $(n+1)k_0 + k_1$ dicesi *postulazione* del dato gruppo base, e la formula (9), *formula di postulazione* o *formula caratteristica.*

10. — Per i valori di n inferiori ad $l-1$ si determina subito l'espressione di ρ_n, ponendo nella (7) $n + m = l - 1$, avendo presente la (8) e sostituendo poscia $n+1$ ad n: si ha così

$$\rho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)\,k_0 - k_1 + \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \delta_i - \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \sigma_i, \quad \text{per} \quad n < l-1\,.$$

Ma è utile anche tener conto del numero che in tal caso è dato dalla (9), numero che diremo *dimensione virtuale* del sistema $|\Phi^n|$ che si considera e che indicheremo con ρ'_n, mentre ρ_n è la vera dimensione o *dimensione effettiva.* La differenza fra la dimensione effettiva e quella virtuale è, per la precedente,

$$\rho_n - \rho'_n = \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \delta_i - \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \sigma_i.$$

Come si vede, tale differenza si compone di due parti aventi segni opposti. La parte positiva è data dalla somma delle deficienze dei sistemi di curve segati sopra un piano generico dai sistemi (completi) di superficie $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|$, ... successivi al dato (collo stesso gruppo base); e la parte negativa è data dalla somma delle sovrabbondanze degli stessi sistemi di curve piane (completati ove occorra).

[1]) Se esiste soltanto una curva base semplice, la quale sia irriducibile e priva di punti multipli, di ordine ν e genere π, si ha $k_0 = \nu$ e si può mostrare (con considerazioni di geometria sopra una curva) che $k_1 = 1 - \pi - \nu$. Se esistono solo punti base si ha $k_0 = 0$ e le cose del testo ricadono in parte dei risultati del n. 4.

Se la parte positiva supera la negativa, si ha $\rho_n > \rho'_n$, come avviene per i sistemi completi (irregolari) di curve piane. Ma ora si presenta un caso nuovo dipendente dal poter essere la parte positiva minore o eguale alla negativa e quindi $\rho_n \leq \rho'_n$ [1]. Notisi però che, quando per il sistema $|\Phi_n|$ $(n < l-2)$ sia $\rho_n = \rho'_n$, non si può affermare che anche per il sistema successivo $|\Phi^{n+1}|$, la dimensione effettiva sia eguale alla virtuale [2].

È opportuno di porre la seguente definizione. Un sistema lineare completo di superficie di ordine n dicesi *regolare* rispetto ad un dato gruppo base se la dimensione di esso e dei sistemi lineari successivi (collo stesso gruppo base) è data dalla formula di postulazione (9): nel caso contrario, si dice *irregolare* o *sovrabbondante*. Se un sistema completo è regolare, lo sono anche tutti i sistemi successivi.

Si chiamerà ancora *sovrabbondanza* la differenza $\sigma_n = \rho_n - \rho'_n$, ma, come ora si è detto, mentre per $r=2$, $\sigma_n \geq 0$, si ha, per $r=3$, $\sigma_n \gtreqless 0$. La dimensione di un sistema lineare di superficie di ordine n, del quale la deficienza sia δ_n e la sovrabbondanza σ_n, si esprime colla formula

$$\rho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)k_0 - k_1 + \sigma_n - \delta_n \quad ^{3)}.$$

11. — Il primo teorema del n. 7 si estende al caso di $r=3$ con ragionamento simile a quello ivi esposto.

---

[1]) Ecco un semplice esempio (che si può generalizzare) in cui la parte positiva è minore della negativa. Abbiasi soltanto una curva base C intersezione di due superficie (generali) del 3.° e 4.° ordine. Questa curva è di ordine 12 e di genere 19 (come può vedersi, ad es., coll'aiuto della rappresentazione piana della superficie di 3.° ordine): onde la sua postulazione (nota al n. 9) è $12(n+1)-30$. Per $n=3$ si trova quindi la dimensione virtuale $\rho'_3 = 1$, mentre manifestamente la dimensione effettiva $\rho_3 = 0$. Si può mostrare infatti che le superficie del 4.° ordine passanti per C segano sopra un piano generico un sistema completo [cfr. nota al n. 2 del lavoro di SEVERI, *Sulla deficienza della serie caratteristica* ... (Rend. Accad. Lincei, 12 (5), 1903)], e che questo sistema ha la sovrabbondanza uno $(\delta_4 = 0\,,\ \sigma_4 = 1)$; ecc..

[2]) Dall'essere eguali le due somme per un dato valore di n non si può concludere la loro eguaglianza sostituendo $n+1$ ad n (e invece se quelle somme si annullano separatamente, essendo somme di numeri positivi, questi devono essere tutti nulli).

[3]) Il procedimento esposto è dovuto a CASTELNUOVO. Vedasi il Cap. 1.° della sua Memoria, *Alcune proprietà fondamentali* ... (Annali di Matem., 25 (2), 1897).

Sia, al solito, $|\Phi^n|$ un sistema completo: se n è opportunamente grande, esso ed i sistemi lineari successivi $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|$ sono regolari (n. 10): sicchè le loro rispettive dimensioni ρ_n, ρ_{n+1}, ρ_{n+2} sono date dalle formule

$$(10)\qquad \begin{cases} \rho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)\,k_0 - k_1 \\ \rho_{n+1} = \binom{n+4}{3} - 1 - (n+2)\,k_0 - k_1 \\ \rho_{n+2} = \binom{n+5}{3} - 1 - (n+3)\,k_0 - k_1 . \end{cases}$$

Chiamando $|\Phi_1^{n+2}|$ il sistema lineare di minima dimensione che contiene ogni Φ^{n+1} unita ad ogni piano di S_3 e ρ'_{n+2} la sua dimensione, si ha $\rho'_{n+2} \leq \rho_{n+2}$. Ora, presi due piani α, β, si vede, come nel n. 7, che $2\rho_{n+1} - \rho_n$ è la dimensione del sistema di appartenenza dei due sistemi lineari che si ottengono aggiungendo a $|\Phi^{n+1}|$ ciascuno di quei due piani. D'altra parte gli stessi due sistemi sono contenuti nel sistema lineare che si stacca da $|\Phi_1^{n+2}|$ imponendo il passaggio per la retta $\alpha\beta$; sistema, che per il n. 17, Cap. 10.°, ha la dimensione $\rho'_{n+2} - (n+2) - 1$. Infatti $|\Phi^{n+1}|$, quando n è abbastanza alto, sega sulla retta $\alpha\beta$ l'involuzione completa di ordine $n+1$ (corollario del teorema del n. 8): e quindi $|\Phi_1^{n+2}|$ vi sega pure l'involuzione completa di ordine $n+2$, in quanto contiene ogni gruppo di quella accresciuta di ogni punto della retta (involuzione completa segata anche da $|\Phi^{n+2}|$). Dunque

$$\rho'_{n+2} - (n+3) \geq 2\rho_{n+1} - \rho_n ,$$

ossia, per le due prime delle (10),

$$\rho'_{n+2} \geq 2\binom{n+4}{3} - \binom{n+3}{3} + \binom{n+3}{1} - 1 - (n+3)\,k_0 - k_1$$

od anche [1])

$$\rho'_{n+2} \geq \binom{n+5}{3} - 1 - (n+3)\,k_0 - k_1$$

---

[1]) Si noti che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} =$

$= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k} - \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-2} = 2\binom{n-1}{k} - \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-2}$.

cioè, per la terza delle (10), $\rho'_{n+2} \geq \rho_{n+2}$. Quindi, avendosi anche $\rho'_{n+2} \leq \rho_{n+2}$, deve essere $\rho'_{n+2} = \rho_{n+2}$; cosicchè i sistemi $|\Phi^{n+2}|$, $|\Phi_1^{n+2}|$ coincidono. E adesso la proprietà si estende come nel n. 7, e si conclude che *se* $|\Phi^{n+1}|$ *è un sistema completo ed* n *è abbastanza grande, il sistema lineare minimo contenente ogni* Φ^{n+1} *in unione ad ogni superficie irriducibile di ordine* $m-1$, *o ad ogni piano* $(m-1)^{\text{uplo}}$, *è il sistema completo (e regolare)* $|\Phi^{n+m}|$ *definito dallo stesso gruppo base.*

12. — I teoremi per $r=2$, $r=3$, contenuti nei n. precedenti, possono essere generalizzati, col metodo esposto, al caso di r qualunque [1]. Si vuole cioè dimostrare che, designando ora con $|\Phi^n|$ un sistema completo di ipersuperficie di S_r rispetto ad un dato gruppo base e con ρ_n la sua dimensione, sussistono le seguenti tre proprietà, *quando si dia ad* n *un valore abbastanza elevato:*

a) La dimensione ρ_n *è espressa dalla formola*

$$(11)\qquad \rho_n = \binom{n+r}{r} - 1 - k_0\binom{n+r-2}{r-2} - k_1\binom{n+r-3}{r-3} - \dots - k_{r-3}(n+1) - k_{r-2}$$

ove $k_0, k_1, \dots, k_{r-3}, k_{r-2}$ *sono costanti relative al dato gruppo base:* e precisamente k_0 dipende soltanto dalla V_{r-2} base; k_1 dalle V_{r-2}, V_{r-3} base; ...; k_{r-3} dalle $V_{r-2}, V_{r-3}, \dots, V_1$ base; ed infine k_{r-2} da tutte le varietà base. Si deve anche osservare, come risulterà dalla dimostrazione, che $k_0, k_1, \dots, k_{r-3}$ (o in generale $k_0, k_1, \dots, k_{r-i}$) sono identiche alle analoghe costanti della formula simile alla precedente relativa al gruppo base intersezione del dato con un S_{r-1} (od S_{r-i+2}) generico. Se manca la V_{r-2} base, $k_0 = 0$; se mancano le V_{r-2}, V_{r-3} base, $k_1 = 0$; ecc..

b) Il sistema lineare minimo contenente ogni ipersuperficie del sistema completo $|\Phi^{n+1}|$ *in unione ad ogni ipersuperficie irriducibile di ordine* $m-1$, *o ad ogni iperpiano* $(m-1)^{\text{uplo}}$, *è il sistema completo (e regolare)* $|\Phi^{n+m}|$ *relativo allo stesso gruppo base.*

c) Il sistema completo $|\Phi^n|$ *sega sopra un iperpiano generico un sistema completo e regolare.* Dal qual teorema discende (sempre nell'ipotesi di n abbastanza elevato) il corollario che *il sistema completo* $|\Phi^n|$ *sega sopra un* S_{r-h} *generico un sistema completo e regolare,* giacchè la sezione di $|\Phi^n|$

[1]) Questa generalizzazione del procedimento di Castelnuovo mi fu indicata dal Severi ed anzi il modo di esposizione dei n. 9, 10, 11 mi fu suggerito da tale generalizzazione.

con un iperpiano generico essendo un sistema completo, la sezione di questo sistema con un S_{r-2} generico dell'iperpiano, se n è grande, sarà pure un sistema completo e regolare; e così di seguito.

La (11) si dice *formula di postulazione* o *caratteristica* e l'espressione

$$k_0\binom{n+r-2}{r-2}+k_1\binom{n+r-3}{r-3}+\dots+k_{r-3}(n+1)+k_{r-2},$$

che dà il numero delle condizioni (indipendenti) a cui è sottoposta una Φ^n, quando n è sufficientemente alto, per avere le multiplicità espresse dal dato gruppo base, si dice *postulazione* di tale gruppo [1]. Un sistema completo $|\Phi^n|$ si dice *regolare* se la sua dimensione e quella dei sistemi successivi $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|$, ... (completi rispetto allo stesso gruppo base) sono date dalla formula di postulazione (11). Per un sistema non regolare *(irregolare* o *sovrabbondante)* la dimensione ρ'_n data dalla (11) dicesi *dimensione virtuale* e la differenza fra essa e la *dimensione effettiva* ρ_n, cioè $\sigma_n=\rho_n-\rho'_n$, si chiama *sovrabbondanza.* Onde, per un sistema qualunque, detta inoltre δ_n la deficienza del sistema completo in cui esso è contenuto, si ha

$$(12)\quad \rho_n=\binom{n+r}{r}-1-k_0\binom{n+r-2}{r-2}-k_1\binom{n+r-3}{r-3}-\dots-k_{r-3}(n+1)-k_{r-2}+\sigma_n-\delta_n.$$

La dimostrazione dei teoremi a), b), c) si farà per induzione, ammettendo che i teoremi stessi (già dimostrati per $r=2$, $r=3$) sussistano negli spazî subordinati di S_r di dimensione $\leq r-1$.

13. — Si arriva dapprima al teorema c) con considerazioni affatto simili a quelle del n. 8, e che per ciò presentiamo qui brevemente.

Si fa crescere n così che il sistema completo $|\Phi^n|$ seghi sopra un iperpiano generico ω un sistema, che diremo $|\varphi^n|$, il quale, completato

---

[1]) Da questa espressione si passa a quella data dall' HILBERT nella Memoria *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Annalen, 36, 1890, a pag. 512) indicando con d la massima dimensione delle varietà base e trasformando colla identità

$$\binom{n+s}{s}=\binom{n}{s}+\binom{s}{1}\binom{n}{s-1}+\dots+\binom{s}{s-1}\binom{n}{1}+\binom{s}{s},$$

salvo che le $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d$ della espressione di HILBERT sono funzioni lineari a coefficienti interi delle suddette $k_0, k_1, \dots, k_{r-2}$.

se occorra, sia regolare (come si può per il teorema *a)* ammesso nell'S_{r-1}). Se per tale valore di n il sistema $|\varphi^n|$ non è completo, si può crescere n così che ciò si verifichi. In vero, dicasi $|\varphi_1^n|$ il sistema completo in cui $|\varphi^n|$ è contenuto e supponiamo anzitutto che il dato gruppo base sia composto solo di $V_{r-2}, V_{r-3}, \ldots, V_1$, cioè non contenga punti base. L'iperpiano ω varî in un fascio generico, ossia intorno ad un S_{r-2} generico, e per ogni sua posizione si stacchi una φ_1^n razionalmente. Il luogo di essa sarà una ipersuperficie τ di ordine $n+k$ se k è la multiplicità di S_{r-2} per essa: e questa ipersuperficie si potrà far passare per una φ_1^n scelta a priori in uno degli iperpiani ω del fascio. Si noti poi che in un punto M d'intersezione di ω colla V_1 base μ^{upla}, o in un punto M generico della varietà d'intersezione di ω con un'altra V_i base μ^{upla}, gli S_{r-1} tangenti a τ passano per l'S_1 o l'S_i ivi rispettivamente tangente alla V_1 o alla V_i (n. 1). Di tali S_1 od S_i soltanto un numero finito è incidente (cioè l'incontra rispettivamente in un S_0 od in un S_{i-1}) ad un S_{r-2} generico: sicchè un iperpiano ω generico del fascio non può essere tangente in alcun punto M a τ, ma sega τ in una φ_1^n (oltre l'S_{r-2} k^{uplo}), la quale ha in M la multiplicità μ; questa è adunque la multiplicità di M per τ. Le ipersuperficie τ per conseguenza sono tutte contenute nel sistema completo $|\Phi^{n+k}|$ definito dal considerato gruppo base. La sezione di questo sistema con un iperpiano generico ω abbraccia quindi ogni ipersuperficie di ω costituita di ogni φ_1^n e di ogni S_{r-2} k^{uplo}: ma, (per il teorema *b)* ammesso nell'S_{r-1}), se n è abbastanza alto, il sistema minimo che contiene ogni tale ipersuperficie è il sistema $|\varphi_1^{n+k}|$ completo e regolare (rispetto al gruppo base sezione); dunque questo sistema coincide col detto sistema sezione.

Se nel detto gruppo base vi sono punti base, in generale bisogna ancora crescere $n+k$ perchè la sezione sia un sistema completo e regolare (analogamente a ciò che si è detto nel n. 8). Il teorema *c)* è quindi dimostrato.

14. — Passiamo ora a dimostrare il teorema *a)*. Anche qui si procede in modo analogo a quello tenuto nel n. 9.

Dette ρ_n, ρ_{n-1} le dimensioni (effettive) di due sistemi lineari completi (rispetto allo stesso gruppo base) $|\Phi^{n-1}|$, $|\Phi^n|$, ed r_n, σ_n, δ_n, rispettivamente dimensione, sovrabbondanza e deficienza del gruppo base del sistema sezione di $|\Phi^n|$ con un iperpiano generico ω (σ_n avendo significato per il teorema *a)* già ammesso in S_{r-1}), dalla

$$\rho_n - \rho_{n-1} = r_n + 1$$

si trae (sostituito $r-1$ al posto di r nella (12), valida appunto in S_{r-1})

$$\rho_n - \rho_{n-1} = \binom{n+r-1}{r-1} - \sum_{i=0}^{i=r-3} k_i \binom{n+r-i-3}{r-i-3} + \sigma_n - \delta_n ,$$

ove le k_i sono le costanti relative al gruppo base sezione del dato coll'iperpiano ω e quindi non dipendono affatto dai punti base di $|\Phi^n|$ [1]. Aggiungendo alla precedente le altre che se ne ottengono col dare ad n i valori $n+1$, $n+2$,..., $n+m$, si ha:

$$\rho_{n+m} - \rho_{n-1} = \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+1+r-1}{r-1} + \dots + \binom{n+m+r-1}{r-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{i=r-3} k_i \left[\binom{n+r-3-i}{r-3-i} + \binom{n+1+r-3-i}{r-3-i} + \dots + \binom{n+m+r-3-i}{r-3-i} \right] +$$

$$+ \sum_{i=n}^{i=n+m} \sigma_i - \sum_{i=n}^{i=n+m} \delta_i$$

ossia (per la formula in nota al n. 9):

$$(13)\quad \rho_{n+m} - \rho_{n-1} = \binom{n+m+r}{r} - \binom{n+r-1}{r} - \sum_{i=0}^{i=r-3} k_i \left[\binom{n+m+r-i-2}{r-i-2} - \right.$$

$$\left. - \binom{n+r-i-3}{r-i-2} \right] + \sum_{i=n}^{i=n+m} \sigma_i - \sum_{i=n}^{i=n+m} \delta_i .$$

Per $n \geq l$ il sistema $|\Phi^n|$ seghi sopra un iperpiano generico un sistema completo e regolare (n. 13). Allora, dalla precedente, fatto $n=l$ e posto

$$(14)\qquad k_{r-2} = \binom{l+r-1}{r} - \sum_{i=0}^{i=r-3} k_i \binom{l+r-i-3}{r-i-2} - \rho_{l-1} - 1 ,$$

(onde k_{r-2}, contenendo l, dipende anche dai punti base) si ricava

$$\rho_{l+m} = \binom{l+m+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{l+m+r-i-2}{r-i-2}.$$

---

[1]) Queste k_i essendo poi quelle che compaiono anche nella formula finale (15), resta così provata l'affermazione che segue l'enunciato del teorema *a)*.

Adunque si ha

$$(15)\qquad \rho_n = \binom{n+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{n+r-i-2}{r-i-2}, \text{ per } n \geq l-1$$

(giacchè, per $n=l-1$, questa diviene la (14)), che è la formola (11) da dimostrare.

Per i valori di n inferiori ad $l-1$ si trova subito la differenza fra la dimensione effettiva ρ_n e la virtuale ρ'_n (n. 12) del sistema lineare $|\Phi_n|$. Basta porre nella (13) $n+m=l$, tener conto della (14) e poi sostituire $n+1$ ad n: si ottiene

$$\rho_n = \binom{n+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{n+r-i-2}{r-i-2} + \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \delta_i - \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \sigma_i =$$

$$= \rho'_n + \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \delta_i - \sum_{i=n+1}^{i=l-1} \sigma_i\,, \quad \text{per} \quad n < l-1\,;$$

sulla quale si possono ripetere le osservazioni del n. 10.

15. — Dimostriamo da ultimo il teorema *b)* con procedimento pure conforme a quello del n. 11.

Essendo n sufficientemente alto, per il teorema *a)*, i sistemi completi $|\Phi^n|$, $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|$ sono regolari e quindi, dette ρ_n, ρ_{n+1}, ρ_{n+2} le rispettive dimensioni, si ha

$$(16)\qquad \begin{cases} \rho_n = \binom{n+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{n+r-i-2}{r-i-2} \\ \rho_{n+1} = \binom{n+1+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{n+r-i-1}{r-i-2} \\ \rho_{n+2} = \binom{n+2+r}{r} - 1 - \sum_{i=0}^{i=r-2} k_i \binom{n+r-i}{r-i-2}: \end{cases}$$

Se $|\Phi_1^{n+2}|$ è il sistema lineare di minima dimensione che contiene ogni Φ^{n+1} insieme ad ogni iperpiano ed è ρ'_{n+2} la sua dimensione, si ha $\rho_{n+2} \geq \rho'_{n+2}$. Prendiamo in S_r due generici S_{r-1}, che si seghino secondo S_{r-2}, e consideriamo i due sistemi lineari che si ottengono aggiungendo rispettivamente ad ogni Φ^{n+1} quei due S_{r-1}. Il sistema di appartenenza dei due sistemi avrà la dimensione $2\rho_{n+1}-\rho_n$ e sarà certo contenuto nel sistema delle Φ_1^{n+2} che passano per l'S_{r-2}. Qual è la dimensione di quest'ultimo sistema? Per il corollario di *c)*, (sempre supposto *n* abbastanza elevato) il sistema, che indicheremo con $|\varphi^{n+1}|$, segato su S_{r-2} da $|\Phi^{n+1}|$ è completo e regolare ed inoltre, per il teorema *b)* ammesso nell'S_{r-2}, è pure completo e regolare il sistema minimo che contiene ogni φ^{n+1} in unione ad ogni S_{r-3} di S_{r-2}. Ma $|\Phi_1^{n+2}|$ sega su S_{r-2} un sistema contenente ogni φ^{n+1} insieme ad ogni S_{r-3}: dunque il sistema segato da $|\Phi_1^{n+2}|$ sopra S_{r-2} è il sistema completo e regolare $|\varphi^{n+2}|$ (che ha lo stesso gruppo base di $|\varphi^{n+1}|$ e che è pure segato da $|\Phi^{n+2}|$).

La dimensione di questo sistema $|\varphi^{n+2}|$ è, per il teorema *a)*,

$$\binom{n+r}{r-2}-1-\sum_{i=0}^{i=r-4} k_i\binom{n+r-i-2}{r-i-4}$$

ove (cfr. nota al n. 14) le $k_0, k_1, \ldots, k_{r-4}$ sono le medesime di quelle che compaiono nelle (16): e quindi la dimensione cercata sarà (n. 17, Cap. 10.°) la differenza fra $\rho'_{n+2}-1$ e questo numero. Si avrà adunque

$$\rho'_{n+2}-\binom{n+r}{r-2}+\sum_{i=0}^{i=r-4} k_i\binom{n+r-i-2}{r-i-4}\geq 2\rho_{n+1}-\rho_n\,.$$

donde, per le due prime delle (16),

$$\rho'_{n+2}\geq 2\binom{n+1+r}{r}-\binom{n+r}{r}+\binom{n+r}{r-2}-1-$$
$$-\sum_{i=0}^{i=r-2} k_i\left[2\binom{n+r-i-1}{r-i-2}-\binom{n+r-i-2}{r-i-2}+\binom{n+r-i-2}{r-i-4}\right]$$

ovvero (per la formula in nota al n. 11)

$$\rho'_{n+2}\geq\binom{n+r+2}{r}-1-\sum_{i=0}^{i=r-2} k_i\binom{n+r-i}{r-i-2}$$

cioè, per la terza delle (16), $\rho'_{n+2}\geq\rho_{n+2}$ e per conseguenza (ricordando che $\rho'_{n+2}\leq\rho_{n+2}$) si ha $\rho'_{n+2}=\rho_{n+2}$. Quindi i sistemi $|\Phi^{n+2}|$, $|\Phi_1^{n+2}|$ coincidono. Ed ora, ragionando nel solito modo (n. 7), si conclude il teorema *b)*.

16. — Dell'argomento trattato si vuole ora esaminare un caso particolare rimarchevole, cioè la postulazione di una varietà di S_r, ad $r-h$ dimensioni, Φ_{r-h} nelle ipotesi seguenti: 1.° *che* Φ_{r-h} *sia l'intersezione di*

h ($\leq r$) *ipersuperficie* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *di ordini qualunque* $n_1, n_2, \ldots, n_h$ [1]); 2.° *che* Φ_{r-h} *(irriducibile o no) non contenga alcuna parte* [2]) *multipla, pur potendo possedere singolarità qualsiansi (costituenti varietà di dimensione* $<r-h$).

Questa questione si collega con un'altra pure assai importante. Ma prima, ad evitare inutili ripetizioni, notiamo che, dalle ipotesi fatte, segue che $h'<h$ delle date ipersuperficie $F_1, F_2, \ldots, F_h$ si tagliano in una varietà di dimensione $r-h'$ e senza parti multiple, altrimenti le rimanenti $h-h'$ ipersuperficie segherebbero questa in una varietà di dimensione $>r-h$ o avente parti multiple: e segue pure che, tagliando $h'\leq h$ di dette ipersuperficie con un S_k generico, si ottengono in questo h' ipersuperficie segantisi in una varietà di dimensione $k-h'$ e senza parti multiple, altrimenti si contraddirebbe di nuovo alle ipotesi stabilite.

17. — Le forme $F_1, F_2, \ldots, F_h$ determinano ciò che per brevità diremo *modulo* (in senso più ristretto di Kronecker e di Hilbert) e che indicheremo con $(F_1\ F_2 \ldots F_h)$, cioè la totalità di tutte le forme F rappresentabili con combinazioni lineari di quelle, ossia date dalla

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h, \tag{17}$$ [3])

essendo $A_1, A_2, \ldots, A_h$ forme di ordini convenienti ($n-n_1, n-n_2, \ldots, n-n_h$ se n è l'ordine di F). La varietà Φ_{r-h} si chiamerà *varietà base* del modulo.

Or bene, l'altra questione, a cui si è accennato nel n. precedente, è di ricercare la condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma F appartenga al modulo $(F_1\ F_2 \ldots F_h)$, cioè affinchè l'equazione $F=0$ di una ipersuperficie si possa scrivere nella forma $A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_hF_h = 0$, o, come diremo, corrisponda ad una forma F data dalla (17).

Dimostreremo insieme i due seguenti teoremi:

---

[1]) Per non moltiplicare i simboli indicheremo con F una ipersuperficie di S_r ed anche la forma ad $r+1$ variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$, che è il primo membro della sua equazione (onde si dirà indifferentemente la superficie F o la superficie $F=0$): avvertendo però che mentre ad una forma corrisponde una sola ipersuperficie, viceversa ad una ipersuperficie corrispondono infinite forme che differiscono fra loro per fattori costanti.

[2]) Si ricordi, anche per il seguito, che *parte* di varietà (riducibile) significa una varietà *di egual dimensione*, che entri a comporre quella.

[3]) Come si suole e come già si è fatto anche altrove, col segno $\equiv$ si indica identità.

1.° *Se h ipersuperficie $F_1, F_2, \dots, F_h$ ($h \leq r$) si tagliano in una varietà Φ_{r-h} di dimensione $r-h$, priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie corrisponda ad una forma F data dalla* (17) *è che l'ipersuperficie passi per Φ_{r-h}.* Se F è rappresentabile nella forma (17) è ovvio che $F=0$ passa per Φ_{r-h}. Basterà adunque dimostrare che: *a) Se $F=0$ passa per Φ_{r-h} la F è rappresentabile nella forma* (17).

2.° *La postulazione di una varietà Φ_{r-h}, senza parti multiple, intersezione di h ipersuperficie $F_1, F_2, \dots, F_h$ degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_h$ rispetto ad una ipersuperficie F d'ordine n qualsiasi è*

$$(18) \qquad \binom{n+r}{r} - \sum\binom{n-n_{i_1}+r}{r} + \sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}+r}{r} + \dots +$$

$$+ (-1)^{h-1}\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}-\dots-n_{i_{h-1}}+r}{r} + (-1)^h\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_h+r}{r};$$

ove per i_1, $i_1 i_2$, ..., $i_1 i_2 \dots i_{h-1}$ si devono porre tutte le combinazioni ad uno ad uno, a due a due, ..., ad $h-1$ ad $h-1$ dei numeri $1, 2, \dots, h$; ed ove inoltre si deve porre zero per ogni simbolo combinatorio nel quale il numero superiore è $< r$. Notisi bene che l'indicata postulazione vale per *qualsiasi ordine n*, a differenza del caso generale (n. 12), per il quale si richiede che l'ordine n sia superiore ad un certo limite. Questo 2.° teorema sarà dimostrato se si proverà che: *b) Il sistema lineare di ipersuperficie*

$$(19) \qquad A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_h F_h = 0,$$

di cui è dato comunque l'ordine n e di cui sono parametri variabili i coefficienti delle forme $A_1, A_2, \dots, A_h$ (degli ordini $n-n_1, n-n_2, \dots, n-n_h$) ha la dimensione

$$(20) \qquad \sum\binom{n-n_{i_1}+r}{r} - \sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}+r}{r} + \dots +$$

$$+ (-1)^{h-2}\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}-\dots-n_{i_{h-1}}+r}{r} + (-1)^{h-1}\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_h+r}{r} - 1:$$

giacchè, per il teorema 1.°, il sistema (19) dà tutte e sole le ipersuperficie che passano per Φ_{r-h}; e quindi il numero delle condizioni indipendenti che questa presenta ad una ipersuperficie di ordine n che debba contenerla, cioè la sua postulazione rispetto alla ipersuperficie stessa, si ottiene sottraendo il numero (20) da $\binom{n+r}{r}-1$.

18. — La dimostrazione delle due proposizioni antecedenti *a)*, *b)* si farà simultaneamente per via induttiva. Si osservi cioè che le due proposizioni sussistono quando $h=1$: perciò le avremo dimostrate in ogni caso, quando, ammettendole vere per $h-1$ ipersuperficie, riusciremo a provarle per h.

Occupiamoci dapprima della proposizione *b)*. Per dimostrarla si applicherà la formula (6) del Cap. 1.° (cfr. anche n. 2, Cap. 10.°), agli h sistemi lineari $A_1 F_1=0, A_2 F_2=0, \ldots, A_h F_h=0$ appartenenti al sistema (19) [1]. Per chiarezza ammettiamo dapprima che esistano i sistemi lineari d'intersezione di questi a due a due, a tre a tre, ... Due, ad es., $A_1 F_1=0$, $A_2 F_2=0$ s'intersecano nel sistema $X F_1 F_2=0$, ove X indica una forma a coefficienti variabili di ordine $n-n_1-n_2$; giacchè per ogni ipersuperficie comune deve aversi $A_1 F_1 \equiv A_2 F_2$ e quindi, poichè le forme F_1, F_2 sono prive di fattori comuni cioè prime fra loro (per l'osservazione del n. 16, fattovi $h'=2$), deve essere F_1 divisore di A_2 ed insieme F_2 di A_1 (onde $A_1=F_2 X$, $A_2=F_1 X$). L'intersezione di tre sistemi $A_1 F_1=0, A_2 F_2=0$, $A_3 F_3=0$ si troverà cercando l'intersezione del sistema $X F_1 F_2=0$ (ad es.), intersezione dei due primi, col terzo $A_3 F_3=0$. Dovrà essere $A_3 F_3 \equiv X F_1 F_2$, onde la forma F_3 che è prima col prodotto $F_1 F_2$ dovrà dividere X e però l'intersezione cercata sarà il sistema lineare $Y F_1 F_2 F_3=0$, ove Y indica una forma a coefficienti variabili di ordine $n-n_1-n_2-n_3$. Analogamente i quattro sistemi $A_1 F_1=0$, $A_2 F_2=0$, $A_3 F_3=0$, $A_4 F_4=0$, s'intersecano nel sistema $Z F_1 F_2 F_3 F_4=0$ (Z di ordine $n-n_1-n_2-n_3-n_4$): ecc.. Adunque le dimensioni degli h sistemi considerati, delle loro intersezioni a due a due, a tre a tre, ... ad $h-1$ ad $h-1$ e della intersezione di

---

[1] Si noti, anche per il seguito, che due (o più) sistemi lineari di ipersuperficie dello stesso ordine $\Sigma\lambda_i f_i=0$, $\Sigma\mu_k \varphi_k=0$ (λ_i, μ_k parametri) appartengono al sistema $\Sigma\lambda_i f_i+\Sigma\mu_k \varphi_k=0$, perchè ogni sistema congiungente quei due sistemi deve contenere ogni ipersuperficie dell'uno ed ogni ipersuperficie dell'altro, e quindi ogni ipersuperficie del fascio formato con queste, cioè ogni ipersuperficie del terzo sistema (qualsiansi le λ_i, μ_k). Questa osservazione del resto è in sostanza contenuta nel n. 7 del Cap. 1.°.

tutti gli h sistemi sono rispettivamente

$$(21)\quad \binom{n-n_{i_1}+r}{r}-1\,,\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}+r}{r}-1\,,\ldots,\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}-\ldots-n_{i_{h-1}}+r}{r}-1\,,$$

$$\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_h+r}{r}-1 \qquad (i_1\,,i_2\,,\ldots,i_{h-1}=1\,,2\,,\ldots,h)\,.$$

Verifichiamo ora, come occorre per l'applicazione della surricordata formula, le condizioni di *regolarità* (n. 19, Cap. 1.°). Un sistema qualunque $A_3F_3=0$ sega (ad es.) i due sistemi $A_1F_1=0$, $A_2F_2=0$ in $XF_1F_3=0$, $X'F_2F_3=0$ che appartengono al sistema $XF_1F_3+X'F_2F_3=0$. D'altra parte $A_3F_3=0$ sega il sistema $A_1F_1+A_2F_2=0$ a cui appartengono i due considerati in un sistema che si ottiene dall'identità $A_3F_3\equiv A_1F_1+A_2F_2$, la quale, non potendo $F_3=0$ passare per l'intersezione di $F_1=0$ $F_2=0$ nè per una sua parte (n. 16), mostra che $A_3=0$ passa per questa intersezione e quindi (per il teorema *a)* ammesso per $h-1$ forme) $A_3\equiv XF_1+X'F_2$: cosicchè il detto sistema d'intersezione di $A_3F_3=0$ e di $A_1F_1+A_2F_2=0$ è lo stesso $XF_1F_3+X'F_2F_3=0$ di prima. Adunque uno qualunque degli h sistemi è in posizione regolare rispetto a due (e in modo analogo a più) dei rimanenti. Similmente si verificano le altre condizioni di regolarità: anzi le dimostrazioni si riducono alle stesse ora dette soppressi fattori comuni. Ad es., $XF_3F_4=0$ è in posizione regolare rispetto ad $X'F_1F_4=0$, $X''F_2F_4=0$, perchè i sistemi in cui li sega appartengono al sistema $YF_1F_3F_4+Y'F_2F_3F_4=0$, mentre $XF_3F_4=0$ sega $X'F_1F_4+X''F_2F_4=0$ in un sistema proveniente dall'identità $XF_3F_4\equiv X'F_1F_4+X''F_2F_4$, il che dà (come prima) $X=YF_1+Y'F_2$: e però ecc..

Quando non esistono tutte le intersezioni di cui si è discorso, cioè si ha $n<n_1+n_2+\ldots+n_h$, le condizioni di regolarità per quelle che non esistono sono soddisfatte per sè, mentre per le altre vale la dimostrazione precedente (cfr. n. 20, Cap. 1.°). Possiamo adunque applicare la (6) del Cap. 1.° per qualunque valore di n, purchè per le dimensioni (21) dei sistemi lineari che non esistono si ponga -1, ovvero nelle espressioni (21) si ponga zero per ogni simbolo combinatorio nel quale il numero superiore è $<r$. Abbiamo così che la cercata dimensione del sistema lineare (19) è, con questa convenzione,

$$\sum\binom{n-n_{i_1}+r}{r}-\binom{h}{1}-\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}+r}{r}+\binom{h}{2}+\ldots+$$

$$+(-1)^{h-2}\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}-\ldots-n_{i_{h-1}}+r}{r}-(-1)^{h-2}\binom{h}{h-1}+$$

$$+(-1)^{h-1}\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_h+r}{r}-(-1)^{h-1},$$

donde segue subito la (20), che si voleva dimostrare.

19. — Ed ora si arriva a stabilire la proposizione *a)* coll'aiuto del seguente lemma [1]) — *Se una ipersuperficie* $F=0$ *insieme ad un iperpiano che tagli* Φ_{r-h} *in una* Φ_{r-h-1} *senza parti multiple (ad es. un iperpiano generico, per il n. 16) corrisponde ad una forma appartenente al modulo* $(F_1 F_2 \ldots F_h)$, *anche la forma* F *appartiene a questo modulo.*

Premesso che valgono tali e quali le osservazioni del n. 16 applicate alle sezioni delle $F_1=0,\ldots, F_h=0$ coll'iperpiano, si ha intanto, per l'ipotesi, supposto che questo iperpiano sia $x_0=0$, l'identità

$$x_0 F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_h F_h. \tag{22}$$

Se A_1 (ad es.) ammettesse il fattore x_0, cioè fosse $A_1 \equiv x_0 A'_1$, basterebbe osservare, per giungere al teorema, che, per la (22), l'ipersuperficie $F-A'_1F_1=0$ passa per la Φ_{r-h+1} priva di parti multiple (perchè tale è la Φ_{r-h}), intersezione delle $F_2=0$, $F_3=0$, ..., $F_h=0$ (non potendo, per l'ipotesi, $x_0=0$ passare per essa o per una sua parte), e quindi la forma $F-A'_1F_1$ appartiene al modulo $(F_2F_3\ldots F_h)$ in virtù della proposizione *a)* supposta vera per $h-1$ forme. Sicchè possiamo ritenere che nessuna delle A_i ammetta il fattore x_0. Non può essere poi che alcuna delle F_i abbia questo fattore, altrimenti la sezione di Φ_{r-h} con $x_0=0$ non sarebbe una Φ_{r-h-1}. Facendo quindi nella (22) $x_0=0$, si ottiene

$$A_1(0x_1\ldots x_r)\,F_1(0x_1\ldots x_r)+\ldots+A_h(0x_1\ldots x_r)\,F_h(0x_1\ldots x_r)\equiv 0$$

e si trova che l'ipersuperficie (di $x_0=0$) $A_1(0x_1\ldots x_r)F(0x_1\ldots x_r)=0$ (ad es.) passa per la varietà comune alle $F_2(0x_1\ldots x_r)=0,\ldots, F_h(0x_1\ldots x_r)=0$

---

[1]) Questo lemma è caso particolare di una proposizione assai più generale. Cfr. il n. 4 della recente Nota di SEVERI, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* (Atti dell'Acc. di Torino, 41, 1905).

sezioni delle $F_2=0,\dots,F_h=0$ con $x_0=0$: la quale varietà comune deve essere una Φ^*_{r-h} senza parti multiple (n. 16). Siccome la $F_1(0x_1\dots x_r)=0$, sezione di $F_1=0$ con $x_0=0$, non passa per questa Φ^*_{r-h}, nè per alcuna sua parte, perchè, di nuovo, nel caso contrario, $x_0=0$ segherebbe Φ_{r-h} in una varietà di dimensione maggiore di $r-h-1$, per la proposizione *a)* ammessa per $h-1$ forme, dovrà essere

$$A_1(0x_1\dots x_r)\equiv B_2(x_1\dots x_r)F_2(0x_1\dots x_r)+\dots+B_h(x_1\dots x_r)F_h(0x_1\dots x_r).$$

Questa (esprimendo che il resto di una divisione per x_0 è zero, qualsiansi $x_1, x_2,\dots,x_r$) conduce alla

$$A_1(x_0x_1\dots x_r)\equiv B_2(x_1\dots x_r)F_2(x_0x_1\dots x_r)+\dots+B_h(x_1\dots x_r)F_h(x_0x_1\dots x_r)+x_0A'_1(x_0x_1\dots x_r)$$

e, confrontando colla (22),

$$x_0F\equiv x_0A'_1F_1+(A_2+B_2F_1)F_2+\dots+(A_h+B_hF_1)F_h;$$

la quale dimostra, collo stesso ragionamento fatto sopra, che la forma $F-A'_1F_1$ appartiene al modulo $(F_2F_3\dots F_h)$. Quindi si ha

$$F\equiv A'_1F_1+A'_2F_2+\dots+A'_hF_h$$

che prova il lemma enunciato.

20. — Cominciamo dal dimostrare la proposizione *a)* nel caso $h=r$, nel quale le ipersuperficie $F_1=0, F_2=0,\dots,F_h=0$ si tagliano in $n_1n_2\dots n_h$ punti tutti distinti (n. 16). Questi punti rappresentano certamente $n_1n_2\dots n_h$ condizioni indipendenti per una ipersuperficie di ordine n obbligata a contenerli quando n abbia un valore opportunamente grande ($\geq n_1n_2\dots n_h-1$ per la nota del n. 4); cioè le ipersuperficie di questo ordine, passanti per i detti punti, formano un sistema lineare di dimensione $\binom{n+h}{h}-1-n_1n_2\dots n_h$.

Ma è facile vedere che questa, per un valore pure opportunatamente grande di n ($\geq n_1+n_2+\dots+n_h$ per il n. 18), è anche la dimensione (20) del sistema lineare (19), di cui le ipersuperficie passano per gli stessi punti, cioè che, per un tale valore di n, si ha la postulazione (18)

$$(22)\qquad \binom{n+h}{h}-\sum\binom{n-n_{i_1}+h}{h}+\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}+h}{h}-\dots+$$

$$+(-1)^{h-1}\sum\binom{n-n_{i_1}-n_{i_2}-\dots-n_{i_{h-1}}+h}{h}+(-1)^h\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_h+h}{h}$$

eguale ad $n_1 n_2 \dots n_h$ [1]). In vero la (22) è funzione intera di grado h nelle $n_1, n_2, \dots, n_h$, la quale riducesi a zero per $n_1 = 0$ (e analogamente per $n_2 = 0, \dots, n_h = 0$), poichè i termini si elidono manifestamente a due a due, ed è quindi eguale a $C n_1 n_2 \dots n_h$, essendo C indipendente dalle $n_1, n_2, \dots, n_h$: e si trova poi $C = 1$, notando che nella (22) il prodotto $n_1 n_2 \dots n_h$ è dato soltanto dall'ultimo termine e che vi compare col coefficiente 1. Si conclude che, se n è opportunamente grande, il sistema lineare (19) coincide col sistema lineare delle ipersuperficie passanti per gli $n_1 n_2 \dots n_h$ punti comuni alle $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots, F_h = 0$, e però che una ipersuperficie $F = 0$ per questi punti e di quell'ordine è rappresentabile nella forma (19).

Se ora, mantenendo per n il detto valore, si prende una ipersuperficie F di ordine $n - 1$ passante per i detti $n_1 n_2 \dots n_h$ punti e si associa ad un iperpiano generico, si ha una ipersuperficie di ordine n rappresentabile, per ciò che si è dimostrato, nella forma (19): ma allora, per il lemma del n. 19, con una equazione di questa forma sarà pur rappresentabile la F isolata. Similmente dalle ipersuperficie di ordine $n - 1$ si passa a quelle di ordine $n - 2$: ecc.. La proposizione *a)* resta così dimostrata per $r = h$.

21. — Sia ora $h = r - k$ $(k \geq 1)$. Applicheremo un nuovo processo d'induzione, mediante il quale potremo ricavare il caso presente da quello considerato avanti. Supporremo cioè che la proposizione *a)* sia vera quando il modulo contiene h forme ad r variabili $(h < r)$ e dimostreremo che allora la proposizione è pur vera quando il modulo contiene h forme ad $r + 1$ variabili. Siccome la proposizione fu dimostrata se il modulo era di h forme ad $h + 1$ variabili, ne seguirà che è vera se il modulo è di h forme ad $h + 2$ variabili, ed allora se è di h forme ad $h + 3$ variabili..., ed infine se è di h forme ad $h + k + 1 = r + 1$ variabili, ossia in S_r.

Adunque l'ipersuperficie $F = 0$, di ordine n, passi per la Φ_{r-h} intersezione delle ipersuperficie $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_h = 0$ (ad $r + 1$ variabili $x_0, x_1, \dots, x_r$). Segando con un iperpiano, ad es. $x_0 = 0$, così che la sezione della Φ_{r-h} sia una Φ_{r-h-1} senza parti multiple, in forza della proposizione ammessa per r variabili, dovrà essere

$$F(0 x_1 \dots x_r) \equiv A_1(x_1 \dots x_r) F_1(0 x_1 \dots x_r) + \dots + A_h(x_1 \dots x_r) F_h(0 x_1 \dots x_r)$$

---

[1]) Per un valore di n inferiore al detto limite la dimostrazione seguente non è più valida per le convenzioni introdotte nel n. 18.

donde

$$F(x_0 x_1 \dots x_r) \equiv A_1(x_1 \dots x_r) F_1(x_0 x_1 \dots x_r) + \dots + A_h(x_1 \dots x_r) F_h(x_0 x_1 \dots x_r) + \\ + x_0 F'(x_0 x_1 \dots x_r)$$

la quale mostra che la ipersuperficie $F' = 0$ di ordine $n-1$ passa per Φ_{r-h}. Se n è uguale all'ordine minimo, che diremo α, delle ipersuperficie passanti per Φ_{r-h}, deve essere $F' \equiv 0$, e l'ultima relazione prova la proposizione. Se poi $n = \alpha + q$ $(q \geq 1)$, ragionando su F' come si è ragionato su F e seguitando, avremo una successione di forme $F, F', F'', \dots$, degli ordini $n, n-1, n-2, \dots$, le cui ipersuperficie corrispondenti passano per Φ_{r-h}. Dicasi $F^{(i)}$ l'ultima di esse non identicamente nulla: al più $i = q$, giacchè la forma $F^{(q+1)}$, essendo di ordine $\alpha - 1$, deve essere identicamente nulla. Ne viene che $F^{(i)}$ appartiene al modulo delle $F_1, F_2, \dots, F_h$ ed allora anche $F^{(i-1)}$ e così via, fino ad F: come si voleva dimostrare [1]).

[1]) Il procedimento esposto è dovuto a SEVERI. Veggasi la sua Nota: *Rappresentazione di una forma qualunque ...* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 11 (5), 1902). Avvertasi soltanto che il teorema *b*), ottenuto qui immediatamente coll'applicazione della formula (6) del Cap. 1.°, fu dal Severi dimostrato dapprima per n abbastanza elevato in quella Nota, e poi per n qualunque nell'altra Nota: *Su alcune questioni di postulazione* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, 17, 1902). Si deve anche menzionare la Nota, *A proof of Noether's fundamental Theorem* (Math. Ann., 52, 1899) della sig.^na SCOTT, in qualche punto affine al suddetto procedimento.

E qui rimandiamo il lettore alla Nota di Severi, citata nella nota al n. 19, nella quale sono notevolmente estese le cose esposte sopra (in seguito a risultati algebrici del LASKER) e, fra altre proprietà, è dimostrato il seguente teorema di KOENIG (pag. 398 del libro citato nella nota [2]) al n. 2, Cap. 9.°): — *Se, in* S_r, $F_1 = 0, \dots, F_r = 0$ *hanno soltanto* δ *punti multipli comuni colle rispettive multiplicità* $\rho_1^{(i)}, \dots, \rho_r^{(i)} (i = 1, \dots, \delta)$ *ed ivi presentano il caso semplice* (n. 16, Cap. 8.°), *condizione sufficiente perchè sia* $F = A_1 F_1 + \dots + A_r F_r$ *è che* $F = 0$ *abbia in quei punti multiplicità* $\rho_1^{(i)} + \dots + \rho_r^{(i)} - r + 1$. Il qual teorema è, nel caso $r = 2$, un celebre teorema di Noether (per la bibliografia relativa a quest'ultimo, cfr. BRILL e NOETHER, *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neurer Zeit* (Berlin, 1893), pag. 350 e seg.; e cfr. anche il citato lavoro della sig.^na SCOTT). Ulteriori estensioni del teorema di Noether dànno TORELLI nella Nota: *Sopra certe estensioni del teorema di Noether* (Atti della R. Accad. di Torino, 41, 1905), e G. Z. GIAMBELLI nella Nota: *Alcune estensioni ...* (ivi).

Capitolo 12.°

Curve razionali.

1. — Le coordinate di un punto x sieno funzioni razionali, intere (prime fra loro) di un parametro λ,

$$(1) \qquad x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Ad ogni valore di λ corrisponde un punto x, ed al variare di λ si ottiene una curva, le cui equazioni nascerebbero dalle precedenti eliminando il parametro. Se, viceversa, ad un punto generico x della curva corrisponde un solo valore di λ, cioè vi è corrispondenza biunivoca fra i punti della curva ed i valori del parametro la curva è razionale (n. 17, Cap. 9.°). Ma ciò si può ancora affermare se ad un punto generico x della curva corrispondono n (>1) valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ del parametro λ? La risposta è affermativa [1]), come ora mostreremo: onde seguirà che *curva razionale è ogni curva le cui coordinate sono funzioni razionali intere di un parametro.*

Basterà provare che si può trasformare razionalmente il parametro λ in un nuovo parametro μ, per il quale si abbia la corrispondenza biunivoca. Ciò si ottiene subito osservando che i gruppi di numeri $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$, corrispondendo biunivocamente ed algebricamente ai punti x della curva, costituiscono, come questi, una totalità algebrica ed anzi un'involuzione ∞^1, perchè ogni numero del gruppo individua x e quindi gli altri numeri del gruppo. Adunque i nominati gruppi saranno dati (n. 5, Cap. 10.°) da un'equazione della forma $\varphi - \mu\psi = 0$ (ove φ, ψ sono funzioni razionali

[1]) Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (Math. Ann., 9, 1876).

intere di grado n in λ); la quale appunto dà la richiesta trasformazione razionale

$$\mu = \frac{\varphi}{\psi}. \tag{2}$$

Per questa è chiaro infatti che si corrispondono i punti x della curva ed i valori del nuovo parametro μ biunivocamente, onde è dimostrato quanto volevasi.

Le coordinate x_i di un punto della curva si potranno quindi esprimere in funzioni razionali, intere, prime fra loro, del parametro μ

$$x_i = \theta_i(\mu) \qquad (i = 0, 1, \dots, r). \tag{3}$$

Il grado massimo m delle θ_i (o, introducendo l'omogeneità nel parametro, il loro grado comune) è l'ordine della curva, perchè, sostituendo le (3) nella equazione di un iperpiano generico, si ha un'equazione del grado m che dà i valori del parametro μ corrispondenti biunivocamente alle intersezioni dell'iperpiano colla curva. Invece, dicendo m' il grado massimo delle f_i nelle (1), colla stessa considerazione, corrispondendo adesso ad ogni punto d'intersezione n valori di λ, si ha $m' = nm$.

2. — Per trovare effettivamente la sostituzione (2), si può, come si disse nel n. 5 del Cap. 10.°, (ove si adottarono altre notazioni), prendere due (certo esistenti) delle r funzioni f_i così che il loro rapporto prenda lo stesso valore solo per gli n valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ma si può procedere in altro modo, che ora esporremo, e che fornisce anche un mezzo per giudicare, date le (1), se avvenga il caso considerato e quale sia il valore di n. Consideriamo l'involuzione dei gruppi $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$ come una corrispondenza simmetrica fra due parametri λ, λ_1 (n. 1, Cap. 10.°). L'equazione della corrispondenza moltiplicata per $\lambda - \lambda_1$ sia $\Omega(\lambda\lambda_1) = 0$, dell'ordine n tanto in λ quanto in λ_1,. Siccome questa è soddisfatta se per λ si pongono gli n valori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la funzione $\Omega(\lambda\lambda_1)$ è divisibile per le differenze $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n$, cioè, a meno di un fattore indipendente da λ (per essere Ω di grado n in λ), si ha

$$\Omega(\lambda\lambda_1) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Prendansi ora le funzioni

$$f_i(\lambda) f_j(\lambda_1) - f_j(\lambda) f_i(\lambda_1) \qquad (i \neq j; i, j = 0, 1, \dots, r). \tag{4}$$

Queste, in virtù dell'ipotesi fatta sulle (1), si annullano simultaneamente per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e non per altri valori, altrimenti per più di n valori del parametro λ i rapporti $\frac{f_i(\lambda)}{f_j(\lambda)}$ prenderebbero lo stesso valore, cioè si avrebbe un medesimo punto x della curva. Nè può darsi che esse ammettano uno dei valori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ come radice multipla, perchè se si avesse

$$[f'_i(\lambda) f_j(\lambda_1) - f'_j(\lambda) f_i(\lambda_1)]_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\left[\frac{f'_i(\lambda) f_j(\lambda_1) - f'_j(\lambda) f_i(\lambda_1)}{f_j(\lambda)^2}\right]_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

ossia

$$\left[\frac{d}{d\lambda} \frac{f_i(\lambda)}{f_j(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_1} = 0,$$

si avrebbe (λ_1 essendo variabile come λ)

$$\frac{f_i(\lambda)}{f_j(\lambda)} = \text{cost.},$$

contrariamente al supposto che le f_i sieno prime fra loro (del resto, sussistendo le precedenti, la curva si ridurrebbe ad un punto). Ne deduciamo che il prodotto $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$ è il massimo comun divisore delle (4) e quindi per ottenere $\Omega(\lambda \lambda_1)$ basta costruire questo massimo comun divisore [1]. Ciò fatto, si può avere subito la sostituzione (2) ordinando $\Omega(\lambda \lambda_1)$ in λ_1 (ad es.), osservando che i rapporti dei suoi coefficienti (di grado $\leq n$ in λ) restano invariati sostituendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a λ, e prendendo per μ uno (certo esistente) di questi rapporti il quale sia variabile con λ (onde uno almeno dei termini di esso sarà di grado n).

Ed ora, per giungere alle (3), rimane solo da notare che $x_i f_j(\lambda) - x_j f_i(\lambda)$, ordinata in λ, deve essere divisibile per $\varphi - \mu\psi$, pure ordinata in λ, essendo amendue nulle per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, quando x_i, x_j sieno le coordinate del punto della curva corrispondente a λ. Eseguendo la di-

[1] Se il massimo comun divisore è lineare in λ e in λ_1, ciò significa che il caso considerato ($n > 1$) non si verifica.

visione ed annullando identicamente il resto della divisione, che sarà lineare nelle x_i, x_j e razionale in μ, si ricava il rapporto $\frac{x_i}{x_j}$ in funzione razionale di μ, come si voleva.

Esempio. Sia

$$x_0 : x_1 : x_2 = (\lambda^2 + 1)^2 : \lambda(\lambda^2 + 1) : \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1.$$

Il massimo comun divisore delle differenze (4) è, nel presente caso, $\lambda\lambda_1^2 - (\lambda^2 + 1)\lambda_1 + \lambda \equiv \Omega(\lambda\lambda_1)$: cosicchè si ha $n = 2$, e si può prendere $\mu = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$. Le espressioni in λ:

$$x_0\lambda(\lambda^2 + 1) - x_1(\lambda^2 + 1)^2$$
$$x_0(\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1) - x_2(\lambda^2 + 1)^2$$

divise per $\lambda\mu - (\lambda^2 + 1)$ dànno rispettivamente per resto

$$\mu(\mu\lambda - 1)(x_1\mu - x_0)$$
$$(\mu\lambda - 1)\{x_0(\mu^2 + 1) - x_2\mu^2\}.$$

Adunque

$$x_0 : x_1 : x_2 = \mu^2 : \mu : \mu^2 + 1;$$

e la curva considerata è una conica (di equazione $(x_2 - x_0)x_0 = x_1^2$).

3. — Vedemmo (n. 6, Cap. 9.°) che per una curva qualunque irriducibile C^n di ordine n appartenente ad uno spazio S_r si ha $r \leq n$ e che, se $r = n$ (n. 10, Cap. 9.°), la curva è normale. Nel caso di $r = n$ aggiungiamo ora che C^r è anche *razionale e priva di punti multipli*. Premesso che $r - 1$ *suoi punti qualunque appartengono ad un* S_{r-2}, altrimenti esisterebbero S_{r-1} aventi più di r punti comuni con C^r, si vede che si verrebbe allo stesso assurdo se C^r possedesse punti multipli. Inoltre un S_{r-1} mobile in un fascio, la cui base S_{r-2} sia $(r-1)$-secante di C^r dà i punti di C^r uno ad uno e però questi corrispondono biunivocamente ed algebricamente ai valori di un parametro (quello del fascio).

4. — Ora si ha il teorema: — *Una curva razionale qualunque* $C^{n'}$ *d'ordine* n' *appartenente ad uno spazio* $S_{r'}$ $(n' \geq r')$ *si può sempre pensare come proiezione di una curva* C^r *di ordine* $r \geq n'$, *appartenente ad uno spazio* S_r (curva razionale normale, per ciò che si è detto avanti) [1].

[1] Siccome deve essere $r > r'$, almeno in una delle due diseguaglianze $r \geq n'$ $n' \geq r'$ deve valere il segno superiore.

In vero le coordinate $x_0, x_1, \dots, x_{r'}$ di un punto variabile di $C^{n'}$ sieno date dalle formule

$$x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \dots, r'),$$

le $f_i(\lambda)$ essendo razionali intere, prime fra loro e di ordine $\leq n'$ (una almeno di ordine $= n'$). L'ipotesi che la $C^{n'}$ appartiene ad $S_{r'}$ è espressa dal fatto che le dette $r'+1$ funzioni $f_i(\lambda)$ sono linearmente indipendenti (cioè che la matrice dei coefficienti delle potenze di λ nelle funzioni stesse è diversa da zero): giacchè, se ciò non fosse, sussisterebbe, qualsiasi λ, una relazione lineare (o più) fra le $x_0, x_1, \dots, x_{r'}$ e quindi $C^{n'}$ apparterrebbe ad uno spazio subordinato di $S_{r'}$. Segue che si potranno scegliere (in infiniti modi) nuove funzioni, razionali intere in λ, $f_{r'+1}(\lambda)$, $f_{r'+2}(\lambda), \dots$, $f_r(\lambda)$, di cui una almeno di grado r, così che tutte le $r+1$ funzioni $f_0(\lambda)$, $f_1(\lambda), \dots, f_{r'}(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ sieno linearmente indipendenti e prime fra loro. Allora, preso uno spazio S_r passante per $S_{r'}$ ed assunta in esso come piramide fondamentale quella costituita dalla piramide fondamentale di $S_{r'}$ e da altri $r-r'$ punti (indipendenti fra loro e dai vertici di questa), le formule

$$x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

definiscono in S_r una curva (razionale) C^r di ordine r. La sua proiezione fatta dall'$S_{r-r'-1}$ fondamentale opposto ad $S_{r'}$ (individuato dai detti $r-r'$ punti) su questo spazio, è appunto $C^{n'}$ (n. 8, Cap. 2.°). L'$S_{r-r'-1}$ avrà comuni con C^r $r-n'$ punti, come si verifica anche direttamente.

Se l'ordine n' di $C^{n'}$ è $> r'$, prendendo $r = n'$, si trova che $C^{n'}$ è proiezione della curva C^r dello stesso ordine (onde lo spazio $S_{r-r'-1}$ da cui si proietta non avrà punti comuni con C^r). Ne risulta che *le curve di ordine r di S_r sono le sole curve razionali normali.* È adunque la stessa cosa dire curve di ordine r di S_r o curve razionali normali. Da queste curve, per il teorema dimostrato sopra, si può far dipendere lo studio di qualsiasi curva razionale.

5. — Le proprietà delle curve razionali normali sono facili estensioni di quelle note per la coniche di S_2 e per le cubiche (gobbe) di S_3.

Una curva razionale normale C^r ammette una doppia generazione proiettiva (una sola se $r = 2$). Se si considerano infatti r S_{r-2} che sieno suoi $(r-1)$-secanti (Cfr. n. 3), i fasci di S_{r-1} che proiettano da questi S_{r-2} i punti della curva sono proiettivi fra loro (nota al n. 1, Cap. 3.°), ogni punto della curva essendo l'intersezione di r S_{r-1} corrispondenti.

Rappresentiamo gli r fasci proiettivi con equazioni della forma

$$(5) \qquad u_1 + \lambda v_1 = 0 \ , \ u_2 + \lambda v_2 = 0 \ , \ldots , \ u_r + \lambda v_r = 0 \, ,$$

intendendo (come può sempre farsi) che i detti r S_{r-1} corrispondenti si ottengono ponendo in queste equazioni lo stesso valore per λ. Allora le coordinate di un punto qualunque di C^r annullano la matrice (cioè tutti i suoi minori di 2.° ordine)

$$\left| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_r \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{matrix} \right| .$$

Segue che, prese le due stelle proiettive

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_r u_r = 0$$
$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r = 0 \, ,$$

che hanno evidentemente per centri due punti qualunque di C^r e nelle quali gli S_{r-1} corrispondenti sieno dati dai medesimi rapporti dei parametri μ, ogni punto di C^r è comune a due S_1 corrispondenti (che s'incontrino) delle due stelle (Cfr. n. 12 Cap. 7). Dunque *una curva razionale normale di* S_r *può riguardarsi come il luogo delle intersezioni degli iperpiani corrispondenti di* r *fasci di iperpiani proiettivi (aventi per sostegni* S_{r-2} $(r-1)$*-secanti qualsiansi della curva), o come il luogo delle intersezioni degli* S_1 *corrispondenti (che si tagliano) di due stelle proiettive (aventi per centri punti qualunque della curva).*

È manifesto che gli r fasci proiettivi del primo modo di generazione o le due stelle proiettive del secondo modo possono prendersi affatto genericamente. Così, segando due stelle proiettive generiche con un S_{r-1} pure generico, si vede subito che il luogo del punto comune a due S_1 corrispondenti (che s'incontrano) è una curva di ordine r. Se ne trae che *per* $r+3$ *punti dello spazio* S_r, *dei quali* $r+1$ *non sieno mai in un iperpiano, passa una ed una sola curva razionale normale.*

6. — Sul secondo modo di generazione si osservi ancora che *gli* S_{r-2} *intersezioni degli* S_{r-1} *corrispondenti sono tutti e soli gli* S_{r-2} $(r-1)$*-secanti di* C^r. Infatti, se un S_{r-2} è l'intersezione di due iperpiani corrispondenti delle due stelle, la proiettività fra queste subordina una proiettività fra le stelle coi medesimi centri contenute rispettivamente nei due iperpiani, e quell'S_{r-2} taglia queste due stelle in due spazi omo-

grafici sovrapposti ad $r-2$ dimensioni che hanno in generale $r-1$ punti uniti appartenenti evidentemente a C^r. Viceversa risulta subito che ogni S_{r-2} $(r-1)$-secante di C^r è intersezione di due iperpiani corrispondenti delle due stelle.

Preso un punto O dello spazio S_r, l'S_1 che da O va al centro di una stella ha un S'_1 corrispondente nell'altra stella; gli S'_{r-1} che passano per l'$S'_2 \equiv OS'_1$ hanno per corrispondenti nella prima stella gli S_{r-1} passanti per l'S_2 corrispondente all'S'_2, il quale S_2 contiene l'S_1. Si hanno così due stelle proiettive di sostegni S_2, S'_2: gli S_{r-2} intersezioni degli S_{r-1} corrispondenti di tali stelle sono tutti e soli gli S_{r-2} $(r-1)$-secanti di C^r passanti per O.

7. — Le coordinate di un punto variabile di una curva C^r (razionale normale) di S_r saranno date in funzione di un parametro λ dalle formule seguenti:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = A_0\lambda^r + B_0\lambda^{r-1} + \dots + C_0\lambda + D_0 \\ x_1 = A_1\lambda^r + B_1\lambda^{r-1} + \dots + C_1\lambda + D_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = A_r\lambda^r + B_r\lambda^{r-1} + \dots + C_r\lambda + D_r , \end{array} \right.$$

nelle quali dovrà essere il determinante

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & \dots & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & \dots & C_1 & D_1 \\ \dots & & & & \dots \\ A_r & B_r & \dots & C_r & D_r \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

altrimenti la curva C^r data dalle (6) apparterrebbe ad uno spazio subordinato di S_r (Cfr. n. 4). Se si fa quindi la trasformazione di coordinate definita dalle formule

$$\begin{array}{l} x_0 = A_0 y_0 + B_0 y_1 + \dots + D_0 y_r \\ x_1 = A_1 y_0 + B_1 y_1 + \dots + D_1 y_r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = A_r y_0 + B_r y_1 + \dots + D_r y_r \end{array}$$

e per comodità si tornano a chiamare $x_0, x_1, \dots, x_r$ le nuove coordinate $y_0, y_1, \dots, y_r$, è chiaro, dal confronto di queste equazioni con le (6), che le nuove coordinate saranno espresse dalle formule

(7) $$x_0 = \lambda^r, x_1 = \lambda^{r-1}, \ldots, x_{r-1} = \lambda, x_r = 1.$$

Una prima immediata conseguenza di queste formule è che *tutte le curve razionali normali di* S_r *sono proiettivamente identiche.*

8. — Applichiamo le (7) a determinare l'iperpiano osculatore alla curva C^r in un suo punto qualunque ossia l'iperpiano che ha ivi r punti infinitamente vicini comuni con C^r [1]).

Se

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_r x_r = 0$$

è l'equazione di un iperpiano qualunque di S_r, l'equazione

$$\xi_0 \lambda^r + \xi_1 \lambda^{r-1} + \ldots + \xi_r = 0,$$

ottenuta da essa col sostituire alle coordinate x_i le loro espressioni (7), dà i valori del parametro λ corrispondenti agli r punti secondo cui l'iperpiano medesimo taglia C^r: dunque, se questi r punti devono tutti raccogliersi nel punto corrispondente al valore λ_1 del parametro, il primo membro dell'equazione precedente non può differire che di una costante da $(\lambda - \lambda_1)^r$; e quindi le coordinate ξ_i dell'iperpiano saranno (posto λ invece di λ_1)

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = -\binom{r}{1}\lambda, \xi_2 = \binom{r}{2}\lambda^2, \ldots, \xi_r = (-1)^r \lambda^r.$$

Di qui risulta prima di tutto che *la varietà* ∞^1 *degli iperpiani osculatori di* C_r *è razionale*, e poi, tenendo presenti anche le (7), che la correlazione involutoria dello spazio S_r che è definita dalle formole

(8) $$\xi_0 = x_r, \xi_1 = -\binom{r}{1} x_{r-1}, \xi_2 = \binom{r}{2} x_{r-2}, \ldots, \xi_r = (-1)^r x_0$$

trasforma la curva C^r nella varietà dei suoi iperpiani osculatori. Si ha così, questa correlazione essendo un sistema nullo se r è impari e un sistema polare se r è pari, il teorema di Clifford [2]): — *Ogni curva* C

---

[1]) Per una curva qualunque un S_{i-1} dicesi *osculatore* in un punto se ha ivi un contatto i^{punto} colla curva; e dicesi invece *iperosculatore* o *stazionario* se ha ivi un contatto $(i+1)^{\text{punto}}$ o maggiore.

[2]) *On the classification of loci* (Philos. trans. of the royal Soc., 1878).

razionale normale di S_r *può trasformarsi, con una correlazione involutoria che è un sistema nullo o un sistema polare secondochè* r *è impari o pari, nella varietà dei suoi iperpiani osculatori* (ad ogni punto di C^r corrispondendo il relativo iperpiano osculatore).

Nel caso di r pari C^r giace sulla quadrica degli elementi incidenti del sistema polare ed i suoi iperpiani osculatori sono iperpiani tangenti a questa quadrica. *Nel caso di* r *impari gli* r *punti di contatto di* r *iperpiani osculatori a* C *partenti da un punto* P *qualunque di* S_r *determinano un iperpiano che passa per* P; giacchè, nel sistema nullo, l'iperpiano corrispondente a P passa per P e per i punti corrispondenti a quegli iperpiani.

Notiamo anche quest'altra proprietà. Un S_{r-1} di coordinate $\xi_0, \binom{r}{1}\xi_1, \ldots, \xi_r$ sega la C^r in un gruppo G di r punti dati dalla

$$\xi_0 \lambda^r + \binom{r}{1} \xi_1 \lambda^{r-1} + \ldots = 0,$$

ed ha per polo nel sistema (polare o nullo) definito dalle (8) un punto di coordinate $(-1)^r \xi_r, (-1)^{r-1}\xi_{r-1}, \ldots, \xi_0$. Le coordinate $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ di un S'_{r-1} coniugato a quell'S_{r-1} debbono quindi soddisfare alla

$$(-1)^r \xi_r \eta_0 + (-1)^{r-1} \xi_{r-1} \eta_1' + \ldots = 0 .$$

Ora questa è appunto la condizione che esprime che il gruppo G è coniugato al gruppo G′ di r punti segato su C^r dall'S'_{r-1} cioè dato dalla

$$\eta_0 \lambda^r + \eta_1 \lambda^{r-1} + \ldots = 0$$

(Cfr. nota al n. 3, Cap. 10.°). Adunque *due gruppi di* r *punti coniugati sopra una curva razionale normale sono segati da due iperpiani coniugati rispetto al suddetto sistema (polare o nullo).*

9. — Quando le formule che dànno i punti di una C^r si scrivono nella forma (7) od anche, introducendo l'omogeneità nel parametro, nella forma

$$x_i = \lambda^{r-i} \mu^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

è chiaro che l'iperpiano $x_i = 0$ taglia C^r in r punti, dei quali $r - i$ si raccolgono nel punto corrispondente al valore 0 del parametro ed i nel punto corrispondente al valore ∞ del parametro, ed inoltre che il punto unità giace sopra C^r. Reciprocamente, prendendo la piramide fondamentale ed il punto unità nelle condizioni ora dette, si ottengono le

(7). Queste formule possono adunque scriversi per una C^r in ∞^3 modi (potendosi scegliere arbitrariamente su di essa i tre punti corrispondenti a $0, \infty, 1$).

Osservisi inoltre che, nel caso di r impari, sono $\infty^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}}$ i modi diversi nei quali le equazioni di un sistema nullo si possono mettere nella forma (8) (n. 6, Cap. 5.°) e che, nel caso di r pari, sono $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}}$ i modi nei quali le equazioni di un sistema polare si possono mettere nella stessa forma (8) (n. 8, Cap. 6.°). Se ne deduce che, *dato un sistema nullo in uno spazio* S_r *(r impari), esistono* $\infty^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}-3} = \infty^{\frac{(r-1)(r+4)}{2}}$ *curve razionali normali di* S_r, *che sieno da quel sistema nullo trasformate nella varietà dei loro iperpiani osculatori, mentre, dato un sistema polare in uno spazio* S_r *(r pari), le curve razionali normali che si comportano in modo analogo sono* $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}-3} = \infty^{\frac{(r-2)(r+3)}{2}}$.

In due spazî successivi S_r, S_{r-1} (r impari) le due infinità sono le medesime.

10. — Aggiungasi ora alla proprietà del n. 8 l'osservazione generale che ogni proiettività (omografia o correlazione) fra gli spazî S_r di due curve razionali normali, per la quale l'una si trasforma nell'altra, dà origine, come è manifesto, ad una proiettività subordinata fra i punti delle due curve. Viceversa una tale proiettività dà origine ad una proiettività fra gli spazî. Ciò si vede nel modo più semplice supponendo date le due curve dalle formule

$$x_i = \lambda^{r-i}, \quad y_i = \mu^{r-i} \quad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Se si pone (ad es.) nelle prime formule $\lambda = \dfrac{a'\mu + b'}{a\mu + b}$ e s'introducono poi le seconde formule, si trovano le coordinate x_i di un punto della prima curva espresse linearmente per le coordinate del punto (o iperpiano corrispondente) della seconda; le quali espressioni, dando alle x_i, y_i variabilità generale, dimostrano l'asserto.

Sono adunque ∞^3 le trasformazioni proiettive (omografie o correlazioni) di una curva razionale normale in un'altra: in particolare sono ∞^3 le trasformazioni proiettive di una curva razionale normale in sè stessa [1]).

[1]) Proprietà di queste trasformazioni trovansi in LORIA, *Sulle curve razionali normali* ... (Giornale di Matematiche, 26 (1), 1888).

Fra le correlazioni che mutano i punti di una curva razionale normale nei suoi iperpiani osculatori trovasi il sistema nullo o sistema polare già considerato (n. 8).

11. — Determiniamo le quadriche passanti per una curva razionale normale C^r. Le (7), ad es., dànno

$$\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\ldots=\frac{x_{r-1}}{x_r},$$

e quindi $\frac{r(r-1)}{2}$ quadriche

$$\begin{aligned} x_0x_2-x_1^2=0\,,\ x_0x_3-x_1x_2=0\,,\ \ldots,\ x_0x_r-x_1x_{r-1}=0\,,\\ x_1x_3-x_2^2=0\,,\ \ldots,\ x_1x_r-x_2x_{r-1}=0\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{r-2}x_r-x_{r-1}^2=0 \end{aligned}$$

linearmente indipendenti (come è facile vedere), che determinano un *sistema lineare* $\infty^{\frac{r(r-1)}{2}-1}$ *di quadriche passanti per* C^r. Ora *questo è il sistema lineare di tutte le quadriche passanti per* C^r; il che si prova osservando che tutte le quadriche di S_r sono $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$, che esse segano sopra C^r l'involuzione formata da tutti i gruppi di $2r$ punti e che quindi, se il detto sistema lineare è ∞^t, deve aversi (n. 17, Cap. 10.°)

$$\frac{r(r+3)}{2}-t-1=2r$$

donde appunto

$$t=\frac{r(r-1)}{2}-1\,.$$

12. — Se prendiamo sopra la curva (razionale normale) C^r di S_r $r-m$ punti ($m<r$) e dall'S_{r-m-1}, cui essi appartengono, proiettiamo C^r sopra un S_m da esso indipendente, si ha in S_m una curva C^m (razionale normale). Applicando a questa le cose precedenti seguono altre proprietà per la C^r di S_r. Così avendosi, per il n. 8, che da un punto O' di S_m partono m S_{m-1} osculatori a C^m, i cui punti di contatto determinano un S_{m-1} polare di O' in un sistema polare se m è pari o in un sistema nullo se m è impari, ritornando alla curva primitiva, si ha che *per un punto* O *qualunque di* S_r *e per* $r-m$ *punti di* C^r *passano* m *iperpiani aventi altrove un contatto*

m^{punto} *con* C^r: *l'iperpiano individuato da quegli* $r-m$ *punti, cioè dal loro* S_{r-m-1}, *e da questi* m *punti di contatto corrisponde al punto* O, *se* m *è pari, in un sistema polare singolare con lo spazio fondamantale* S_{r-m-1}, *e, se* m *è impari, in un sistema nullo singolare collo stesso spazio fondamentale, onde in quest' ultimo caso l' iperpiano passa anche per* O (anzi per l'$S_{r-m} \equiv \mathrm{O}\, S_{r-m-1}$) [1].

13. — Si può invece (per il n. 4) applicare il metodo delle proiezioni a dedurre proprietà di una curva razionale qualunque da quelle di una curva razionale normale. Ad es. consideriamo le C^r razionali di S_{r-1}, che nascono proiettando la C^r di S_r da un punto O esterno ad essa.

Siccome da O partono r S_{r-1} osculatori di C^r, segue senz'altro che *esistono, per una* C^r *razionale di* S_{r-1}, r S_{r-2} *stazionari od iperosculatori (cioè con contatto* r^{punto}*)*. Anzi, *se* r *è impari, i punti di contatto di questi* r S_{r-2} *appartengono ad un* S_{r-2} (per un teorema del n. 8). Nel caso particolare $r=3$ si ha una C^3 con punto doppio (per il n. 6, mentre, se $r>3$, la C^r di S_{r-1} non ha in generale punti multipli): i suoi tre flessi sono in linea retta.

Dalla proprietà del n. 12, essendo O il centro di proiezione e ponendo (ad es.) $m=r-1$, si ricava che, *quando* r *è pari, da un punto* P *di una* C^r *razionale di* S_{r-1} *partono* $r-1$ S_{r-2}, *ciascuno avente con* C^r *contatto* $(r-1)^{\text{punto}}$, *e l'* S_{r-2} *determinato da questi punti di contatto passa per* P. Ad es., per ogni punto P di una quartica gobba di 2.ª specie (di S_3) passano tre piani che osculano altrove la curva: i tre punti di contatto sono in un piano che passa per P.

Particolari C^r razionali di S_{r-1} si ottengono assumendo particolari posizioni per il centro O di proiezione. Ad es., se S_k ha con C^r di S_r contatto $(k+1)^{\text{punto}}$ in un punto ed S_{r-k} contatto $(r-k+1)^{\text{punto}}$ in un altro punto, prendendo per il centro O di proiezione il punto comune ai due spazî S_k, S_{r-k}, si trova una C^r di S_{r-1} con due spazî S_{k-1}, S_{r-k-1} aventi rispettivamente colla curva contatto $(k+1)^{\text{punto}}$, $(r-k+1)^{\text{punto}}$ [2].

---

[1]) Osservazione di Brambilla nella Nota, *Intorno alle curve razionali* ... (Rend. del R. Ist. lomb., 19 (2), 1886).

[2]) Varie proprietà di questo caso particolare ed altre del caso generale si trovano dimostrate, per via algebrica, nella trattazione di Loria, *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio ad n — 1 dimensioni* (Rend. di Palermo, 2, 1888). Una trattazione completa, col metodo delle proiezioni, della quartica di

Di questa è caso particolare la quartica di 2.ª specie con due tangenti osculatrici [1]).

14. — Per una curva razionale qualunque (non normale) accenniamo pure a queste altre proprietà che si collegano ad importanti ricerche algebriche [2]).

Gli iperpiani di una stella di sostegno S_{r-k-1} segano sopra una C^r (razionale normale) di S_r una involuzione I_r^k. Dello spazio S_{r-k-1} si consideri lo spazio coniugato S'_k nel sistema polare o nullo che trasforma C^r nella totalità dei suoi iperpiani osculatori, spazio S'_k che è il luogo del punto comune agli r iperpiani osculatori a C^r nei punti di un gruppo (variabile) di quella involuzione. Per ciò che si è dimostrato nel n. 8 (ultimo alinea), l'involuzione I_r^{r-k-1} segata su C^r dagli iperpiani della stella S'_k è coniugata ad I_r^k.

Se ora si proietta C^r dall'S_{r-k-1} sopra un S^*_k si ottiene in questo spazio (supposto che S_{r-k-1} non abbia punti su C^r) una curva razionale Γ^r, e la proiezione della I_r^k è l'involuzione segata su Γ^r da tutti gli iperpiani (S_{k-1}) del proprio spazio. La involuzione coniugata a questa cioè, per quanto si è detto, la proiezione della I_r^{r-k-1} è ciò che dicesi *involuzione fondamentale* sopra Γ^r. Anzi tale nozione si estende nel modo seguente.

Ritornando alla curva razionale normale C^r, si consideri su di essa l'involuzione segata dai piani di una stella il cui sostegno S_{r-h-1} contenga S_{r-k-1} ($k>h$) e prendasi di nuovo l'S'_h (contenuto in S'_k) coniugato ad S_{r-h-1} (nel suddetto sistema polare o nullo). Le due stelle di S_r aventi per sostegno S_{r-h-1}, S'_h segano su C^r due involuzioni coniugate; e, quando si passa a Γ^r di S^*_k, si ha su questa una involuzione segata dagli iperpiani per un S_{k-h-1} (intersezione di S_{r-h-1} ed S^*_k), e la involuzione ad essa coniugata. Quest'ultima è *l'involuzione relativa all'* S_{k-h-1}. L'involuzione fondamentale è contenuta manifestamente in tutte le involuzioni di Γ^r relative agli spazî subordinati di S^*_k.

L'involuzione fondamentale di una curva razionale Γ^r *di un* S^*_k $(r>k)$ *possiede in generale un gruppo ed uno solo giacente in un iperpiano nel-*

2.ª specie (di S_3) è lo *Studio geometrico della quartica gobba razionale* di MARLETTA (Annali di Matematica, 8 (3), 1902).

[1]) Cfr. CREMONA, *Sopra una certa curva gobba di quart'ordine* (Rend. del R. Ist. lomb., 1 (2), 1868).

[2]) Cfr., anche per le numerose indicazioni bibliografiche, BERZOLARI, *Sulle curve razionali* ... (Annali di Matematica, 21 (2), 1893).

l'unico caso in cui sia ad un tempo r impari e k pari. In vero, perchè un gruppo di r punti di detta involuzione sia in un S_{k-1}, questi e i loro r punti obbiettivi sulla curva razionale normale C^r devono essere sopra un S_{r-1}, il quale quindi deve passare non solo per S_{r-k-1}, ma per S'_k. Ora ciò esige che questi due spazî coniugati s'incontrino, il che in generale non è se r è pari (cfr. n. 11, Cap. 6.°) e, quando r è impari, avviene se k pari e non in generale se k è impari (n. 5, Cap. 5.°).

Per una C^r razionale di S_{r-1} l'involuzione fondamentale si riduce ad un solo gruppo, quello degli r punti di contatto degli r S_{r-2} stazionari (giacenti in un S_{r-2}, se r è impari, come già vedemmo nel n. 13).

15. — Un S_i-cono (n. 3, Cap. 9.°) irriducibile ed appartenente ad S_r è segato da un S_{r-i-1} generico (indipendente quindi dal vertice S_i) secondo una curva dello stesso ordine ρ del cono (i punti della quale sono le traccie degli spazî generatori), onde dovrà essere (n. 6, Cap. 9.°) $\rho \geq r-i-1$. Tale curva sezione e in generale ogni curva, giacente sull'S_i-cono, che abbia un solo punto comune (variabile) con ciascun spazio generatore dicesi *curva direttrice.* Un S_i-cono *razionale* ha (n. 21, Cap. 9.°) le sue curve direttrici pure razionali.

Le proprietà degli S_i-coni razionali si traggono quindi facilmente da quelle delle curve razionali. Ad es. dimostriamo il teorema, che ci occorrerà in seguito: — *Per $\rho+1$ punti di un S_i-cono razionale, d'ordine ρ, appartenente ad S_r, presi su altrettanti spazî generatori, passa una curva (razionale) direttrice di ordine ρ.* Vedemmo che $\rho \geq r-i-1$. Ora se $\rho = r-i-1$, il teorema è immediato. Infatti un S_ρ generico sega il cono in una curva d'ordine ρ appartenente all'S_ρ e quindi razionale normale, cosicchè $\rho+1$ spazî generatori qualsiansi, passando per $\rho+1$ punti della curva (cfr. n. 3) appartengono ad S_r, e per conseguenza $\rho+1$ punti presi comunque (fuori di S_i) su detti spazî generatori debbono essere indipendenti (altrimenti questi spazî apparterrebbero a spazio di dimensione inferiore ad r), cioè determinano un S_ρ che sega pure in una curva razionale normale di ordine ρ.

Se $\rho > r-i-1$, si consideri la C^ρ determinata nel cono da un S_{r-i-1} generico e si faccia passare per questo spazio un S_ρ indipendente da S_i, onde si amplierà lo spazio ambiente ad un $S_{\rho+i+1}$. Poscia si prenda in S_ρ un $S_{\rho-r+i}$ indipendente da S_{r-i-1} e si consideri una C_1^ρ razionale normale di cui la C^ρ sia proiezione dal detto $S_{\rho-r+i}$ (n. 4). Proiettando la C_1^ρ dall'S_i (o anche da un qualunque S_i dell'$S_{\rho-r+2i+1} \equiv S_{\rho-r+i} \cdot S_i$, indipendente dall'$S_{\rho-r+i}$) si ha un S_i-cono appartenente ad $S_{\rho+i+1}$, di cui quello proposto è proiezione dall'$S_{\rho-r+i}$ sopra l'S_r e per il quale ha luogo la condizione del primo caso considerato (cioè $\rho = (\rho+i+1) - i - 1$). Il teorema, valevole per questo caso, si trasporta quindi per proiezione ad ogni altro caso.

*

CAPITOLO 13.°

Superficie rigate razionali.

1. — Dal n. 10 del Cap. 9.° (ultimo alinea), posto $k=2$, risulta che una superficie di ordine $r-1$, irriducibile ed appartenente ad S_r [1]), V_2^{r-1}, è normale. Ora si può aggiungere che è *razionale*, giacchè, presi $r-2$ suoi punti generici, dal loro S_{r-3} una V_2^{r-1} è manifestamente proiettata (in modo biunivoco) sopra un S_2.

In seguito si troverà (Cap. 14.°) che le V_2^{r-1} di S_r sono *rigate* (luogo di ∞^1 rette) ad eccezione di una particolare superficie di S_5. Qui vogliamo escludere questa superficie, cioè limitarci allo studio delle V_2^{r-1} rigate di S_r; le quali sono *razionali* sia come luogo dei loro ∞^2 punti, il che si è veduto or ora, sia come luogo delle loro ∞^1 generatrici (cfr. n. 21, Cap. 9.°), il che si vede segando con un S_{r-1} generico e notando che la sezione (luogo delle traccie delle generatrici) è una curva irriducibile d'ordine $r-1$ appartenente allo stesso S_{r-1} e però una curva razionale normale.

Quest' ultima osservazione mostra anche, per essere una curva razionale normale priva di punti multipli, che una V_2^{r-1} non ha linea multipla.

2. — L' importanza del suddetto studio è resa manifesta dal seguente teorema: — *Ogni superficie rigata razionale di ordine $r-1$ di uno spazio $S_{r'}$, se $r > r'$, si può dedurre per proiezione da una V_2^{r-1} rigata di S_r.* —

Infatti seghiamo la data superficie rigata razionale, che indicheremo con W_2^{r-1}, con un $S_{r'-1}$ generico di $S_{r'}$, e sia C^{r-1} la curva razionale sezione.

[1]) Si avverta bene che l' irriducibilità e l'appartenenza (agli spazî rispettivi) delle superficie che in appresso si considerano, sono sempre sottintese.

Questa, preso un S_r per l'$S_{r'}$ e in esso un $S_{r-r'-1}$ indipendente dall'$S_{r'}$, si può sempre pensare come proiezione (n. 4, Cap. 12.°) da questo $S_{r-r'-1}$, di una curva razionale normale Γ^{r-1} giacente in $S_{r-1} \equiv S_{r-r'-1} . S_{r'-1}$. Un S_{r-2} di tale S_{r-1} condotto per l'$S_{r-r'-1}$ sega Γ^{r-1} in $r-1$ punti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ indipendenti, aventi per proiezione altrettanti punti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{r-1}$ di C^{r-1} esistenti nell'$S_{r'-2}$ intersezione di quell'S_{r-2} coll'$S_{r'-1}$. Prendasi per questo $S_{r'-2}$, in $S_{r'}$, un altro $S'_{r'-1}$, il quale segherà W_2^{r-1} in un'altra curva razionale C_1^{r-1} passante per $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{r-1}$ e proiettata dall'$S_{r-r'-1}$ in un cono di ordine $r-1$. Per i punti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ e per un altro punto generico P_r di detto cono passa una curva Γ_1^{r-1} (n. 15, Cap. 12.°), appartenente all'$S_{r-1} \equiv P_1 P_2 \ldots P_{r-1} P_r$ e quindi razionale normale, avente per proiezione C_1^{r-1} dallo spazio $S_{r-r'-1}$. Le due curve Γ^{r-1}, Γ_1^{r-1} sono riferite in corrispondenza proiettiva perchè lo sono le C^{r-1}, C_1^{r-1} dalle generatrici di W_2^{r-1}, ed hanno gli $r-1$ punti comuni $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ uniti in quella corrispondenza. La rigata luogo delle rette congiungenti i loro punti corrispondenti appartiene ad S_r ed ha per proiezione W_2^{r-1}, come è chiaro: inoltre è di ordine $r-1$, il che si prova nel modo seguente. Si consideri, in un fascio di iperpiani di S_r, la corrispondenza $(r-1, r-1)$ che ha luogo fra due iperpiani proiettanti due punti corrispondenti di Γ^{r-1}, Γ_1^{r-1} e si noti che la corrispondenza ha $2(r-1)$ iperpiani uniti (n. 18, Cap. 9.°), dei quali $r-1$ vanno agli $r-1$ punti comuni sunnominati: sono adunque soltanto $r-1$ le generatrici della rigata incontranti un S_{r-2} generico (base del fascio d'iperpiani). Il teorema è così dimostrato.

La dimostrazione fu fatta considerando la W_2^{r-1} razionale come luogo di generatrici: ma ora, dal teorema stesso, per un'osservazione del n. 1, segue che essa è razionale anche come luogo di punti. Viceversa una superficie rigata razionale come luogo di punti, lo è come luogo di generatrici, perchè nella rappresentazione (biunivoca) della superficie rigata sopra un S_2, le generatrici saranno rappresentate da un sistema di curve, di cui passa una sola per un punto generico dell'S_2 cioè (n. 5, Cap. 10.°) da un fascio di curve, e però ecc..

Notiamo anche che dal teorema discende essere la stessa cosa dire V_2^{r-1} rigata di S_r o rigata razionale normale.

3 — *Una* V_2^{r-1} *rigata di* S_r *che abbia un punto multiplo è un cono:* giacchè un S_{r-1} generico per un tal punto P sega la rigata in una curva d'ordine $r-1$ che evidentemente appartiene all'S_{r-1} e che, avendo P

multiplo, non può essere una curva razionale normale, cioè deve spezzarsi in parti. Di queste una sola potrà essere una curva propriamente detta, perchè se fossero più, la rigata si scinderebbe in tante rigate le cui generatrici taglierebbero queste varie curve. Sicchè ogni S_{r-1} per P contiene (almeno) una generatrice di V_2^{r-1}, la quale (poichè le generatrici sono ∞^1) dovrà quindi passare per P: onde V_2^{r-1} è un cono. Volendo ora occuparci delle rigate razionali normali, escluderemo che queste sieno coni, e però, parlando di V_2^{r-1} rigate di S_r, intenderemo d'ora innanzi (nel presente Cap.) *non coni* [1]).

Un S_{r-1} taglia una V_2^{r-1} rigata di S_r in una curva razionale normale d'ordine $r-1$, oppure in una curva d'ordine $m<r-1$ incontrata da tutte le generatrici e in $r-1-m$ generatrici: ma non può mai la curva d'intersezione scindersi in due o più curve proprie per una ragione detta dianzi. Possiamo aggiungere che *ogni curva* C^m, *irriducibile, d'ordine* $m \leq r-1$, *giacente su una* V_2^{r-1} *rigata di* S_r, *è una curva razionale normale*, vale a dire esiste in uno spazio S_m. Occorre dimostrare la proprietà per $m>1$. In tal caso, se C^m esistesse in uno spazio S_μ e fosse $\mu<m$, per S_μ e per $r-1-\mu$ punti generici di V_2^{r-1} e quindi per le $r-1-\mu$ generatrici passanti per questi punti (in quanto tutte le generatrici devono incontrare C^m) si potrebbe far passare un S_{r-1} segante V_2^{r-1} in una curva (composta) di ordine $m+r-1-\mu>r-1$, il che non può essere.

Segue che ogni C^m irriducibile giacente su una V_2^{r-1} rigata di S_r, quando $1<m\leq r-1$, incontra ciascuna generatrice in un punto, cioè, come dicesi, è *curva direttrice*.

La dimostrazione fatta sopra prova anche che una curva d'ordine $m<r-1$ composta di una curva direttrice (di ordine ≥ 1), e di generatrici non può appartenere ad uno spazio di meno che m dimensioni.

4. — *Se* C^m, C^n *sono due direttrici (irriducibili) di una* V_2^{r-1} *rigata di* S_r, *degli ordini* m, n *rispettivamente, deve essere* $m+n\geq r-1$. Infatti, se fosse invece $m+n<r-1$ (e quindi $m<r-1$, $n<r-1$), ogni generatrice di V_2^{r-1} dovendo incontrare C^m e C^n e queste essendo contenute rispettivamente in spazî S_m ed S_n (per ciò che si è detto sopra), la V_2^{r-1} sarebbe contenuta nello spazio a cui questi appartengono, di dimensione al più $m+n+1<r$, contrariamente all'ipotesi che V_2^{r-1} appartiene ad S_r.

[1]) Per le proprietà di queste V_2^{r-1} cfr. SEGRE, *Sulle rigate razionali* ... (Atti della R. Accad. di Torino, 19, 1884).

Si può certamente far passare un S_{r-1} per k generatrici di V_2^{r-1} se $k=\frac{r}{2}$ quando r è pari e se $k=\frac{r-1}{2}$ quando r è impari. La residua intersezione dell'S_{r-1} con V_2^{r-1} è una linea di ordine $\frac{r-2}{2}$ se r è pari e di ordine $\frac{r-1}{2}$ se r è impari, la quale è irriducibile in generale, ma in casi particolari (cfr. n. 12) può spezzarsi in 1, 2, ... generatrici ed in una direttrice residua (poichè tutte le generatrici incontrano S_{r-1}). Si prova così l'esistenza di una curva direttrice di ordine $\leq \frac{r-2}{2}$ se r è pari e $\leq \frac{r-1}{2}$ se r è dispari. Ma, per la proprietà superiore, V_2^{r-1} non può avere due direttrici di ordine $\leq \frac{r-2}{2}$ se r è pari, nè due direttrici di ordine $< \frac{r-1}{2}$ se r è impari; quindi *ogni superficie rigata* V_2^{r-1} *di* S_r *ammette una sola direttrice di ordine minimo e precisamente di ordine* $\leq \frac{r-2}{2}$ *se* r *è pari e di ordine* $\leq \frac{r-1}{2}$ *se* r *è impari, ad eccezione del caso, in cui, essendo* r *impari, l'ordine minimo della direttrice sia proprio* $\frac{r-1}{2}$.

Risulterà in seguito che esistono effettivamente rigate razionali normali, in cui l'ordine della direttrice minima ha, nella limitazione suddetta, quel valore che più ci piace e che, nel caso di eccezione, esistono ∞^1 curve direttrici minime di ordine $\frac{r-1}{2}$. Dal che deriva una classificazione (avente, come si vedrà, carattere proiettivo) delle rigate razionali normali in *specie* a seconda dell'ordine della (o di una) direttrice minima. Per r pari si hanno $\frac{r-2}{2}$ specie e per r impari $\frac{r-1}{2}$ specie: alle quali si potrebbe aggiungere la specie dei coni (in cui l'ordine della direttrice minima è zero).

5. — *Se una rigata* V_2^{r-1} *di* S_r *ha la (od una) direttrice minima d'ordine* m, k *generatrici qualunque di* V_2^{r-1} *sono indipendenti o no, secondochè* $k \leq m+1$ *ovvero* $k > m+1$.

Sia S_δ lo spazio a cui appartengono $m+1$ generatrici qualunque: onde (n. 4) $\delta \leq 2m+1 \leq r-1$ se r è pari e $\delta \leq 2m+1 \leq r$ se r è impari. Segue che, se $\delta = r$, cioè se S_δ è lo stesso spazio S_r, deve essere $\delta = 2m+1$ e le $m+1$ generatrici sono indipendenti. Se poi $\delta < r$, lo spazio S_δ contenendo $m+1$ punti della direttrice minima C^m la contiene per intero; quindi un iperpiano S_{r-1} condotto per questo S_δ e per altri $r-\delta-1$ (≥ 0) punti di V_2^{r-1} situati sopra altrettante generatrici diverse dalle precedenti $m+1$, avrà comune con V_2^{r-1} la curva C^m ed $(r-\delta-1)+(m+1)$ generatrici, cioè una linea di ordine $r-\delta+2m$. Ma l'S_{r-1} deve segare V_2^{r-1} secondo una linea di ordine $r-1$, dunque $\delta = 2m+1$, cioè di nuovo le $m+1$ generatrici (e quindi anche un numero minore) sono indipendenti. Così è dimostrata in ogni caso l'indipendenza di $k \leq m+1$ generatrici.

Se $k > m+1$ (e naturalmente si suppone $k \leq \frac{r+1}{2}$, altrimenti il teorema è evidente; onde risulta $2(m+1) \leq r-1$), si prendano $m+1$ generatrici delle k considerate: esse appartengono, per ciò che si è dimostrato, ad un S_{2m+1}, il quale contiene C^m e quindi taglia in un punto ciascuna delle rimanenti $k-m-1$ generatrici. Allora $k-m-1$ punti, presi sopra queste generatrici uno su ciascuna e fuori di C^m, determinano con quell'S_{2m+1} un S_{m+k} (o spazio di dimensione inferiore ad $m+k$) contenente tutte le k generatrici [1]). Ma dalla $k > m+1$ si trae $m+k < 2k-1$: dunque queste k generatrici non sono indipendenti.

6. — Continuiamo ad indicare con m l'ordine della (o di una) direttrice minima di una rigata V_2^{r-1} di S_r, e consideriamo k generatrici della rigata, essendo $k \leq m$. Un S_{r-1} variabile per esse, cioè (n. 5) per l'S_{2k-1} a cui appartengono, non può contenere alcuna direttrice fissa; altrimenti, facendolo passare inoltre per un punto (esterno a tale direttrice) di V_2^{r-1}, cioè per l'S_{2k} congiungente l'S_{2k-1} a questo punto, si avrebbe che ogni S_{r-1} per l'S_{2k} e quindi l'S_{2k} medesimo conterrebbe la generatrice passante per il punto stesso, cioè conterrebbe in tutto $k+1$ generatrici contrariamente al teorema del n. 5. A simile assurdo si verrebbe se si facesse l'ipotesi che l'S_{r-1}, variabile per le k generatrici, ne contenesse un'altra (fissa), giacchè questa dovrebbe giacere nell'S_{2k-1} detto. Dunque

---

[1]) Si noti anzi che, *se* $m+k \leq r$ *le* k *generatrici appartengono precisamente ad un* S_{m+k}, perchè, se appartenessero ad un S_{m+k-1}, per questo e per $r-m-k$ punti generici di V_2^{r-1} passerebbe un S_{r-1} che segherebbe la V_2^{r-1} in una curva d'ordine $m+k+r-m-k=r$: assurdo.

l'ulteriore intersezione con V_2^{r-1} del considerato S_{r-1} è tutta variabile collo stesso S_{r-1}; ed ora aggiungo che è irriducibile [1]. Infatti, se a comporla entrassero k' generatrici, presi due di quegli S_{r-1}, aventi quindi comune con V_2^{r-1} l'uno certe k' generatrici e l'altro certe altre k' generatrici, l'S_{r-2} loro intersezione conterrebbe k' punti di quelle e k' punti di queste, anzi, variando un S_{r-1} nel fascio dei due S_{r-1}, l'S_{r-2} medesimo (base) verrebbe ad avere comuni con V_2^{r-1} infiniti gruppi di analoghi k' punti, il cui luogo sarebbe una curva direttrice esistente in tutti gli S_{r-1} del fascio. Ne seguirebbe (variando uno solo dei due S_{r-1} presi) che tale curva direttrice dovrebbe essere su tutti gli S_{r-1} per le k generatrici, il che si vide non poter essere.

Reciprocamente una curva irriducibile C^{r-k-1} situata sopra la rigata V_2^{r-1} e k sue generatrici qualunque sono sempre situate in un S_{r-1}. Concludiamo che *le curve (direttrici) d'ordine $r-k-1$ giacenti sopra una rigata V_2^{r-1} di S_r, a direttrice minima d'ordine m, quando $k \leq m$, si ottengono tutte tagliando la rigata con gli S_{r-1} passanti per k sue generatrici qualunque. Esse costituiscono una serie lineare ∞^{r-2k} (n. 16, Cap. 10.°) irriducibile* (cioè la curva generica della serie è irriducibile).

7. — Prima di fare applicazioni del teorema precedente, notiamo un'altra proprietà.

Anzitutto si ha la proposizione generale: — *La rigata generata dalle rette congiungenti i punti di due curve in corrispondenza birazionale fra di loro ha per ordine la somma degli ordini delle due curve diminuita del numero dei punti uniti (se esistono)*; che si dimostra coll'applicazione del principio di corrispondenza nello stesso modo tenuto in un caso particolare nel n. 2.

Ne discende, osservando che i punti comuni a due direttrici *qualunque* di una rigata V_2^{r-1} di S_r sono punti uniti per la corrispondenza birazionale (proiettiva) data fra esse dalle generatrici, che *due direttrici qualunque di una rigata V_2^{r-1} di S_r degli ordini ν, ν' si tagliano in $\nu + \nu' - (r-1)$ punti.*

---

[1] Ciò potrebbe dedursi subito dal teorema del n. 18, Cap. 10.°, osservando che, in caso contrario, la curva generica della serie lineare segata dal suddetto S_{r-1} sopra V_2^{r-1} avrebbe punti doppî variabili nei punti comuni alle generatrici e alla curva costituenti l'ulteriore intersezione: ma il ragionamento del testo ricorre a mezzi più semplici.

8. — Dal teorema del n. 6, facendovi $k = m = \frac{r-1}{2}$, se r è dispari, si ricava che ogni V_2^{r-1} rigata, la quale ammetta una direttrice minima di ordine $\frac{r-1}{2}$, ne ammette ∞^1; che è una delle affermazioni del n. 4.

Che poi esista effettivamente una rigata, per la quale l'ordine della (o di una) direttrice minima abbia un valore fissato ad arbitrio fra quelli che soddisfano alla diseguaglianza $m \leq \frac{r-2}{2}$ se r è pari, $m \leq \frac{r-1}{2}$ se r è dispari (che è l'altra affermazione del n. 4), segue dall' invertire una immediata conseguenza del surricordato teorema. Cioè, esistendo la direttrice minima C^m, per questo teorema, esiste anche una direttrice (irriducibile) C^{r-m-1}, e le C^m, C^{r-m-1} appartengono a due spazï indipendenti (altrimenti V_2^{r-1} non apparterrebbe ad S_r) e sono riferite proiettivamente dalle generatrici della rigata.

Si prendano adunque, inversamente, due spazï S_m ed S_{r-m-1} indipendenti di S_r ed in essi due curve razionali normali riferite proiettivamente in un modo affatto arbitrario. Le congiungenti i punti corrispondenti delle due curve costituiranno appunto una rigata d'ordine $r-1$ appartenente ad S_r (n. 7), della quale sarà C^m la (o una) direttrice minima, giacchè, per le diseguaglianze superiori, è $m \leq r-m-1$ e quindi non può esistere altra direttrice di ordine $< m$ (primo teorema del n. 4).

9. — La generazione esposta di una V_2^{r-1} rigata di S_r, avente la (o una) direttrice minima d'ordine m, conduce spontaneamente ad una forma canonica delle equazioni di V_2^{r-1} di data specie m.

Infatti si prendano gli spazï S_m, S_{r-m-1} di due curve direttrici C^m, C^{r-m-1} come spazï fondamentali opposti della piramide fondamentale di S_r, e si supponga (come si può) che le C^m, C^{r-m-1} sieno dati in quegli spazï rispettivamente dalle formule

$$x_0 = 1\,,\ x_1 = \lambda\,,\ \ldots\,,\ x_m = \lambda^m\,,\ x_{m+1} = 0\,,\ x_{m+2} = 0\,,\ \ldots\,,\ x_r = 0$$

$$x_0 = 0\,,\ x_1 = 0\,,\ \ldots\,,\ x_m = 0\ \,,\ x_{m+1} = 1\,,\ x_{m+2} = \lambda\,,\ \ldots\,,\ x_r = \lambda^{r-m-1}$$

ed infine si ritenga (come pure si può approfittando dell'arbitrarietà che ancora rimane nella scelta dei punti 0, ∞, 1 sulle due curve) che i punti corrispondenti, nella proiettività fra C^m e C^{r-m-1}, sieno dati dallo stesso valore del parametro λ. I punti della V_2^{r-1} si ottengono allora manifestamente dalle formule

$$x_0 = 1 \,, x_1 = \lambda \,, \dots \,, x_m = \lambda^m \,, x_{m+1} = \mu \,, x_{m+2} = \mu\lambda \,, \dots \,, x_r = \mu\lambda^{r-m-1}$$

facendo variare in tutti i modi possibili i due parametri λ, μ. L'eliminazione di questi parametri conduce alle equazioni di V_2^{r-1}:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \dots = \frac{x_{m-1}}{x_m} = \frac{x_{m+1}}{x_{m+2}} = \frac{x_{m+2}}{x_{m+3}} = \dots = \frac{x_{r-1}}{x_r} \,,$$

che si possono raccogliere anche nell'annullarsi di una matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 \, x_1 \dots x_{m-1} & x_{m+1} \, x_{m+2} \dots x_{r-1} \\ x_1 \, x_2 \dots x_m & x_{m+2} \, x_{m+3} \dots x_r \end{matrix} \right\| = 0 \,.$$

Queste equazioni mostrano in primo luogo che *condizione sufficiente perchè due rigate V_2^{r-1} siano proiettivamente identiche è che abbiano direttrici minime dello stesso ordine, cioè che le due rigate sieno della stessa specie.* Che tale condizione sia anche *necessaria* è evidente per sè.

Le equazioni stesse forniscono inoltre una doppia generazione proiettiva della V_2^{r-1}, in quanto mostrano che la V_2^{r-1} può riguardarsi come il luogo delle rette d'intersezione degli iperpiani corrispondenti degli $r-1$ fasci proiettivi

$$x_0 - \lambda x_1 = 0 \,, \dots \,, x_{m-1} - \lambda x_m = 0 \,, x_{m+1} - \lambda x_{m+2} = 0 \,, \dots \,, x_{r-1} - \lambda x_r = 0 \,,$$

o come il luogo dei punti d'intersezione degli S_2 corrispondenti, che si tagliano, delle due stelle proiettive

$$\begin{aligned} \mu_0 x_0 + \dots + \mu_{m-1} x_{m-1} + \mu_{m+1} x_{m+1} + \dots + \mu_{r-1} x_{r-1} &= 0 \\ \mu_0 x_1 + \dots + \mu_m x_m + \mu_{m+2} x_{m+2} + \dots + \mu_r x_r &= 0 \end{aligned}$$

aventi per sostegni due S_1 (cfr. n. 12, Cap. 7.°).

Si noti che la forma particolare delle precedenti equazioni dipende non soltanto dalla scelta particolare degli elementi di riferimento, ma dalla specie della rigata. Quando si prendessero $r-1$ fasci proiettivi, affatto generici, di iperpiani, la rigata che ne risulterebbe sarebbe la più generale, cioè quella per cui l'ordine della direttrice minima è massimo $\left(= \frac{r-1}{2} \text{ o } \frac{r-2}{2}\right)$; dalla quale specie di rigata si può pensare che provengano (come vedremo nel n. 12) le altre specie, spezzando la direttrice minima in un certo numero di generatrici ed in una curva semplice.

10. — La rappresentazione di una V_2^{r-1} di S_r sopra un piano, accennata nel n. 1, deve essere ora considerata in modo particolare per le V_2^{r-1} rigate di specie m, cioè con direttrice minima C^m.

Degli $r-2$ punti, che nel n. 1 si prendevano generici, ne fisseremo ora $2k$ sopra k generatrici qualunque $g_1, g_2, \dots, g_k$, due per ciascuna, supponendo $0 \leq k < m$, e i rimanenti $r-2k-2$ punti $P_1, P_2, \dots, P_{r-2k-2}$ generici, indicando con $h_1, h_2, \dots, h_{r-2k-2}$, le generatrici (certamente diverse fra loro e dalle precedenti) passanti per essi. Le rette g ed i punti P apparterranno (cfr. n. 5) ad un S_{r-3}: ed è facile assicurarsi che la proiezione di V_2^{r-1} da questo S_{r-3} sopra un piano (indipendente da esso), che diremo π, è biunivoca. In vero un S_{r-1} generico per l'S_{r-3} taglia V_2^{r-1} nelle k generatrici g e in una curva residua di ordine $r-k-1$ passante per gli $r-2k-2$ punti P ed appoggiata a quelle k generatrici (cfr. n. 6). Tale curva è quindi segata da un S_{r-2} di S_{r-1}, passante genericamente per l'S_{r-3}, in un solo punto ulteriore.

11. — Troviamo gli elementi eccezionali *(fondamentali)* della rappresentazione. Gli $r-2k-2$ punti P individuano una curva direttrice C^{r-k-2} (irriducibile), residua intersezione di V_2^{r-1} coll'S_{r-1} che passa per quei punti, per le k generatrici g e per un'altra generatrice qualunque (come segue dal n. 6, per essere $k+1 \leq m$). La C^{r-k-2}, ovvero l'S_{r-k-2} a cui appartiene, ha $r-k-2$ punti (che appartengono ad un S_{r-k-3}) comuni coll'S_{r-3}, da cui si fa la proiezione: quindi la C^{r-k-2} esiste in uno spazio proiettante S_{r-2}, onde ha per proiezione un punto solo Q d'intersezione di S_{r-2} e π. Anzi, considerando l'S_2 tangente a V_2^{r-1} in un punto (variabile) di C^{r-k-2} ed osservando che esso ha già un S_1 (quello tangente a C^{r-k-2}) comune con quell'S_{r-2} e però giace con questo in un S_{r-1} proiettante, si può dire che *la curva direttrice C^{r-k-2} determinata dagli $r-2k-2$ punti P ha per imagine un punto Q del piano rappresentativo π, così che ai punti di C^{r-k-2} corrispondono (proiettivamente) le direzioni di π uscenti da Q*. Le curve di V_2^{r-1} passanti per un punto di C^{r-k-2} hanno per imagini curve aventi in Q la stessa direzione (o tangente), quella corrispondente al punto stesso.

In modo analogo si trova che *le generatrici $h_1, h_2, \dots, h_{r-2k-2}$ hanno per imagini altrettanti punti $T_1, T_2, \dots, T_{r-2k-2}$ di π, ai punti di una retta h_i corrispondendo (proiettivamente) le direzioni uscenti dal suo punto imagine T_i*.

Il punto Q ed i punti T sono fondamentali per π. Invece i punti P sono fondamentali per V_2^{r-1}; poichè i punti di V_2^{r-1} successivi ad un punto P, cioè contenuti nell'S_2 ivi tangente, hanno per imagini i punti della retta secondo cui π taglia l'S_{r-1} proiettante che passa manifestamente per quell'S_2 tangente (e di più quei punti corrispondono proiettivamente a questi). Siccome un punto P_i giace tanto sulla direttrice C^{r-k-2} quanto sulla generatrice h_i, cioè ha un punto successivo tanto sull'una quanto sull'altra, è chiaro che *le imagini dei punti* $P_1, P_2, \dots, P_{r-2k-2}$ *sono le rette* $QT_1, QT_2, \dots, QT_{r-2k-2}$.

12. — *Le imagini su* π *delle sezioni iperpiane di* V_2^{r-1} *sono curve (razionali) di ordine* $r-k-1$ *che hanno un punto* $(r-k-2)^{\text{uplo}}$ *nel punto* Q *e passano semplicemente per gli* $r-2k-2$ *punti* T: il che risulta dall'osservare che una sezione iperpiana generica ha k punti sulle generatrici g, cioè sull'S_{r-3} di proiezione, ha $r-k-2$ punti su C^{r-k-2} ed un punto su ciascuna delle generatrici h. La direttrice minima C^m (ed analogamente per ogni altra direttrice) è rappresentata da una curva di ordine $m-k$ avente in Q un punto $(m-k-1)^{\text{uplo}}$, (perchè C^m incontra C^{r-k-2} in $m-k-1$ punti (n. 7)) e passante inoltre semplicemente per i punti T. Le generatrici della V_2^{r-1} sono rappresentate dal fascio di rette di centro Q.

Viceversa si considerino tutte le curve dell'ordine $r-k-1$ di un piano π aventi un dato punto Q $(r-k-2)^{\text{uplo}}$ e passanti semplicemente per $r-2k-2$ punti $T_1, T_2, \dots, T_{r-2k-2}$, di cui due qualunque non allineati con Q. Si ha un sistema lineare irriducibile perchè le $r-2k-2$ curve di esso costituite dalle rette $QT_1, \dots, QT_{i-1}, QT_{i+1}, \dots, QT_{r-2k-2}$ da una retta generica per T_i e da altre $k+1$ rette generiche per Q non hanno parte fissa comune, nè sono composte di curve dello stesso fascio (n. 11, Cap. 10.°). Il sistema è inoltre ∞^r perchè nessuna delle condizioni imposte è conseguenza delle rimanenti, bastando osservare l'esistenza di curve (ad es. formate di $r-k-1$ rette) aventi un punto $(r-k-2)^{\text{uplo}}$ in Q, passanti per un certo numero dei punti T e non per i rimanenti, e perchè si ha

$$r=\frac{(r-k-1)(r-k+2)}{2}-\frac{(r-k-2)(r-k-1)}{2}-(r-2k-2).$$

Infine il sistema, essendo di curve razionali, è semplice (n. 6, Cap. 11.°). Ed ora, facendo corrispondere proiettivamente le curve del sistema agli iperpiani di uno spazio S_r, si ha una V_2^{r-1} rigata di questo spazio rappresentata biunivocamente in π e di cui le sezioni iperpiane hanno per imagini le curve del sistema stesso. Infatti due curve generiche di questo sistema si segano in $r-1$ punti variabili e le rette per Q sono imagini di rette della superficie. Del concetto generale che qui è applicato si dirà più ampiamente in seguito (n. 1, Cap. 14.°).

Adesso vogliamo soltanto aggiungere qualche osservazione per la rappresentazione particolare che si ha dalla esposta facendovi $k=0$. Allora il sistema lineare di π è di *curve piane di ordine* $r-1$ *aventi un punto* Q $(r-2)^{\text{uplo}}$ *ed* $r-2$ *punti* T *semplici base. Se il punto* Q *ed i punti* T *si prendono affatto genericamente in* π, poichè per la imagine della direttrice minima C^m quel punto è $(m-1)^{\text{uplo}}$ e questi sono semplici, deve essere $\frac{m(m-1)}{2}+r-2 \leq \frac{m(m+3)}{2}$ cioè $m \geq \frac{r-2}{2}$ e però $m=\frac{r-2}{2}$ se r è pari, $m=\frac{r-1}{2}$ se r è impari: adunque *si ha la specie generale delle* V_2^{r-1}. Per avere le altre specie debbono necessariamente il punto Q ed i punti T essere soggetti a vincoli espressi dall'essere quel punto $(m-1)^{\text{uplo}}$ e questi punti semplici di una curva di ordine $m<\frac{r-2}{2}$. In altre parole si può dire che dalla specie generale si viene alle altre spezzando la detta imagine di C^m in rette per il punto Q ed in una curva residua; il che equivale obbiettivamente a spezzare la direttrice minima C^m in generatrici ed in una direttrice minima residua.

13. — Abbiamo dato a k il valore minimo zero. Diamo ora a k il valore massimo.

Si è sempre supposto $k<m$ e quindi nella trattazione generale fatta potremo ritenere al più $k=m-1$. Anzi, se r è dispari ed $m=\frac{r-1}{2}$, non possiamo dare a k valore maggiore di $m-1$, chè la detta trattazione diverrebbe illusoria (essendo $r-2k-2=-1$). In quelle ipotesi si faccia adunque $k=\frac{r-3}{2}$ e si troverà che *le imagini delle sezioni iperpiane sono curve di ordine* $\frac{r+1}{2}$ *con un punto base* $\left(\frac{r-1}{2}\right)^{\text{uplo}}$ Q *ed un punto base semplice* T. Il punto Q corrisponde ad una direttrice minima $C^{\frac{r-1}{2}}$ della rigata (quella che passa per il punto P), mentre le altre direttrici minime $C^{\frac{r-1}{2}}$ sono tutte rappresentate dalle rette uscenti dal punto T

(ciascuna giacendo in un S_{r-1} colle $\frac{r-3}{2}$ rette g e colla generatrice per P).

Escluso questo caso $\left(r \text{ dispari ed } m=\frac{r-1}{2}\right)$, si vede subito che in tutti gli altri si può spingere k fino al valore m, modificando leggermente le cose esposte. Cioè, fatto $k=m$, l'S_{r-3} di proiezione contiene le m generatrici g e gli $r-2m-2$ punti P e per esso passa un S_{r-2} contenente inoltre C^m e le $r-2m-2$ generatrici h. Il punto Q in cui questo S_{r-2} sega π è imagine quindi non solo di C^m ma delle dette $r-2m-2$ generatrici (alle quali e alla C^m si riduce ora la C^{r-k-2} del caso generale (n. 11)). Precisamente, avendo ciascuno degli $r-2m-2$ punti P per imagini altrettante rette uscenti da Q, le $r-2m-2$ generatrici h hanno per imagini gli $r-2m-2$ punti successivi al punto Q nelle direzioni individuate da quelle rette. Adunque, *essendo m la specie della rigata, le imagini delle sezioni iperpiane di una V_2^{r-1} rigata di S_r $\left(m<\frac{r-1}{2}\right)$ sono curve di ordine $r-m-1$ con un punto $(r-m-2)^{\text{uplo}}$ e con $r-2m-2$ tangenti fisse in questo punto* [1]. Questa e la rappresentazione precedente si dicono *rappresentazioni minime* [2]) delle corrispondenti rigate. Su esse (o sulle rappresentazioni del n. 12) si può fare lo studio della geometria delle curve sulla superficie. Ad es., nel caso generale per r pari, cioè quando sia $m=\frac{r-2}{2}$, nella rappresentazione considerata testè non esistono sulla V_2^{r-1} punti fondamentali, e però le rette del piano rappresentativo sono imagini di ∞^2 *curve di ordine $\frac{r}{2}$ non aventi punti fissi comuni, di cui passa una per due punti generici e di cui due si segano in un solo punto: ecc.*.

---

[1]) Se si suppone $m=0$ si hanno curve di ordine $r-1$ con punto $(r-2)^{\text{plo}}$ Q ed ivi tutte le $r-2$ tangenti fisse. *Queste sono le imagini delle sezioni iperpiane del cono razionale normale di S_r* (non compreso nelle considerazioni del testo); giacchè un punto successivo a Q in direzione diversa dalle $r-2$ tangenti suddette stacca dal sistema lineare imagine il sistema ∞^{r-1} costituito da tutti i gruppi di $r-1$ rette per Q, al qual sistema corrispondono quindi piani passanti per un punto, ciascuno segante secondo $r-1$ rette (generatrici), e però ecc..

[2]) Si prova infatti, colla teoria delle trasformazioni cremoniane, che non si può rendere più basso l'ordine delle imagini delle sezioni iperpiane.

La scelta delle rappresentazioni minime, talvolta utile per ragione di semplicità, ha però lo svantaggio, come osserva Segre [1]), di non far sempre apparire le dipendenze fra le varie superficie date dalle rappresentazioni stesse. Così, nel caso nostro, non è più possibile verificare sulle rappresentazioni minime, come si è fatto sulla rappresentazione del n. 12 ($k=0$), la provenienza di tutte le specie di V_2^{r-1} rigate di S_r dalla specie generale. Infatti i due tipi del presente n. sono essenzialmente diversi e nel secondo tipo, decrescendo m, cresce l'ordine delle imagini delle sezioni iperpiane.

14. — Consideriamo una rigata razionale W_2^{r-1} di uno spazio $S_{r'}$ ($r' < r$), la quale, come sappiamo (n. 2), si può ottenere per proiezione da una rigata razionale normale (di una certa specie) V_2^{r-1}. Se $S_{r-r'-1}$ è lo spazio di proiezione, tutte e sole le sezioni di W_2^{r-1} con gli $S_{r'-1}$ di $S_{r'}$ si ottengono tagliando W_2^{r-1} cogli iperpiani di S_r che passano per $S_{r-r'-1}$. Segue da ciò che dalla rappresentazione piana della rigata V_2^{r-1} si ottiene subito una rappresentazione piana della W_2^{r-1}, staccando dal sistema lineare ∞^r delle curve imagini delle sezioni iperpiane di V_2^{r-1} il sistema lineare $\infty^{r'}$ composto delle curve corrispondenti agli $\infty^{r'}$ iperpiani passanti per l'$S_{r-r'-1}$. Viceversa, preso un sistema lineare $\infty^{r'}$ subordinato di quel sistema lineare ∞^r, esiste una rigata proiezione di V_2^{r-1}, di cui esso dà le imagini delle sezioni iperpiane.

Si può aggiungere che, se il sistema subordinato si stacca senza imporre passaggi per punti, l'ordine della rigata proiezione è $r-1$; mentre se si impongono passaggi per t punti (semplici), (onde l'$S_{r-r'-1}$ si appoggia in t punti a V_2^{r-1}) l'ordine è $r-1-t$. Fissando soltanto tali passaggi, si ottengono dalle rigate razionali normali di S_r le rigate razionali normali degli spazî inferiori. In ogni caso, la scelta particolare di un sistema subordinato equivale a dare posizione particolare allo spazio di proiezione $S_{r-r'-1}$.

Delle cose esposte si troverà una generalizzazione ed una più diffusa trattazione nel n. 4 del Cap. 14.°. Qui noteremo soltanto che ciascuna specie di rigate razionali normali dà origine per proiezione ad una classe

---

[1]) In una nota al n. 9 della Memoria di CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Rendiconti di Palermo, 4, 1890).

o gruppo di rigate razionali; classi o gruppi che sono precisamente gli stessi ai quali giunse Clebsch con mezzi algebrici [1]).

15. — Facciamo un'applicazione allo studio della superficie gobba di 3.° grado F dello spazio ordinario, che è certo razionale, come si vede, ad es., tagliandola con un piano che passi per una sua generatrice.

La F si ottiene come proiezione sopra un S^*_3, fatta da un punto esterno O, della V_2^3 di S_4 con una direttrice rettilinea s (unica specie esistente in S_4, esclusi i coni); e la proiezione s' di s sopra S^*_3 è una *direttrice semplice* di F. Poi un S_3 generico per O sega V_2^3 in una cubica razionale normale, di cui una sola corda passa per O: quindi le ∞^1 corde di V_2^3 uscenti da O giacciono tutte in un S_2 che taglia V_2^3 secondo una conica d, e questa conica si proietta (doppiamente) in una retta d', *direttrice doppia* per la superficie F.

La rappresentazione minima di V_2^3 è quella (n. 13) in cui le imagini delle sezioni iperpiane sono le coniche per un punto. Per conseguenza (n. 14) *la rappresentazione minima di* F *è data da un sistema lineare (incompleto)* ∞^3 *di coniche per un punto* Q. *Questo punto* Q *è l'imagine della direttrice semplice* s'.

Nella suddetta rappresentazione minima di V_2^3 la conica d ha evidentemente per imagine una retta d'_1, sulla quale le imagini delle coppie dell'involuzione segata su d dal fascio di raggi di centro O sono le coppie di una certa involuzione I_2^1. Ora ogni S_3 per O passa per una coppia di punti dell'involuzione su d, i quali si proiettano in un solo punto della direttrice d'. Dunque, *nella suddetta rappresentazione piana di* F, *l'imagine della direttrice doppia* d' *è una retta* d'_1, *ed i punti di* d', *in quanto appartengono all'una o all'altra falda di* F *passante per* d', *hanno*

---

[1]) Se $x_i = \varphi_i(\lambda)$, $x'_i = \psi_i(\lambda)$ sono le formule che dànno due sezioni iperpiane di una superficie rigata razionale e sono omologhi, cioè sulla stessa generatrice, due punti corrispondenti allo stesso valore di λ, i punti della rigata sono dati dalle formule $x_i = \varphi_i(\lambda) + \mu\psi_i(\lambda)$, ossia $\left(\text{posto } \lambda = \frac{y_2}{y_3}, \mu = \frac{y_1}{y_3}\right)$ dalle

$$x_i = y_3\varphi_i(y_2 y_3) + y_1\psi_i(y_2 y_3);$$

formule di rappresentazione (non minima) della rigata stessa. Queste formule (di cui quelle del n. 9 sono caso particolare) sono il punto di partenza della Memoria di Clebsch: *Ueber die geradlinigen Flächen* ... (Math. Ann., 5, 1872).

per imagini coppie di una involuzione I_2^1. Quindi *le* ∞^3 *coniche, imagini delle sezioni piane, sono le coniche passanti per* Q *e per le coppie dell'involuzione* I_2^1.

Le rette partenti da Q sono imagini delle generatrici di F ed il fascio involutorio che da Q proietta l'involuzione I_2^1 è imagine dell'involuzione che viene stabilita nell'ente ∞^1 razionale costituito dalle generatrici di F, quando si considerino come corrispondenti due generatrici uscenti da un medesimo punto della direttrice doppia d'. In particolare le rette che da Q proiettano i punti doppi U, U_1 della involuzione I_2^1 rappresentano le generatrici, dette *singolari* (o *a carattere sviluppabile)*, le quali incontrano d' nei due punti che si denominano *uniplanari* (n. 10, Cap. 8.º) od anche *cuspidali.*

16. — Prendiamo in S_4 il centro O di proiezione nel piano determinato dalla direttrice s di V_2^3 e da una generatrice l qualunque. La superficie cubica rigata F_1, proiezione di V_2^3 su S^*_3, ha ora la direttrice semplice e doppia coincidenti in una sola retta s', nella quale cade pure una generatrice (cioè si ha il caso osservato per la prima volta da Cayley); giacchè ora la conica d si spezza nelle rette s, l. Può notarsi che l'S_3 contenente l e la sua generatrice successiva, cioè contenente tutti gli S_2 tangenti a V_2^3 nei punti di l (e quindi in particolare il piano sl) è proiettante, e però sega su S^*_3 un piano che è tangente ad F_1 in ogni punto di s'. L'altro piano tangente in un tal punto (proiezione del piano tangente a V_2^3 nel punto corrispondente di s) è variabile coll'unica generatrice passante per il punto stesso: ecc..

Siccome gli S_3 per O segano s, l in due punteggiate prospettive, è chiaro che, nella rappresentazione piana di F_1, le ∞^3 coniche imagini delle sue sezioni piane sono definite dal passare per Q (imagine di s') e dal corrispondere le loro direzioni uscenti da Q proiettivamente alle loro intersezioni (residue) con una retta l' (imagine di l) passante per lo stesso punto Q.

17. — Ritorniamo alla superficie gobba di 3.º grado generale F, e consideriamo una curva γ' del piano rappresentativo π e la curva gobba γ di F, della quale essa è l'imagine. Se γ' è d'ordine n e passa α volte per Q, γ è d'ordine $N = 2n - \alpha$ (perchè una conica imagine di sezione piana ha questo numero d'intersezioni con γ', fuori di Q) ed attraversa α volte s' ed n volte d'. La curva γ può acquistare punto doppio (ed analogamente punti di maggiore multiplicità) sia perchè γ' possiede punto

doppio, sia perchè γ' passa per una coppia dell'involuzione I_2^1 su d'_1, onde obbiettivamente γ passa per un punto della retta doppia d' due volte, una su ciascuna falda (nel primo caso il genere di γ, che è il genere di γ', diminuendo di uno, nel secondo no): ma noi considereremo queste curve γ particolari come casi limiti di quelle generali che sono rappresentate su π da curve γ' di un certo ordine n, con un solo punto multiplo secondo α (≥ 0) in Q e non passanti per alcuna coppia dell'involuzione I_2^1. Potremo quindi dividere le curve gobbe esistenti su F in tante *famiglie*, caratterizzando ciascuna famiglia coi numeri n ed α ed indicandola col simbolo $(n\,\alpha)$.

Le curve della famiglia $(n\,\alpha)$ hanno l'ordine N ed il genere p dati dalle formule

$$N = 2n - \alpha \ , \ p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{(n-1-\alpha)(n-2+\alpha)}{2} .$$

Da queste, se si pone $x = n - 2 + \alpha$, $y = n - 1 - \alpha$, onde $x = y + 2\alpha - 1$ (e però dei due numeri interi x, y uno deve essere pari e l'altro impari), si ricava

$$N = \frac{x + 3y + 5}{2} \ , \ p = \frac{xy}{2} .$$

Escluso il caso $n = 1$, che si discute subito [1]), una curva (irriducibile) d'ordine n può avere al più un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$; quindi $\alpha \leq n - 1$ ed i numeri x, y non possono essere negativi.

Raccogliamo le suddette famiglie in gruppi, ponendo in un medesimo gruppo quelle famiglie per le quali il genere p ha il medesimo valore. Or bene, *se $p > 0$ ogni gruppo contiene un numero finito di famiglie.* In vero il numero dato $2p$ dovrà spezzarsi in tutti i modi possibili in due fattori interi e positivi x, y, l'uno pari, l'altro impari, escludendo quelle coppie di valori per x, y, per le quali y supera x di più di un'unità, perchè $\alpha = \frac{x + 1 - y}{2}$ non può essere negativo. In particolare per $p = 2^h$ ($h > 0$) vi è una sola famiglia di curve per cui $x = 2^{h+1}$, $y = 1$; ed i primi

[1]) Le rette del piano rappresentativo che passano per Q sono imagini delle generatrici di F: quelle che non passano per Q sono imagini delle ∞^2 coniche di F (che si ottengono segandola con piani passanti per le generatrici).

valori di p danno i seguenti gruppi di famiglie di curve

	x	y	N	n	α
$p=1$	2 1	1 2	5 6	3 3	1 0
$p=2$	4	1	6	4	2
$p=3$	6 3 2	1 2 3	7 7 8	5 4 4	3 1 0

Invece, se $p=0$, deve essere $xy=0$ e quindi o $x=0$ o $y=0$. Nel primo caso si ha $n=2$, $\alpha=0$, e quindi si hanno in π le coniche non passanti per Q, cui corrispondono quartiche di 2.ª specie di F bisecate dalle generatrici. Nel secondo caso si hanno *infinite famiglie di curve razionali situate sopra* F, poichè dall'essere $y=0$ segue $\alpha=n-1$, $N=n+1$, essendo n un numero intero qualunque (>1). Le curve di queste famiglie, come si rileva subito dalla rappresentazione piana, sono incontrate in un sol punto da ogni generatrice della F.

In particolare, per $n=3$, si ha una seconda famiglia di quartiche di 2.ª specie. La prima famiglia di tali quartiche, notata dianzi, ne contiene ∞^5 ed ognuna incontra le generatrici di F in due punti: la seconda, ora osservata, ne contiene ∞^6 ed ognuna incontra le generatrici in un solo punto [1]).

18. — Applichiamo da ultimo la rappresentazione piana di F alla determinazione delle sue linee asintotiche, cioè delle linee le cui tangenti sono rette osculatrici di F. Si hanno in generale due famiglie di asintotiche, delle quali una per la F (come per ogni superficie rigata) è fornita dalle generatrici.

Per trovare l'altra famiglia di asintotiche, consideriamo un punto M di F e la generatrice g passante per esso. Per avere l'elemento di asin-

[1]) Le osservazioni precedenti sono di CLEBSCH (Math. Ann., I, 1868).

totica passante per M (oltre g) dobbiamo condurre in M il piano tangente ad F e poi la tangente in M alla conica che forma insieme a g l'intersezione di quel piano con F. Nel piano rappresentativo π il punto M abbia per imagine M′: la generatrice g avrà per imagine la retta QM′ e la conica suddetta avrà per imagine la retta che congiunge M′ col punto Y corrispondente nell'involuzione I_2^1 a quel punto X in cui QM′ sega d'_1 (alla qual coppia X, Y corrisponde l'altro punto comune a g ed alla conica, esistente su d'). L'elemento di questa retta M′Y uscente da M′ è adunque imagine di un elemento di asintotica. Ma la conica che passa per M′ e tocca nei punti doppi U, U_1 di I_2^1 le rette QU, QU_1 ha evidentemente la retta QX per polare di Y e quindi essa tocca in M′ la retta M′Y; cosicchè il detto elemento imagine è quello partente da M′ della conica stessa. Ne risulta senz'altro (potendosi ripetere le stessa cosa per il punto successivo ad M′ comune alla conica ed alla imagine dell'asintotica, e così di seguito) che la conica è imagine dell'asintotica passante per M e quindi che (n. 17) *le asintotiche di* F *sono quartiche gobbe di 2.ª specie.* Le loro imagini costituiscono un fascio di coniche bitangenti (tangenti in U, U_1 alle QU, QU_1).

Se diciamo h, l le generatrici singolari di F, rappresentate in π dalle QU, QU_1, sono h, l tangenti ad ogni asintotica nei punti cuspidali hd', ld' aventi per imagini i punti U, U_1: anzi sono rette osculatrici, perchè un piano per h (ad es.) contiene, fuori del punto cuspidale hd', un sol punto di ogni asintotica, la sezione di quel piano con F essendo rappresentata dalla retta QU e da una retta per U. Le asintotiche sono adunque *quelle particolari quartiche di 2.ª specie che posseggono due tangenti osculatrici* (n. 13, Cap. 12.°). I due piani stazionari di ogni asintotica sono i piani hs', ls', le sezioni dei quali con F sono rappresentate rispettivamente dalle QU, QU_1, ciascuna contata due volte.

Se si considera la quadrica passante per una asintotica (e quindi per le h, l), questi medesimi piani hs', ls' sono suoi piani tangenti nei punti cuspidali hd', ld'. Infatti il piano hs' (ad es.), incontrando l'asintotica in quattro punti raccolti nel punto cuspidale hd', deve segare quella quadrica, oltrechè in h, in una retta (unisecante dell'asintotica e quindi) passante per il punto hd', retta che dovrà inoltre passare per il punto ls'. Parimente la stessa quadrica passa per la retta congiungente il punto ld' col punto hs'. Concludiamo che *il considerato sistema di asintotiche* *è segato su F dal fascio di quadriche passanti per le due rette h, l e per le due congiungenti rispettivamente i punti hd', ls'; ld', hs'* [1]).

19. — Le superficie rigate razionali ammettono una importante generalizzazione.

Analogamente al n. 1, osserviamo dapprima che una V_{i+1}^{r-i} $(i > 1)$ appartenente ad S_r non solo è normale (n. 10, Cap. 9.º), ma è *razionale*, giacchè, presi $r-i-1$ suoi punti generici, dal loro S_{r-i-2} la V_{i+1}^{r-i} è proiettata (biunivocamente) sopra un S_{i+1}.

Si vedrà in seguito (n. 10, Cap. 14.º) che le V_{i+1}^{r-i} di S_r, escluso un caso particolare, sono costituite di ∞^1 S_i. Queste, che vogliamo ora soltanto considerare, indicheremo con S_i-V_{i+1}^{r-i} a significare il loro modo di generazione.

Le S_i-V_{i+1}^{r-i} sono razionali anche come luogo di S_i, perchè la sezione con un S_{r-i} generico è una curva razionale normale.

20. — Si ha il teorema analogo a quello del n. 2: — *Ogni* S_i-$V_{i+1}^{r'-i}$ *di uno spazio* $S_{r'}$, *se* $r > r'$, *è proiezione di una* S_i-V_{i+1}^{r-i} *di* S_r —.

La dimostrazione si fa per induzione, il teorema essendo già vero per $i=1$. Si tagli S_i-$V_{i+1}^{r'-i}$ con un $S_{r'-1}$ generico di $S_{r'}$: la sezione sarà una S_{i-1}-$V_i^{r'-i}$, la quale, avendo ammesso il teorema per i valori inferiori ad i, preso un S_r per l'$S_{r'}$ e in esso un $S_{r-r'-1}$ indipendente dall'$S_{r'}$, si potrà ritenere come proiezione dall'$S_{r-r'-1}$ sopra l'$S_{r'-1}$ di una S_{i-1}-W_i^{r-i} di $S_{r-1} \equiv S_{r-r'-1} \cdot S_{r'-1}$. Un S_{r-i-1} generico di S_{r-1} e passante per l'$S_{r-r'-1}$ incontra S_{i-1}-W_i^{r-i} in $r-i$ punti $P_1, P_2, \dots, P_{r-i}$ [2]), i quali hanno

---

[1]) Cfr. CREMONA, *Rappresentazione della superficie di Steiner* ... (Rend. Ist. lomb. 4, 1867). Il fatto della algebricità delle linee asintotiche per le superficie gobbe di 3.º grado fu poi riconosciuto da CREMONA sussistere per tutte le superficie gobbe razionali con due direttrici rettilinee nella Memoria: *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe* ... (Annali di Mat., 1 (2), 1868). LIE (Math. Ann. 5, 1871) osservò più in generale che se una rigata algebrica fa parte di un complesso lineare, la curva della rigata che ha per tangenti rette del complesso è un'asintotica; onde, se la rigata è in ∞^1 complessi lineari, ne seguono le ∞^1 asintotiche. Cfr., anche per indicazioni bibliografiche, le note di PITTARELLI nei Rendiconti dei Lincei del 1891 e 1894.

[2]) Per quanto non sia necessario per la dimostrazione, notisi che i punti $P_1, P_2, \dots, P_{r-i}$ sono indipendenti (e quindi la W_i^{r-i}, di cui si parla in appresso, è razionale normale): il che si può dimostrare così. Dapprima un S_{r-2} generico per l'$S_{r-r'-1}$ sega S_{i-1}-W_i^{r-i} in una S_{i-2}-W_{i-1}^{r-i} appartenente all'S_{r-2} (altri-

per proiezioni altrettanti punti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{r-i}$ di S_i-V_{i+1}^{r-i} posti nell'$S_{r'-i-1}$ in cui quell'S_{r-i-1} sega $S_{r'}$. Un $S_{r'-i}$ di $S_{r'}$ condotto per questo $S_{r'-i-1}$, esternamente all'S_{r-1}, sega S_i-V_{i+1}^{r-i} in una curva razionale V_1^{r-i} che, proiettando dall'$S_{r-r'-1}$, dà in $S_{r-i} \equiv S_{r'-i} . S_{r-r'-1}$ un $S_{r-r'-1}$-cono di cui $r-i$ spazî generatori passano per i punti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-i}$. Si descriva per questi e per un altro punto P_{r-i+1} generico su quel cono una curva razionale W_1^{r-i}, come è possibile (n. 15, Cap. 12.°). Allora esiste una corrispondenza proiettiva fra gli S_{i-1} della S_{i-1}-W_i^{r-i} e i punti di W_1^{r-i} (proveniente dalla corrispondenza proiettiva che ha luogo fra gli S_{i-1} di S_{i-1}-V_i^{r-i} ed i punti di V_1^{r-i}), nella quale $r-i$ punti $P_1, P_2, \ldots, P_{r-i}$ giacciono nei loro S_{i-1} corrispondenti. È chiaro che il luogo degli S_i che congiungono gli S_{i-1} ai loro punti corrispondenti appartiene ad S_r, ha per proiezione S_i-V_{i+1}^{r-i} ed è di ordine $r-i$. Per quest'ultima affermazione si faccia passare un S_{r-i+1} generico per la W_1^{r-i}, con esso si seghi la S_{i-1}-W_i^{r-i} e si applichi il primo teorema del n. 7.

Si hanno qui osservazioni analoghe a quelle del n. 2. Nella dimostrazione si è supposto S_i-V_{i+1}^{r-i} razionale come luogo di S_i: dal teorema (per il n. 19) risulta che essa è razionale anche come luogo di punti. Viceversa una S_i-V_{i+1}^{r-i} razionale come luogo di punti lo è come luogo di S_i, perchè nella sua rappresentazione sopra un S_{i+1} l'∞^1 di S_i sarà rappresentata da un fascio di ipersuperficie (n. 5, Cap. 10.°).

Dal teorema segue pure che ha lo stesso senso dire di una V_{i+1} di S_r, la quale sia luogo di $\infty^1 S_i$, che è dell'ordine $r-i$ (cioè che è una S_i-V_{i+1}^{r-i}) ovvero che è razionale normale.

21. — Sulle S_i-V_{i+1}^{r-i} accenneremo soltanto al loro doppio modo di generazione proiettiva analogo a quello esposto per le curve e le rigate

---

menti S_{i-1}-W_i^{r-i} non apparterrebbe all'S_{r-1}) ed irriducibile, perchè, spezzandosi, dovrebbe necessariamente spezzarsi in una varietà luogo di S_{i-2} e in un certo numero di S_{i-1}, mentre gli S_{r-2} per gli S_{i-1} di S_{i-1}-W_i^{r-i} e per l'$S_{r-r'-1}$ (indipendente da essi) sono $\infty^{1+(r-i-1)-(r-r')} = \infty^{r'-i}$ e gli S_{r-2} per l'$S_{r-r'-1}$ sono $\infty^{r'-1}$ ed è $r'-i < r'-1$. Similmente si vedrebbe che è irriducibile ed appartenente ad un S_{r-3} (generico di S_{r-2} e passante per l'$S_{r-r'-1}$) la sua sezione con S_{i-2}-W_{i-1}^{r-i}: e così di seguito, fino a che si arriva alla sezione suddetta con un S_{r-i-1}.

razionali normali (n. 5, Cap. 12.° e n. 9), rimandando per altre proprietà delle S_i-V_{i+1}^{r-i} ai lavori su queste varietà [1]).

Un S_{r-1} che passi per un S_i di una S_i-V_{i+1}^{r-i} la taglia ulteriormente in una S_{i-1}-V_i^{r-i-1} di un S_{r-2}; onde tutti gli iperpiani che passano per questo S_{r-2} segano ulteriormente S_i-V_{i+1}^{r-i} in un S_i. Considerando $r-i$ di tali S_{r-2} come sostegni di fasci di S_{r-1}, *ogni* S_i *della* S_i-V_{i+1}^{r-i} *si ottiene come intersezione di* $r-i$ S_{r-1} *corrispondenti di* $r-i$ *fasci riferiti proiettivamente fra loro.* Dalla quale generazione discende, nel solito modo, l'altra: — *Una* S_i-V_{i+1}^{r-i} *è il luogo delle intersezioni degli* S_{i+1} *corrispondenti (che s' intersecano) di due stelle proiettive, aventi per sostegno due* S_i —.

22. — Ma questa doppia generazione e le analoghe che abbiamo vedute, come quella della V_3^3 con dieci punti doppî di S_4 (n. 25, Cap. 8.°), rientrano tutte nella seguente proprietà generale dovuta al Veronese [2]).

Consideriamo le $t \geq m$ equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12} + \ldots + \lambda_m u_{1m} = 0 \\ \lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{22} + \ldots + \lambda_m u_{2m} = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_1 u_{t1} + \lambda_2 u_{t2} + \ldots + \lambda_m u_{tm} = 0, \end{cases}$$

ove le u_{ik} sono forme lineari nelle coordinate x_i di S_r e le λ sono parametri variabili. Esse rappresentano t stelle di iperpiani aventi per centri altrettanti S_{r-m} [3]): e, se riteniamo come corrispondenti gli iperpiani di queste stelle le cui equazioni si ricavano dalle (1) ponendovi per le λ i medesimi sistemi di valori, le stelle stesse saranno riferite proiettivamente fra loro. Ora si supponga che un punto di coordinate x_i sia comune a t iperpiani corrispondenti di queste t stelle proiettive: le

---

[1]) L'estensione al caso di $i=2$ delle proprietà esposte per le rigate razionali normali fu fatto dal SEGRE nel lavoro: *Sulle varietà normali a tre dimensioni ...* (Atti della R. Accad. di Torino, 21, 1885). L'estensione al caso di i qualunque fu fatta dal BELLATALLA, seguendo la via tracciata dal SEGRE, nella Nota: *Sulle varietà razionali normali ...* (Atti suddetti, 36, 1901).

[2]) Cfr. l'Abschnitt V. della Memoria citata nella prefazione.

[3]) Per brevità di discorso supporremo $t \leq r$ e quindi anche $m \leq r$. Allora i detti centri e quelli di cui si dirà in appresso esistono effettivamente. Quando questi centri non esistano, ciascuna delle relative stelle è sostituita dalla totalità degli iperpiani di S_r: ma valgono sempre in sostanza le proprietà che esporremo.

x_i renderanno le (1) soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, e però dovrà essere

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{t1} & u_{t2} & \dots & u_{tm} \end{vmatrix} = 0$$

(cioè dovranno annullarsi tutti i minori di ordine m di questa matrice, il che si ottiene annullandone $t - m + 1$), e reciprocamente.

La varietà V definita dalla (2) è di dimensione $r - t + m - 1$ e si può dimostrare [1]) essere di ordine $\binom{t}{m-1}$. La stessa varietà si ottiene in quest'altro modo. Consideriamo il sistema di equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho_1 u_{11} + \rho_2 u_{21} + \dots + \rho_t u_{t1} = 0 \\ \rho_1 u_{12} + \rho_2 u_{22} + \dots + \rho_t u_{t2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \rho_1 u_{1m} + \rho_2 u_{2m} + \dots + \rho_t u_{tm} = 0 , \end{cases}$$

la cui matrice è sempre il primo membro della (2), scambiate soltanto le linee colle colonne. Esse rappresentano m stelle proiettive di centri S_{r-t}. Le coordinate x_i di un punto di V, in quanto soddisfano alle (2), rendono la matrice delle (3) di caratteristica $m - 1$: onde, per la sostituzione di quelle coordinate nelle (3), queste possono soddisfarsi con ∞^{t-m} sistemi diversi (a meno di un fattore di proporzionalità) delle ρ. Ciò significa che per il punto x di V passano m $S_{r-t+m-1}$ corrispondenti delle m stelle proiettive suddette, e reciprocamente. Adunque (essendo $t \geq m$) *la varietà* V, *generata dalle intersezioni* S_{r-t} *di* t *iperpiani corrispondenti delle* t *stelle proiettive* (1), *è anche generata dalle intersezioni degli* $S_{r-t+m-1}$ *corrispondenti (che si tagliano) delle* m *stelle proiettive* (2): *e viceversa.* I due sistemi (1), (3) sono i così detti sistemi *coniugati* di Veronese.

23. — I sostegni delle stelle (3) esistono manifestamente sulla varietà V e possono essere scelti genericamente fra gli S_{r-t} d'intersezione

---

[1]) Cfr. il n. 5 del lavoro di Segre citato nella nota [1]) del n. 9, Cap. 10.° (sostituendo ora ad m, n rispettivamente $t - 1$, $m - 1$).

di t iperpiani corrispondenti delle stelle (1), giacchè, dando nelle (1) m sistemi di valori alle λ (di cui il determinante sia $\neq 0$) e combinando linearmente con parametri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ per ogni sistema di valori delle λ, si ottengono, invece delle (3), m altre stelle proiettive che generano ancora la varietà V per una notissima proprietà delle matrici.

Similmente i sostegni delle stelle (1) possono essere scelti genericamente fra gli S_{r-m} d'intersezione di m iperpiani corrispondenti delle stelle (3). *Se $t=m$ tutti questi S_{r-m} (come quegli S_{r-t}) appartengono a* V (che è allora una ipersuperficie di ordine t); *se $t>m$, questi S_{r-m} sono spazî secanti della varietà* V, cioè tagliano V in una varietà di dimensione superiore a quella secondo cui la tagliano gli S_{r-m} generici. In vero possiamo supporre, senza diminuzione di generalità, per ciò che si disse innanzi, che uno generico dei detti S_{r-m} sia quello dato dagli m iperpiani $u_{11}=0$, $u_{12}=0$, ..., $u_{1m}=0$ (ad es.). Tralasciando nella (1) la prima equazione, le rimanenti rappresentano $t-1$ stelle proiettive che generano una varietà V' di dimensione $r-t+m$, cioè superiore di una unità a quella di V e contenente V stessa. La V' è segata dai precedenti m iperpiani (cioè dal loro S_{r-m} d'intersezione) in una varietà, che appartiene evidentemente a V, di dimensione $r-t$, superiore di una unità alla dimensione della sezione di V con un S_{r-m} generico.

Facciamo ancora quest'altra osservazione. *Se esiste un S_{r-t+1} che sia intersezione di iperpiani corrispondenti dei t sistemi* (1), *esiste anche un S_{r-m+1} (spazio secante o giacente in* V, *secondochè $t>m$ o $t=m$) che è intersezione di iperpiani corrispondenti degli m sistemi* (3). Amendue le proprietà sono infatti espresse dall'esistere opportuni valori dei parametri λ, ρ per i quali si abbia identicamente (nelle variabili x)

$$\sum_{ih} \lambda_i \rho_h u_{ih} \equiv 0 \qquad (i=1,2,\dots,m;\ h=1,2,\dots,t).$$

Notiamo infine che le proposizioni di questo n. e del precedente si estendono facilmente al caso in cui le u_{ih}, anzichè lineari, sieno forme di qualunque ordine.

Capitolo 14.°

Le V_2^{r-1} di S_r.

1. — Premettiamo lo sviluppo di un concetto fondamentale e fecondo della geometria moderna (che deriva dalla rappresentazione esposta nel n. 2, Cap. 10.°), il quale fa dipendere la ricerca e lo studio di proprietà non proiettive da quelli di proprietà proiettive. Esporremo le relative considerazioni in un caso particolare, ma si scorge facilmente che esse hanno carattere generale.

Abbiasi una superficie F, appartenente ad S_r, rappresentabile razionalmente (non è necessario che lo sia birazionalmente) sopra un piano π per mezzo delle formule

$$x_i = f_i(y_l) \qquad (i = 0, 1, \dots, r \; ; \; l = 0, 1, 2), \tag{1}$$

le f_i essendo forme prime fra loro e, per appartenere F ad S_r, anche linearmente indipendenti. Alle sezioni iperpiane di F date dagli iperpiani

$$\sum \lambda_i x_i = 0 \tag{2}$$

corrispondono le curve di una sistema lineare ∞^r, che diremo $|C|$, di equazione

$$\sum \lambda_i f_i(y_l) = 0; \tag{3}$$

sistema irriducibile, perchè, essendo le f_i prime fra loro, non vi può essere parte fissa e perchè, se le f_i fossero forme di due altre forme (cfr. n. 11, Cap. 10.°), le (1) definirebbero una curva razionale, non una superficie. Fra gli iperpiani (2) di S_r e le curve (3) di $|C|$ esiste proiettività, essendo corrispondenti quelli dati dai medesimi valori dei parametri λ (cfr. il citato n. 2).

Viceversa, abbiasi sopra un piano π un sistema lineare ∞^r, $|C|$, irriducibile, definito dalle (3), e si stabilisca una proiettività fra questo sistema e la totalità degli iperpiani di uno spazio S_r; il che si fa, senza limitazione, scrivendo la (2) e fissando che ogni iperpiano dato da questa equazione corrisponda alla curva (3) data dai medesimi valori dei parametri λ. Allora ogni punto y di π individua un punto x di S_r, in quanto y stacca da $|C|$ un sistema lineare ∞^{r-1} dato dai valori di λ soddisfacenti alle (3), ove si sieno poste le coordinate di y, e a questo sistema lineare corrispondono per la proiettività, gli ∞^{r-1} iperpiani (di una stella) passanti per un punto x. Anzi, notando che anche questi iperpiani sono dati dai valori di λ soddisfacenti alle (2), ove si sono poste le coordinate di x, si vede che le (2), (3) risultano identiche nelle λ e quindi che le coordinate del punto x si esprimono colle (1) per le coordinate del punto y. Se y descrive π, x descrive una superficie F, le cui sezioni iperpiane corrispondono alle curve di $|C|$ (e le cui equazioni nascono dalle (1) coll'eliminazione delle y_i); non descrive una curva, perchè, essendo $|C|$ irriducibile, le sue curve per un punto generico non passano per infiniti punti, cioè un punto generico x non corrisponde ad infiniti punti y [1]).

2. — Però il sistema lineare $|C|$ può essere semplice o composto, non con un fascio, come ora si è visto, ma con una involuzione di ordine ρ (n. 12, Cap. 10.°): ossia possono le (1) dare un solo o ρ sistemi di valori per le y_i corrispondenti ad un sistema generico delle x_i (soddisfacenti alle equazioni di F).

Se il sistema $|C|$ è semplice, e quindi anche le y_i si esprimono razionalmente per le x_i, la rappresentazione di F su π è biunivoca ed F è razionale. L'ordine di F è manifestamente il numero delle intersezioni variabili di due curve generiche di $|C|$, cioè il grado D (>0) di questo sistema.

---

[1]) Se si voglia considerare un sistema lineare riducibile per questo soltanto che contiene una parte fissa, si può rappresentare, nel modo detto, il sistema lineare descritto dalla parte variabile (irriducibile) colle sezioni iperpiane di una superficie F e poi associare a ciascuna di queste sezioni iperpiane quella curva di F che corrisponde alla detta parte fissa.

Se il sistema $|C|$ è composto con una involuzione di ordine $\rho(>1)$, la corrispondenza fra π ed F è razionale in un solo senso e l'ordine di F è $\frac{D}{\rho}$, giacchè ogni gruppo dell'involuzione dà un solo punto di F e per ogni punto comune a due curve di $|C|$ queste ne hanno altri $\rho - 1$ formanti con quello un gruppo dell'involuzione. La superficie F è sempre razionale, avendosi il teorema di Castelnuovo già ricordato altrove (nota al n. 17, Cap. 9.°), per il quale ai gruppi dell'involuzione su π si possono far corrispondere birazionalmente i punti di un altro piano.

Se si vuole evitare la precedente distinzione fra sistemi lineari semplici e composti, cioè, anche nel secondo caso, pensare ad una corrispondenza biunivoca fra π ed F bisogna concepire questa superficie ripetuta ρ volte, o, come si dice, ρ^{upla}, e quindi sempre di ordine D. Con questa considerazione si può spesso far rientrare il secondo caso nel primo.

3. — Così ogni sistema lineare $|C|$ irriducibile, semplice (il che sottintenderemo sempre in seguito) di curve piane è collegato ad una superficie razionale F, e reciprocamente. Si dice indifferentemente che il sistema $|C|$ è rappresentativo o imagine della superficie F, ovvero F di $|C|$, perchè appunto (a seconda delle questioni) si potrà passare dalle proprietà del sistema a quelle della superficie o viceversa.

Come abbiamo visto, *la dimensione di* $|C|$ *è la dimensione dello spazio a cui appartiene* F *ed il grado di* $|C|$ *è l'ordine di* F, ma la proprietà che rivela l'importanza di quella relazione è che *ogni trasformazione birazionale di un piano* π, *nel quale sia fissato un sistema lineare* $|C|$, *equivale ad una trasformazione proiettiva della superficie* F *rappresentativa di* $|C|$, *e reciprocamente:* e quindi la geometria di quelle trasformazioni birazionali si traduce in questa geometria proiettiva e viceversa. In vero sia π' il piano riferito birazionalmente a π ed in esso sia $|C'|$ il sistema lineare trasformato di $|C|$ [1]. Se F' di S'_r indica la superficie rappresentativa di $|C'|$, fra F ed F' si ha una corrispondenza biunivoca, corrispondendosi due

[1]) Che il sistema $|C'|$ trasformato di $|C|$ sia lineare ed anzi riferito proiettivamente a questo, si dimostra (anche se soltanto la trasformazione è razionale in un senso) in modo analogo a quello del n. 1, cioè dalle

$$x_i = f_i(y) \quad , \quad \Sigma \lambda_h \psi_h(x) = 0$$

si ricava

$$\Sigma \lambda_h \psi_h(f(y)) = 0 .$$

punti aventi per imagini due punti corrispondenti fra loro nella trasformazione birazionale di π, π'. Ora quella corrispondenza biunivoca giace evidentemente nella corrispondenza proiettiva fra le totalità degli iperpiani di S_r, S'_r, le cui sezioni con F, F' corrispondono alle curve di $|C|$ $|C'|$ rispettivamente, corrispondenza proiettiva nascente dall'essere quelle totalità proiettive ai sistemi $|C|$, $|C'|$ e questi fra loro. Analogamente si dimostra la reciproca.

Possiamo anche dire (ritenute non differenti due superficie in corrispondenza proiettiva) che *ad ogni superficie rappresentabile biunivocamente sul piano corrisponde una famiglia di sistemi lineari di curve piane, deducibili l'uno dall'altro per trasformazioni birazionali.*

4. — Se una superficie (irriducibile) F_1 appartenente ad S_{r_1} è proiezione (biunivoca) di una superficie (irriducibile) F appartenente ad S_r $(r_1 < r)$ da uno spazio S_{r-r_1-1}, le sezioni iperpiane di F_1 sono proiezioni di quelle di F, ottenute cogli iperpiani passanti per lo spazio di proiezione, liberate eventualmente di una curva fissa giacente in questo spazio. Ne segue, quando F (e quindi F_1) sia razionale, che un sistema lineare rappresentativo di F contiene un sistema lineare rappresentativo di F_1 aggiungendo a questo sistema, ove occorra, una curva fissa (imagine di quella giacente nello spazio di proiezione S_{r-r_1-1}). Reciprocamente, se ciò ha luogo, il sistema rappresentativo di F_1 ovvero questo accresciuto di una curva fissa, essendo subordinato del sistema rappresentativo di F, ha per corrispondente in S_r una stella di sostegno S_{r-r_1-1} (nel quale giace l'imagine della eventuale curva fissa), cioè le curve di quel sistema sono le imagini delle sezioni di F con piani passanti per S_{r-r_1-1}: cosicchè la proiezione di F dall'S_{r-r_1-1} sopra un S_{r_1} generico è una superficie che ha manifestamente lo stesso sistema rappresentativo di F_1 e quindi è F_1 od è (n. 3) riferita ad essa proiettivamente. Dunque (continuando a ritenere identiche due superficie riferite fra loro proiettivamente) *è la stessa cosa dire che un sistema lineare è contenuto in un altro o dire che la superficie imagine del primo è proiezione della superficie imagine del secondo.*

Dalle cose esposte segue poi che l'ammettere che lo spazio di proiezione S_{r-r_1-1}, da cui si proietta (biunivocamente) F in F_1, ha con F una curva comune (che è il caso dianzi considerato) od anche soltanto un numero finito di punti comuni equivale ad ammettere che il sistema $|C_1|$ rappresentativo di F_1 si ottiene dal sistema $|C|$ rappresentativo di F, obbligando le curve di $|C|$ a contenere una curva fissa o a passare per punti fissi ed anche a soddisfare ad altre condizioni non consistenti in passaggi per punti, le quali non ci saranno o ci saranno secondochè la suddetta curva o i suddetti punti comuni apparterranno o no all'S_{r-r_1-1}. In ogni caso *l'ordine di* F_1 *è minore di quello di* F (come si vede, ad es., segando con un S_{r-1} o S_{r-2} passante per l'S_{r-r_1-1}). Saranno eguali gli ordini di F ed F_1 allora soltanto che lo spazio di proiezione S_{r-r_1-1} non incontra F, cioè che il sistema lineare $|C_1|$ è subordinato del sistema $|C|$ senza che si aggiungano nuovi punti base, in numero finito o infinito, a quelli di $|C|$.

Secondo la definizione del n. 10, Cap. 9.°, una superficie appartenente ad un dato spazio dicesi *normale* quando non esiste alcuna superficie (appartenente a spazio superiore) dello stesso ordine di cui essa possa considerarsi proiezione. Per ciò che si è detto or ora, il sistema lineare rappresentativo di una superficie razionale normale non potrà quindi essere ricavato da un sistema più ampio imponendo condizioni lineari non consistenti in passaggi per punti, cioè il detto sistema rappresentativo sarà un sistema lineare completo (rispetto al gruppo di *tutti* i suoi punti base). Si ha adunque che *una superficie razionale normale ha un sistema rappresentativo completo, e viceversa* [1]).

5. — Il Cap. precedente sulle superficie rigate razionali fornisce un esempio notevole delle considerazioni svolte [2]).

Un altro esempio notevole si ha nella superficie (normale) rappresentativa del sistema (completo) di tutte le curve di ordine n (>1) di un piano. Evidentemente tale superficie appartiene ad un $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$, è di ordine n^2, ed è rappresentata analiticamente col porre le x_i $\left(i=0,1,\ldots,\frac{n(n+3)}{2}\right)$

[1]) Le proprietà esposte nei n. precedenti si generalizzano immediatamente (come già si è accennato nel n. 1) a sistemi lineari di ipersuperficie qualunque ed anzi a serie lineari qualunque (cfr. il Cap. I della Memoria di Segre citata nella nota del n. 7, Cap. 10.°). In questa generalizzazione rientra qualche teorema trovato nei Cap. precedenti, ad es. il teorema del n. 4 del Cap. 12.°.

[2]) Nella rappresentazione piana delle rigate razionali si hanno anche esempî dei punti e delle curve fondamentali che si incontrano generalmente nella rappresentazione di una superficie razionale. Di questi elementi fondamentali nulla si è detto in generale, non solo perchè non occorrono per il seguito, ma perchè richiedono altre cognizioni (una parte delle quali è l'oggetto del Cap. 2 dell'Appendice).

proporzionali a tutti i prodotti di grado n di tre variabili y_0, y_1, y_2. La superficie stessa non contiene curve di ordine diverso dai multipli di n, in particolare non contiene rette, mentre contiene ∞^2 curve di ordine n, ∞^5 curve di ordine $2n$, ∞^9 curve di ordine $3n, \ldots$, rappresentate da tutte le rette, coniche, cubiche, ..., del piano.

Della proprietà di questa superficie (o di una sua proiezione) di contenere ∞^2 curve di ordine n (segantisi a due a due in un punto) sussiste l'inversa; cioè *una superficie* F *che contiene una totalità* σ *algebrica,* ∞^2, *di curve di ordine* n, *tale che due curve generiche si tagliano in un solo punto variabile, è la superficie razionale rappresentativa di tutte le curve di ordine* n *del piano o una sua proiezione, e quella totalità ha per imagine le rette del piano rappresentativo.* Anzitutto, dall'ipotesi che due curve generiche della totalità σ si segano in un solo punto variabile, discende (trascurando una parte fissa che eventualmente facesse parte della totalità) che una curva generica C di σ è irriducibile. In vero se C si componesse (ad es.) di due curve C′, C″ (irriducibili), o queste al variare di C, descrivono lo stesso sistema ed allora, non potendo avvenire, per quella ipotesi, che due curve di questo sistema non abbiano intersezioni comuni variabili, due curve di σ si segherebbero (almeno) in quattro punti variabili, cioè in quelli in cui le componenti di una curva incontrano le componenti dell'altra: ovvero C′, C″ descrivono due sistemi distinti ed allora, siccome per un punto di F passa (almeno) una curva di un sistema ed una dell'altro, una curva generica di un sistema ha almeno un punto comune variabile con una curva generica dell'altro e però due curve di σ avrebbero (almeno) due punti comuni variabili.

Ne consegue che due punti generici di F (e basta anche che sieno due punti qualunque sopra una curva irriducibile di σ) determinano una sola curva di σ, perchè se per essi ne passasse un'altra, le due curve avrebbero per la stessa suddetta ipotesi (e per l'algebricità del sistema) infiniti punti comuni, cioè una componente comune. In particolare (prendendo quei due punti successivi) una curva generica di σ per un punto generico di F è individuata dal punto stesso e dal punto della curva a questo successivo: e quindi le curve di σ uscenti da un punto generico di F, che diremo costituire un *fascio*, corrispondono biunivocamente (ed algebricamente) alle loro tangenti in quel punto, cioè costituiscono una ∞^1 razionale. I punti di F, potendosi determinare come intersezioni delle linee di due tali fasci, si riferiscono biunivocamente ai punti di un piano

π, facendo corrispondere proiettivamente quei due fasci a due fasci di rette di π. Se in queste proiettività la curva di σ comune a quelli si prende omologa alla retta comune a questi, si può ragionare come nella ordinaria costruzione delle collineazioni piane (cfr. n. 12, Cap. 3.°) e concludere che alle ∞^2 curve di σ corrispondono le rette di π (potendosi anzi prendere ad arbitrio di quattro curve date di σ le quattro rette omologhe di π) [1].

Infine, essendo le curve di σ di ordine n cioè incontrate in n punti da ogni sezione iperpiana di F, ogni retta del piano π deve incontrare l'imagine di detta sezione in n punti. Queste imagini costituiscono adunque o il sistema completo di tutte le curve piane di ordine n, o un sistema lineare in esso contenuto (anche di ordine inferiore ad n e ciò dipendentemente dalla esistenza eventuale di una parte fissa di σ sopra trascurata): e però (n. 4) la proposizione è dimostrata.

6. — Facciasi dell'esempio del n. 5 il caso particolare $n=2$: si ha allora la *superficie di Veronese*. Questa è adunque la superficie (normale) rappresentativa di tutte le coniche di un piano: superficie del 4.° ordine appartenente ad S_5. Le formule di rappresentazione si ottengono ponendo le sei coordinate di S_5 proporzionali ai quadrati e ai prodotti a due a due di tre variabili. Sulla superficie esistono soltanto curve di ordine pari e precisamente ∞^2 coniche corrispondenti alle rette del piano, ∞^5 quartiche (razionali) corrispondenti alle coniche, ...

Dal teorema dello stesso n. 5 si ricava che una superficie contenente ∞^2 coniche, tale che due si tagliano in un solo punto (variabile), è la superficie di Veronese od una sua proiezione: ma ora è superflua la condizione del segarsi in un solo punto, cioè si ha la proprietà: — *Una superficie che contiene ∞^2 coniche è la superficie di Veronese od una sua proiezione.* — In vero sia σ una totalità (irriducibile) ∞^2 di coniche gia-

[1]) Si può aggiungere che, in virtù delle formole

$$y_l = \varphi_l(x_i) \qquad (l=0,1,2\ ;\ i=1,2,\dots,r)$$

che dànno la rappresentazione di π su F, alle rette $\xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 = 0$ corrispondono le curve di σ segate dalle ipersuperficie $\xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 = 0$, onde *le curve di σ costituiscono una serie lineare* (n. 16, Cap. 10.°). Ciò è caso particolarissimo di un teorema di Enriques (cfr. il n. 27 della Memoria di Segre citata nella nota al n. 7, Cap. 10.°).

centi sopra una superficie. Per un punto generico di questa debbono passarne ∞^1: sicchè, presa una conica generica di σ, le coniche di σ passanti per tutti i suoi punti costituiscono la totalità stessa σ, e però due coniche di questa totalità si segano almeno in un punto. Se si segano in un punto solo il teorema è dimostrato; e lo è anche se si segano in due punti, come è subito veduto. Infatti allora la superficie esiste manifestamente in un S_3, e la quadrica passante per due delle considerate coniche e per un punto ulteriore della superficie conterrà tutte le coniche di questa passanti per quel punto e quindi coinciderà colla superficie stessa: ma d'altra parte una quadrica di S_3 è rappresentativa del sistema di coniche di un piano passanti per due punti, cioè (n. 4) proiezione della superficie di Veronese da una sua corda.

La proiezione in S_3 della superficie di Veronese da un S_1 che non ha punti comuni con essa, ossia rappresentativa di un sistema ∞^3 di coniche senza punti base, dicesi *superficie di Steiner* [1]). Notando poi che, proiettando la V_2^4 di Veronese da un S_1 che la incontra in due punti, si ha, come già si è detto, una quadrica di S_3 e, proiettandola invece da un S_1 avente un punto comune con essa, si ha una superficie rigata di 3.° grado, rappresentativa di un sistema ∞^3 di coniche per un punto, dal teorema dimostrato si ha, per $r=3$, il teorema di Darboux [2]): — *Le superficie di S_3 che contengono ∞^2 coniche sono le quadriche, le rigate cubiche e le superficie di Steiner* —.

7. — Per ciò che vedemmo testè, la superficie di Veronese è caratterizzata *dall'appartenere ad S_5 e dal contenere ∞^2 coniche.* La superficie si può caratterizzare in un altro modo non meno notevole che qui esponiamo.

Osserviamo che se una superficie è un cono (di S_r) ovvero la superficie di Veronese (di S_5), due suoi S_2 tangenti hanno sempre un punto comune. Per il cono la proprietà è evidente, per la superficie di Veronese segue dal notare che per i due punti di contatto dei due S_2 tangenti passa una conica della superficie e che le tangenti nei punti stessi a questa conica s'incontrano.

Reciprocamente, *se due S_2 tangenti generici di una V_2 irriducibile ed appartenente ad S_r hanno un punto comune ed è $r>4$, la V_2 è un cono*

[1]) Di questa superficie si dirà nel Cap. seguente.

[2]) Bulletin des Sc. math., 4 (2), 1880.

(di S_r) o la V_2^4 di Veronese (di S_5) [1]. In vero, due S_2 tangenti generici della V_2 non possono segarsi in una retta, altrimenti passerebbero tutti per una retta fissa (n. 16, Cap. 1.°), ed allora un S_{r-1} generico taglierebbe V_2 in una linea (appartenente ad S_{r-1} ed irriducibile) di cui tutte le tangenti passerebbero per un punto (comune alla retta fissa e all'S_{r-1}), cioè in una linea retta, e quindi dovrebbe essere $r-1=1$. Neppure possono tutti gli S_2 tangenti di V_2 segare in rette un piano fisso, altrimenti un S_{r-1} generico taglierebbe V_2 in una linea di cui tutte le tangenti incontrerebbero una retta (comune all'S_{r-1} e al piano fisso), cioè in una linea piana e quindi si avrebbe $r-1=2$. Possono invece gli S_2 tangenti di V_2 passare tutti per un punto: allora un S_{r-1} per questo punto sega V_2 in una linea di cui tutte le tangenti passano per il punto stesso e quindi composta di linee rette: allora V_2 è un cono. Escluso questo caso, tre S_2 tangenti generici di V_2 avranno a due a due tre punti comuni distinti appartenenti ad un piano π, perchè se i tre punti fossero in linea retta questa sarebbe comune ai tre S_2 contrariamente ad una osservazione fatta avanti: e i tre S_2 tangenti generici, per l'ipotesi ($r>4$), apparterranno ad un S_5. Un quarto S_2 tangente generico di V_2 deve incontrare quei tre S_2 in tre punti indipendenti e quindi giacere in questo S_5, perchè se i tre punti fossero su una retta, o questa non incontra il piano π ed allora i tre primi S_2 sarebbero in un S_4, o incontra π e allora due (almeno) dei tre S_2 sarebbero in un S_3 (non potendo avvenire, per un'altra osservazione fatta avanti, che la retta giaccia in π).

Si è così dimostrato, che, esclusi i coni, deve essere $r=5$. Prendansi ora su V_2 due punti generici A, A' e dicansi S_2, S'_2 i rispettivi piani tangenti: l'S_3 che passa (ad es.) per S_2 e per A', contenendo la retta congiungente A' col punto d'intersezione di S_2, S'_2, viene ad avere un altro punto comune con V_2, successivo ad A'. Per conseguenza un S_4 passante per S_2 sega V_2 in una V_1, così che ogni S_3 passante per l'S_2 e per un punto di V_1 esterno all'S_2, contiene V_1 o, se questa è riducibile, almeno la sua parte irriducibile che passa per quel punto: giacchè, se non la contenesse, i punti comuni ad S_3 e V_1 essendo di contatto, si avrebbe sulla detta parte irriducibile una serie lineare con infiniti punti multipli, il che è assurdo (n. 18, Cap. 10.°). Dunque ogni S_3 per l'S_2 tangente in A e per un punto

---

[1]) Cfr. DEL PEZZO, *Sulle superficie dell' n.° ordine...* (Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1, 1887) n.° 12.

A' (esterno ad S_2) ha comune con V_2 una linea passante per A' (e similmente scambiando i punti A, A').

Ciò premesso, la linea secondo cui un S_4 per l'S_2 tangente in A sega V_2 avrà certo (almeno) una parte irriducibile per A, che diremo γ. Due casi sono possibili:

1.° γ è nell'S_2 tangente in A. Allora l'S_3 per l'S'_2 tangente in A' e per un punto di γ deve contenerla per intero: altrimenti, muovendosi un punto X su γ, l'$S_3 \equiv S'_2X$ varierebbe contenendo sempre una linea di V_2 e quindi questa superficie sarebbe contenuta nell'$S_4 \equiv S_2S'_2$. Segue che γ è una retta, comune all'S_2 e all'S_3 condotto per S'_2 e per A, retta segante S'_2 nel punto comune ad S_2, S'_2. Parimenti esisterà una retta per A' segante S_2 in questo medesimo punto. Adunque V_2 sarà luogo di rette che a due a due s'incontrano, e quindi un cono.

2.° γ è esterna all'S_2 tangente in A, e quindi non retta. Variando l'S_4 (intorno all'S_2 tangente in A) γ descriverà V_2: onde, preso un tale S_4 genericamente e un punto A' generico sulla relativa γ, questo punto A' è generico su V_2. L'S_3 per l'S_2 tangente in A e per A' conterrà γ in forza della proprietà superiore. Ne segue che γ è pure contenuta nell'S_3 passante per l'S'_2 tangente in A' e per un punto di γ, giacchè, se ciò non fosse, facendo variare un punto X su γ si vedrebbe, come nel 1.° caso, che V_2 giacerebbe nell'$S_4 \equiv S_2.S'_2$. Dunque γ è nell'S_2 intersezione dei nominati S_3 ossia è una linea piana e precisamente una conica, perchè, se fosse di ordine >2, la retta AA' congiungente due punti generici di V_2 avrebbe con questa superficie altri punti comuni (n. 8, Cap. 9.°). La V_2^4, essendo così luogo di ∞^2 coniche, è la V_2^4 di Veronese. Questa superficie è adunque caratterizzata *dall'essere una superficie di* S_r $(r>4)$, *non cono, tale che i suoi piani tangenti a due a due s'incontrano.*

8. — Vi è un terzo modo di caratterizzare la superficie di Veronese che ora andiamo ad esporre.

Siccome le corde di detta superficie sono distribuite sopra gli ∞^2 piani delle sue coniche, è chiaro che esse costituiscono una ipersuperficie e quindi che nessuna di esse passa per un punto generico di S_5, cioè, come dicesi, la superficie di Veronese non possiede punti doppî apparenti, ossia la sua proiezione su S_4 da un punto generico non ha punti doppî. Il numero finito dato dal n. 9, Cap. 9.° è adunque zero.

Viceversa abbiasi una superficie V_2, irriducibile ed appartenente ad S_5, priva di punti doppî apparenti. Le sue ∞^4 corde devono allora formare una varietà a 4 dimensioni al più: ma si vede facilmente che tale varietà è proprio a 4 dimensioni. In vero non può essere a due dimensioni, come è evidente, e neppure a tre dimensioni, una W_3, perchè per un punto generico di W_3 passerebbero ∞^2 corde di V_2 e quindi la linea sezione di V_2 con un iperpiano generico avrebbe la proprietà che per ciascun punto di ciascuna sua corda passerebbero ∞^1 corde, ed allora per ciascun punto della linea ∞^1 corde appoggiate ad una corda data, cioè la linea stessa dovrebbe essere piana, il che (dovendo la linea appartenere all'iperpiano) è assurdo.

Il luogo delle corde di V_2 essendo una W_4, da ogni punto di questa partono ∞^1 corde costituenti una superficie conica, che dico essere un piano (onde le dette corde formano un fascio). Per dimostrarlo osservo che, presa una sezione di V_2 con un S_4 generico (linea irriducibile ed appartenente a questo S_4), per un punto generico di una corda generica di tale sezione non passa, oltre questa, alcun'altra corda; altrimenti, gli estremi di queste altre corde partenti da tutti i punti di quella costituendo la sezione, questa sarebbe biproiettata da ogni sua corda, cioè ogni piano trisecante della sezione sarebbe quadrisecante, il che non può essere (n. 8, Cap. 9.°). Ciò significa che il cono di corde di V_2 che ha il vertice in un punto generico di una corda generica è tagliato da un S_4 generico per la corda in questa sola corda e però, come si disse, è un piano. Questo piano ha comune con V_2 una curva almeno di 2.° ordine, cosicchè ogni retta del piano stesso è corda di V_2. Le corde di V_2 si distribuiscono adunque in ∞^2 piani: e di più la sezione di ogni tale piano con V_2 deve essere precisamente una conica, perchè, se fosse di ordine >2, ogni corda di V_2 sarebbe almeno trisecante. Se ogni conica si spezza, la V_2 è rigata e le sue rette si distribuiscono in ∞^2 coppie di rette segantisi, cioè ogni retta incontra ogni altra retta di V_2 e questa è quindi un cono [1]). Se le coniche non si spezzano si ha la superficie di Veronese (n. 6).

Il risultato può estendersi ad un S_r qualunque. Se una V_2, non cono, appartenente ad S_r è priva di punti doppî apparenti, cioè un S_{r-3} non incontra alcuna sua corda, ossia il luogo delle sue corde è una W_4, la

---

[1]) Un cono è effettivamente privo di punti doppî apparenti, perchè la retta che va al vertice da un punto generico dello spazio non è una corda (impropria) del cono.

proiezione di V_2 da un S_{r-6} generico sopra un S_5 è priva di punti doppî apparenti, non cono, e quindi la superficie di Veronese. Ma questa è normale in S_5, dunque la V_2 non può esistere se $r > 5$.

Concludiamo che *una superficie di* S_r, *non cono, priva di punti doppî apparenti è la superficie di Veronese* [1]).

9. — Ed ora dimostriamo il seguente teorema, dovuto al Del Pezzo [2]), al qual teorema abbiamo già accennato nel n. 1 del Cap. 13.°: — *Le superficie* V_2^{r-1}, *irriducibili, appartenenti ad* S_r, *sono soltanto le rigate razionali normali (coni compresi), aggiunta, quando* $r = 5$, *la superficie di Veronese.*

Premettiamo che *se la proiezione di una* V_2^{r-1} *di* S_r *da un suo punto generico sopra un* S_{r-1} *è un cono ed inoltre* $r > 3$ *anche* V_2^{r-1} *è un cono.* Infatti, detto O il centro di proiezione ed M il vertice del cono proiezione, $r-2$ generatrici generiche di questo cono giacciono in un S_{r-2} e quindi in un S_{r-1} per OM, e saranno imagini o di rette di V_2^{r-1} non passanti per O o di coniche di V_2^{r-1} passanti per O. Ma, essendo $r > 3$, non possono tutte quelle $r-2$ generatrici essere imagini di coniche, perchè il detto S_{r-1} deve segare V_2^{r-1} in una linea d'ordine $r-1$: dunque una almeno di esse, cioè una generatrice generica del cono proiezione, è imagine di una retta di V_2^{r-1}, e però lo sono anche tutte le altre generatrici del cono stesso, e la V_2^{r-1} per conseguenza è rigata. Di più, come tutte le generatrici del cono proiezione passano per M, così la retta OM dovrà incontrare tutte le generatrici di V_2^{r-1} e dovrà incontrarle in uno stesso punto; altrimenti OM sarebbe una direttrice rettilinea di V_2^{r-1} e quindi questa superficie (per essere O generico) ammetterebbe infinite direttrici rettilinee, cioè apparterrebbe ad S_3, contro il supposto di $r > 3$. La nostra proposizione preliminare è così dimostrata.

Ciò posto, facciamo dapprima il caso di $r = 4$, cioè consideriamo una V_2^3 di S_4, non cono: la sua proiezione, da un suo punto generico O, sopra

---

[1]) Cfr. le due Memorie di SEVERI citate nella nota [2]) del n. 25, Cap. 9.° e precisamente il n. 8 della prima Memoria e la nota quarta del n. 2 della seconda. Cfr. pure, per la trattazione di una questione della quale l'argomento del presente n. è caso particolare, la recente Nota di PALATINI, *Sulle superficie algebriche i cui* S_h $(h+1)$*-secanti non riempiono lo spazio ambiente* (Atti della R. Accad. di Torino, 41, 1906).

[2]) *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n+1 dimensioni* (Rend. dell'Accad. di Napoli, 1885) e *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà...* (Ivi, 1886).

un S_3 sarà una quadrica V_2^2, non cono (per quella proposizione). I punti di V_2^3 successivi ad O avranno per imagini i punti di una generatrice g di V_2^2 intersezione dell'S_3 coll'S_2 tangente nel punto O a V_2^3: quindi le rette di V_2^2, appartenenti al medesimo sistema di g (non incontrando g) saranno imagini di rette della V_2^3 non passanti per O, mentre le rette di V_2^2 dell'altro sistema saranno imagini di coniche della V_2^3 passanti per O e incontranti le generatrici della V_2^3. La retta di V_2^2 che si appoggia a g nel punto in cui g è incontrata dalla generatrice di V_2^3 passante per O è imagine di una conica che si spezza nella generatrice medesima e in una retta appoggiata a tutte le generatrici di V_2^3; dunque, poichè V_2^3 non può avere più di una direttrice rettilinea, ricaviamo che *ogni superficie* V_2^3 *appartenente ad* S_4 *è rigata e*, come già sappiamo (n. 4, Cap. 13.°), *ammette una sola direttrice rettilinea.*

Consideriamo ora una V_2^4 di S_5, non cono, e proiettiamola da un suo punto generico O sopra un S_4: la proiezione sarà la superficie rigata V_2^3 dianzi caratterizzata. I punti di V_2^4 successivi ad O avranno per imagini i punti di una retta: ma adesso due casi sono possibili. Dapprima questa retta può essere la direttrice di V_2^3. Allora le generatrici di V_2^3 sono tutte imagini di ∞^1 coniche uscenti da O e la superficie V_2^4 non contiene rette, ma ∞^2 coniche e quindi (n. 6) è la superficie di Veronese. Oppure può darsi che la retta imagine dei punti di V_2^4 successivi ad O sia una generatrice g di V_2^3. Allora, poichè le altre generatrici di V_2^3 sono imagini di rette della V_2^4, questa superficie è rigata. Secondochè il punto, in cui g taglia la generatrice di V_2^4 passante per O, coincide o no col punto ove g si appoggia alla direttrice di V_2^3, questa direttrice sarà imagine di una retta ovvero di una conica (passante per O): onde V_2^4 può essere, come già ci è noto (n. 4, Cap. 13.°), o con una sola direttrice rettilinea o con ∞^1 coniche direttrici.

Dopo ciò passiamo alla V_2^5 di S_6, che proiettiamo da un suo punto generico O sopra un S_5. I punti di V_2^5 successivi ad O hanno per imagini i punti di una retta e quindi la proiezione di V_2^5 è necessariamente una V_2^4 di S_5 rigata; e, perchè V_2^5 non fosse rigata, dovrebbe la V_2^4 essere con direttrice rettilinea ed i punti successivi ad O di V_2^5 avere per imagini i punti di tale direttrice. Ne risulterebbe contenere V_2^5 ∞^1 coniche per O e quindi in tutto ∞^2 coniche, il che è assurdo, una superficie cosiffatta essendo soltanto la V_2^4 di Veronese od una sua proiezione (n. 6).

Ripetendo, come si può, tale ragionamento per le V_2^{r-1} di S_r nei casi di $r = 7, 8, \ldots$ si stabilisce completamente l'enunciato teorema di Del Pezzo.

10. — Da questo teorema possiamo trarne un altro (a cui accennammo nel n. 19, Cap. 13.º) relativo alle V_{i+1}^{r-i} $(i > 1)$ irriducibili, appartenenti ad S_r.

Un S_{r-i+1} generico taglia una V_{i+1}^{r-i} in una V_2^{r-i} che deve essere una rigata o la superficie di Veronese (n. 9). Supposto dapprima che V_2^{r-i} sia una rigata, per un punto generico di V_{i+1}^{r-i} passano infinite sue rette costituenti un S_i, poichè ogni S_{r-i+1} condotto per il punto ne contiene una sola. Per conseguenza V_{i+1}^{r-i} si compone di una serie ∞^1 di S_i, serie razionale in quanto un S_{r-i} generico taglia V_{i+1}^{r-i} in una curva razionale normale.

Supponiamo in secondo luogo che V_2^{r-i} sia la superficie di Veronese. Allora deve essere $r - i = 4$ e quindi si tratta di studiare una V_{r-3}^4 di S_r $(r \geq 6)$ segata da un S_5 generico nella superficie di Veronese. Cominciamo dal caso $r = 6$, cioè dal considerare una tale V_3^4 di S_6.

Proiettiamo la V_3^4 da due suoi punti generici A, B (cioè dall'S_1 che li congiunge) sopra un S_4. Il risultato della proiezione sarà una quadrica V_3^2 di S_4 e i punti di V_3^4 successivi ad A, B avranno per imagini i punti di due piani di quella V_3^2; la quale sarà quindi specializzata una o due volte (non più, essendo irriducibile) cioè possederà, al più, un S_1 doppio. Se C è un punto doppio di V_3^2, consideriamo un S_5 generico che passi per A, B, C: esso taglia V_3^4 in una V_2^4 e V_3^2 in una V_2^2 con un solo punto doppio in C, cioè in un cono quadrico di 1.ª specie, sicchè V_2^4 ha per imagine un tal cono. Segue che V_2^4 non può essere la superficie di Veronese, altrimenti le ∞^1 coniche per A e le ∞^1 coniche per B di V_2^4 darebbero origine ad un doppio sistema di generatrici della quadrica proiezione: quindi V_2^4 è una rigata o un cono e le sue generatrici si appoggiano tutte al piano ABC. Facendo variare l'S_5 intorno a questo piano, si ha che tutti i punti di V_3^4 si distribuiscono in ∞^2 rette appoggiate al piano stesso. Variando A, B, e conseguentemente il piano ABC, queste ∞^2 rette non possono variare, perchè altrimenti per ogni punto di V_3^4 ne passerebbero infinite e quindi le sezioni di V_3^4 con S_5 generici non sarebbero più superficie di Veronese. Si conclude intanto che la nostra V_3^4 si può considerare come il luogo di ∞^2 rette che si appoggiano a due piani ABC, A'B'C', essendo A', B' due altri punti generici di V_3^4 e C' un punto doppio della proiezione di V_3^4 fatta da A', B'.

Le ∞^2 rette non possono incontrare ABC, A'B'C' in punti distinti, giacchè allora V_3^4 apparterrebbe al più ad un S_5; quindi passano tutte per un punto comune a quei due piani o si appoggiano tutte ad una retta, loro intersezione. Ma questo secondo caso è da escludersi, perchè tale retta dovrebbe incontrare AB (e parimenti A'B'), il che non può essere, perchè ne seguirebbe, facendo variare (ad es.) il solo punto B, che la V_3^4 dovrebbe giacere nell'S_3 determinato dal punto A e dal piano A'B'C'. Dunque V_3^4 è un cono, che si ottiene proiettando da un punto di S_6 la superficie di Veronese (di un S_5 che non passa per il punto) [1].

Ed ora, passando al caso di $r=7$, si riconosce facilmente che una V_4^4 di S_7, segata da un S_5 generico in una superficie di Veronese, è un cono ottenuto proiettando una tale superficie da un S_1. Infatti si tagli V_4^4 con un S_5 generico e con tutti gli S_6 passanti per esso. La sezione coll'S_5 è una superficie di Veronese V_2^4 e la sezione con ciascuno degli S_6 è, per la proposizione stabilita, una V_3^4 che può ottenersi proiettando la V_2^4 da un certo punto dell'S_6. Il luogo di questo punto, al variare di S_6 intorno ad S_5, è una retta (un S_6 generico avendo col luogo un solo punto comune), e la V_4^4 è manifestamente costituita da tutti i piani proiettanti da questa retta i punti della V_2^4.

Similmente si passa dal caso $r=7$ al caso $r=8$ e così di seguito. Sicchè si trova il teorema: — *Ogni varietà* V_{i+1}^{r-i}, *irriducibile, appartenente ad* S_r $(i>1)$ *è una serie razionale* ∞^1 *di* S_i *(cioè una* S_i-V_{i+1}^{r-i}*), oppure, se* $i=r-4$, *cioè se si ha una* V_{r-3}^4, *un cono che proietta la superficie di Veronese da un* S_{r-6}.

11. — Ritorniamo alle V_2^{r-1} di S_r. Poichè un sistema completo di curve piane razionali di dimensione r ha la proprietà di essere di grado $r-1$ [2], si può dire che, quando $r>2$, tutte e sole le superficie rappresentative di tali sistemi sono le V_2^{r-1}, e quindi, per il teorema di Del Pezzo, sono le rigate razionali normali e la superficie di Veronese. Dunque (n. 12, Cap. 13.° e n. 6) i *sistemi lineari completi* ∞^r $(r>2)$ *di curve piane razionali sono riducibili birazionalmente a sistemi di curve d'ordine* $r-1$

[1]) Cfr. nota al n. 16, Cap. 15.°

[2]) Si è già avvertito che questo teorema, dimostrato nel caso di singolarità base ordinarie (n. 6, Cap. 11.°), vale qualsiansi tali singolarità base, come si mostrerà nel Cap. 2.° dell'Appendice.

con un punto $(r-2)^{\text{uplo}}$ *ed* $r-2$ *punti semplici base, ovvero al sistema di tutte le coniche del piano* [1]).

Dalla quale proposizione se ne ricava un'altra notevole. Anzitutto si osservi che *una superficie a sezioni iperpiane razionali è razionale.* Se l'ordine n della superficie è 2, cioè la superficie stessa è una quadrica di S_3, la proprietà è ovvia. Se $n > 2$, prendasi un S_{r-2} generico e si riferisca proiettivamente il fascio di S_{r-1} per esso ad un fascio di rette di un piano π. Poi, fissate in π tre rette generiche a, b, c e fissati inoltre tre A, B, C degli n punti nei quali l'S_{r-2} incontra la superficie, si faccia corrispondere proiettivamente la sezione iperpiana di ciascun S_{r-1} del fascio alla retta corrispondente del fascio di π, in modo che ai punti A, B, C corrispondano rispettivamente i tre punti in cui questa retta incontra le a, b, c. Si ha così manifestamente una rappresentazione biunivoca della superficie su π: alle sezioni iperpiane della superficie corrisponde un sistema lineare di curve razionali di π.

Ne discende che una superficie a sezioni iperpiane razionali è di quelle considerate avanti, o delle loro proiezioni: cosicchè, ricordando che la proiezione della superficie di Veronese da punti di essa dà rigate razionali, si ha che *una superficie di* S_r *a sezioni iperpiane razionali è una rigata razionale, o la* V_2^4 *di Veronese, o una delle due* V_2^4 *proiezioni di questa (da punti esterni) in* S_4 *ed in* S_3.

Come caso particolare di questa proposizione si ha il teorema di Picard, che *le superficie di* S_3 *a sezioni piane razionali sono le rigate razionali e la superficie di Steiner* [2]).

12. — Un altro teorema, che è in una certa relazione coi precedenti, è il seguente, che si può chiamare teorema di Kronecker-Castelnuovo [3]): — *Una superficie* F *di* S_3, *irriducibile, la quale dai piani di un sistema* ∞^2 *viene segata in curve riducibili è rigata oppure la superficie di Steiner* —.

Escludiamo le rigate, le quali dai loro ∞^2 piani tangenti, cioè dai

[1]) Si possono dare al teorema altre forme, prendendo altri tipi in ciascuna famiglia di sistemi lineari, trasformabili l'uno nell'altro birazionalmente: ad es., prendendo per le rigate razionali normali le rappresentazioni minime (n. 13, Cap. 13.°).

[2]) Cfr. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, 1900), t. 2.°, pag. 59, n. 11.

[3]) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (Rendiconti dei Lincei, 1894).

piani passanti per le loro generatrici, sono appunto segate in curve riducibili e dimostriamo che una superficie non rigata che goda della proprietà espressa dal teorema è necessariamente la superficie di Steiner. A questo fine osserviamo in primo luogo che, essendo manifestamente algebrica la condizione di spezzamento della sezione di una superficie (algebrica), il considerato sistema ∞^2 di piani è certamente algebrico. Entro di esso si prenderà un sistema ∞^2 irriducibile (che, dopo aver dimostrato il teorema, si vedrà essere tutto il sistema dato) e si diranno $C_1, C_2, \ldots, C_i$ $(i \geq 2)$ le componenti irriducibili (non rette) della sezione praticata con un piano generico π di questo sistema. Due di tali i componenti non possono coincidere, altrimenti π sarebbe tangente ad F lungo una curva, e quindi, siccome per un punto generico di F passano ∞^1 di queste curve (ognuna delle C descrivendo un sistema ∞^2), ogni punto di F avrebbe ∞^1 piani tangenti, il che è assurdo [1]).

Dei sistemi ∞^2 (algebrici, irriducibili) descritti da ciascuna delle $C_1, C_2, \ldots, C_i$ possono due o più coincidere, cioè formare un solo sistema. Ma, se consideriamo le C_1 (ad es.) che passano per un punto generico P di F, costituenti un sistema ∞^1 ed i loro ∞^1 piani, ciascuno segante F in $i-1$ altre curve $C_2, C_3, \ldots, C_i$, non possono queste curve passare per P, chè, in caso contrario, avremmo in P ∞^1 piani tangenti; e però, mentre C_1 descrive il detto sistema ∞^1, C_2 (ad es.) descrive un sistema, pure ∞^1, certo distinto da quello: e la curva C_2, passante per P, di un tal sistema ∞^1 darà insieme alla C_1, che giace nel suo piano, una curva composta avente un punto doppio in P, cioè il piano stesso sarà tangente in P ad F. Notisi anzi che per P non può passare una terza componente C_3 (di quelle giacenti nel piano), perchè, altrimenti, P sarebbe punto triplo per la sezione di F col detto piano e quindi punto di flesso per ogni sezione di F fatta con un piano per P; onde, essendo P generico, i punti di ogni sezione piana di F sarebbero flessi per la sezione e però questa sarebbe una retta ed allora F un piano, il che evidentemente è escluso. La quale osservazione prova pure che il punto P deve essere semplice per ciascuna delle curve C_1, C_2.

Osserviamo ancora che, se consideriamo il sistema ∞^2 descritto da

---

[1]) Correlativamente a ciò che si è detto nel n. 13, Cap. 9.°, quando un punto generico di una superficie F ammette ∞^1 piani tangenti, deve F ridursi ad una curva.

una delle i curve $C_1, C_2, \dots, C_i$, siccome il sistema stesso è costituito da tutte le sue curve che passano per i punti di una sua curva generica, due curve del sistema (due adunque delle curve C se appartengono allo stesso sistema) hanno almeno un punto comune. Se invece due delle stesse i curve descrivono due sistemi ∞^2 diversi, siccome un sistema è costituito da tutte le sue curve che passano per le coppie di punti di una curva generica dell'altro sistema, sono almeno due le intersezioni di due delle curve C appartenenti a sistemi diversi. La stessa considerazione mostra che, se due curve di un sistema descritto da una delle curve C hanno un solo punto comune, per due punti generici di F passa una sola curva del sistema (perchè, se ne passassero due, tenendo fissa l'una e variando l'altra si troverebbe, come dianzi, che due curve si taglierebbero in due punti).

Ciò premesso, riprendiamo la considerazione del piano π tangente ad F in un punto P generico e delle curve $C_1, C_2, \dots, C_i$, che esso sega su F, delle quali due sole C_1 e C_2 passano per P. Supponiamo poi che un punto si muova con continuità sulla superficie partendo da P e descrivendo una curva qualsiasi γ; ed insieme al punto mobile consideriamo il piano mobile ivi tangente ad F, e le successive posizioni che su F va assumendo la curva C_1 al variare del piano stesso. Sieno P', π', C'_1, tre posizioni corrispondenti dei tre elementi mobili (punto, piano e curva). Per ciò che si è detto sopra, la curva C'_1 del piano π' sega la curva fissa $C_2 + \dots + C_i$ (cioè composta di queste curve) in un certo numero $k \geqq i-1$ di punti $M'_1, \dots, M'_k$, i quali si trovano sulla retta $\pi\pi'$ comune ai due piani. Se ora facciamo che il punto P' torni alla posizione iniziale P lungo la γ e seguiamo nei loro movimenti il piano π' e la curva C'_1, vediamo che i punti $M'_1, \dots, M'_k$ vanno muovendosi con continuità lungo le curve fisse $C_2, \dots, C_i$, mentre la retta $\pi\pi'$ che li contiene varia con continuità sul piano fisso π. Al limite, per P' coincidente in P, la curva C'_1 si è portata sulla C_1 di π ed i punti $M'_1, \dots, M'_k$ sono venuti a cadere in certi punti $M_1, \dots, M_k$ comuni alle due curve C_1 e $C_2 + \dots + C_i$. La retta $\pi\pi'$ (contenente i punti $M'_1, \dots, M'_k$) ammette alla sua volta come posizione limite quella retta t', del fascio di π col centro in P, la quale è tangente coniugata (rispetto ad F) alla tangente t a γ in P; cosicchè sulla t', devono cadere, oltre a P, altre $k-1$ intersezioni delle due curve C_1 e $C_2 + \dots + C_i$. Adesso si faccia variare γ (che è in nostro arbitrio) su F intorno a P, in guisa che la sua tangente t in P descriva il suddetto fascio: sempre troveremo che $k-1$ intersezioni, oltre a P, delle due curve fisse C_1 e $C_2 + ... + C_i$ devono giacere sulla retta t' passante per P e tangente coniugata alla tangente variabile t. Segue che non può essere $k-1>0$, perchè, o, variando t in quel fascio, varia pure la sua tangente coniugata t' ed, in tal caso (dei detti $k-1$ punti, per posizione generica di t', nessuno potendo cadere in P) le due curve C_1 e $C_2 + ... + C_i$ avrebbero infiniti punti comuni, cioè due (o più) delle curve C coinciderebbero, il che si dimostrò già assurdo: ovvero, variando t, non varia t', ed in questo caso il punto P, generico di F, sarebbe un punto parabolico e la F, avendo tutti i suoi punti parabolici, sarebbe una superficie sviluppabile e quindi una rigata (particolare), mentre le rigate furono escluse [1]).

Adunque deve essere $k-1=0$ e però $i-2 \leq 0$ e quindi $i=2$; ed inoltre, dall'essere $k-1=0$, segue anche che le due curve C_1 e C_2 che compongono la curva riducibile sezione di F col piano π, si segano in un solo punto e quindi descrivono un solo sistema. Infine quest'unico sistema è di coniche, perchè una sua curva è segata da un piano π in due punti, quelli cioè nei quali essa è incontrata dalle due curve del sistema giacenti in π. La F di S_3, che contiene ∞^2 coniche e non è rigata, è quindi la superficie di Steiner (n. 6), come si era asserito.

Il teorema di Picard (n. 11) segue dal teorema dimostrato, osservando che i piani tangenti di una superficie F a sezioni piane razionali tagliano F in una curva riducibile, giacchè per ciascuno di essi la sezione acquista nel punto di contatto un altro punto doppio (cfr. n. 22, Cap. 9.°).

---

[1]) La nozione di tangenti coniugate ed i teoremi relativi, di cui qui si è fatto uso, si stabiliscono facilmente con mezzi analitici. Per una trattazione sintetica delle stesse proprietà vedasi CREMONA, *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie* (Mem. Accad. Bologna, 6, 7, (2), 1866, 1867), o la traduzione tedesca fattane da M. CURTZE (Berlin, 1870).

Capitolo 15.°

La superficie di Veronese.

1. — Lo studio della superficie di Veronese (già in vario modo definita nei n. 6, 7, 8 del Cap. precedente), alla quale vogliamo adesso rivolgere la nostra attenzione, richiede qualche aggiunta alle cose del n. 3, Cap. 10.° nel caso $n = r = 2$.

Anzitutto la definizione di due coniche coniugate di un piano π

$$f \equiv \sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0,$$

$$\varphi \equiv \sum \alpha_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$

data dalla

$$\sum a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0 \tag{1}$$

si può porre sotto altra forma. Diciamo A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel discriminante $|a_{ik}|$ di f, per modo che

$$\sum A_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0$$

sia l'equazione di f considerata come conica-inviluppo; e, nella schiera individuata da f e φ, che ha per equazione

$$\sum (\lambda A_{ik} + \mu \alpha_{ik})\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$

consideriamo la terna di coniche, ciascuna degenere in una coppia di punti. Queste corrispondono ai valori del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ che sono radici dell'equazione cubica:

$$\theta(\lambda\mu) \equiv |\lambda A_{ik} + \mu \alpha_{ik}| = 0\,;$$

quindi, considerata la schiera di coniche come un ente razionale nel quale la coordinata è $\frac{\lambda}{\mu}$, il gruppo polare di 1.° ordine (costituito di un solo elemento) dell'elemento $(\lambda'\mu')$ della schiera rispetto alla terna $\theta(\lambda\mu)=0$ è dato da

$$\lambda\frac{\partial\theta(\lambda'\mu')}{\partial\lambda'}+\mu\frac{\partial\theta(\lambda'\mu')}{d\mu'}=0.$$

In particolare il gruppo polare di 1.° ordine di f sarà dato da

$$\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=1,\mu=0}+\mu\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)_{\lambda=1,\mu=0}=0,$$

ossia, sviluppando con le note regole dei determinanti, da

$$3\lambda\,|a_{ik}|^2+\mu\sum a_{ik}\alpha_{ik}=0.$$

Ne segue, se f e φ sono coniugate, che questo gruppo è dato precisamente da φ. Dunque *se una conica-luogo f ed una conica-inviluppo φ sono coniugate, φ è il gruppo polare di 1.° ordine di f (considerata come conica-inviluppo) rispetto alle tre coppie di punti appartenenti alla schiera individuata da f e φ, e viceversa.*

2. — Se una conica f coniugata ad una conica φ si spezza in due rette, indicando con

$$c_0x_0+c_1x_1+c_2x_2=0\ ,\ d_0x_0+d_1x_1+d_2x_2=0$$

le equazioni delle due rette, si ha (a meno di un fattore di proporzionalità)

$$a_{ik}=c_i\,d_k+c_k\,d_i\,,$$

per la quale la (1) diventa

$$\sum c_i\,d_k\,\alpha_{ik}=0.$$

Adunque *se f e φ sono coniugate ed f si spezza in due rette, queste rette sono coniugate nella polarità rispetto a φ, e viceversa.* Correlativamente, *se f e φ sono coniugate e φ si spezza in due punti, questi punti sono coniugati nella polarità rispetto ad f, e viceversa.* Se f è una coppia di rette e φ una coppia di punti ed f,φ sono coniugate, le due coppie si separano armonicamente, e viceversa.

Si vede pure subito (per il n. 3 del Cap. 10.° ovvero come caso particolare della proprietà precedente) che, se f è una retta contata due volte ed è coniugata a φ, la retta tocca φ, e viceversa. Correlativamente, se φ è un punto contato due volte ed è coniugato ad f, il punto appartiene ad f, e viceversa.

Ricordiamo inoltre (n. 3, Cap. 10.°) che ad ogni sistema lineare ∞^{h-1} di coniche-luogo è coniugato un sistema lineare ∞^{5-h} di coniche-inviluppo. Le coppie di rette appartenenti al sistema ∞^{h-1} sono tutte e sole le coppie di rette coniugate rispetto a tutte le coniche del sistema ∞^{5-h} e le rette che contate due volte appartengono al sistema ∞^{h-1} sono tutte e sole le rette basi del sistema ∞^{5-h} (cioè le tangenti comuni alle coniche di questo sistema).

Così in ogni sistema lineare ∞^4 di coniche-luogo vi sono ∞^3 coppie di rette e ∞^1 rette contate due volte: quelle sono le coppie di rette coniugate e queste le tangenti della conica coniugata al sistema.

Così pure in ogni sistema lineare ∞^3 di coniche-luogo vi sono ∞^2 coppie di rette e quattro rette contate due volte: quelle sono le coppie di rette coniugate e queste le tangenti comuni alle coniche della schiera coniugata al sistema.

Si tralascia di enunciare le proprietà correlative.

3. — Nel caso di un sistema lineare ∞^2 di coniche-luogo, cioè di una rete, a cui è coniugato un sistema lineare pure ∞^2 di coniche-inviluppo cioè un tessuto, si ha per le coppie di rette appartenenti alla rete, o, ciò che è lo stesso, per le coppie di rette coniugate rispetto a tutte le coniche del tessuto, una proprietà che è utile dimostrare.

L'equazione del tessuto sia

$$\lambda \sum \alpha_{ik} \xi_i \xi_k + \mu \sum \beta_{ik} \xi_i \xi_k + \nu \sum \gamma_{ik} \xi_i \xi_k = 0 .$$

Se η_i sono le coordinate di una retta di una delle dette coppie, i suoi tre poli rispetto alle tre coniche $\Sigma\, a_{ik} \xi_i \xi_k = 0$, $\Sigma \beta_{ik} \xi_i \xi_k = 0$, $\Sigma \gamma_{ik} \xi_i \xi_k = 0$, dati dalle equazioni

$$\sum \alpha_{ik} \eta_i \xi_k = 0 \ , \ \sum \beta_{ik} \eta_i \xi_k = 0 \ , \ \sum \gamma_{ik} \eta_i \xi_k = 0 ,$$

debbono trovarsi sopra una medesima retta (l'altra della coppia a cui quella appartiene). Quindi deve essere

$$\begin{vmatrix} \sum \alpha_{i0}\eta_i & \sum \alpha_{i1}\eta_i & \sum \alpha_{i2}\eta_i \\ \sum \beta_{i0}\eta_i & \sum \beta_{i1}\eta_i & \sum \beta_{i2}\eta_i \\ \sum \gamma_{i0}\eta_i & \sum \gamma_{i1}\eta_i & \sum \gamma_{i2}\eta_i \end{vmatrix} = 0,$$

cioè la retta η deve toccare una determinata curva di 3.ª classe. Notisi ancora che, se η, η' sono due rette di una coppia, le coniche del tessuto tangenti ad η (ad es.), le quali formano una schiera, debbono toccare la retta η nel punto $\eta\eta'$ (perchè rispetto ad esse η' deve essere coniugata di η), e per conseguenza η deve contenere due punti costituenti una conica del tessuto. Dunque *in una rete di coniche esistono ∞^1 coppie di rette tangenti ad una curva di 3.ª classe, le quali rette sono anche le rette doppie delle ∞^1 coniche (costituite di due punti) del tessuto coniugato.* Correlativamente *in un tessuto di coniche esistono ∞^1 coppie di punti situati sopra una curva di 3.° ordine, i quali punti sono anche i punti doppî delle ∞^1 coniche (costituite di due rette) della rete coniugata.*

4. — Vogliamo ora considerare il caso (dianzi tacitamente escluso) di sistemi lineari di coniche tutte spezzate (in coppie di punti o di rette).

Dal teorema del n. 11, Cap. 10.° segue subito che i fasci di coniche spezzate sono di due specie; una costituita dalle coppie di una involuzione in un fascio di rette, l'altra formata da una retta fissa e da una retta variabile in un fascio, potendosi anche avere simultaneamente le due specie (quando nella prima specie l'involuzione sia singolare (parabolica) o nella seconda il centro del fascio stia sulla retta fissa). Dallo stesso teorema segue che le reti di coniche spezzate sono pure di due specie, cioè costituite di tutte le coppie di rette di un fascio o di tutte le coppie di rette contenenti una retta fissa e segue pure che non esistono sistemi lineari ∞^3, ∞^4 di coniche tutte spezzate.

Si giunge del resto facilmente a questa proprietà senza far uso del menzionato teorema. La determinazione dei fasci di coniche tutte spezzate fu data infatti nel n. 21, Cap. 7.°: e da essa si passa a quella delle reti osservando semplicemente che, se la coppia di rette ab è una conica fissa della rete e la coppia cd una conica variabile, siccome ab, cd devono dar origine ad un fascio di coniche tutte spezzate, deve la coppia *c d* avere una retta comune con *ab* od appartenere con *ab* ad uno stesso fascio.

Notiamo le proprietà correlative. Una schiera di coniche tutte spezzate (in coppie di punti) è una involuzione sopra una retta, ovvero è costituita dalle coppie formate di un punto fisso e di un punto mobile sopra una retta, potendo anche i due casi verificarsi insieme. Un tessuto di coniche tutte spezzate è costituito da tutte le coppie di punti di una retta o da tutte le coppie di punti del piano contenenti un punto fisso.

Notiamo anche che, quando la schiera coniugata ad un sistema lineare ∞^3 di coniche è tutta di coniche spezzate, o le coniche del sistema ∞^3 passano tutte per due punti fissi (in particolare toccano in un punto fisso una retta fissa) o sono tutte le coniche aventi un punto e una retta fissi per polo e polare, e correlativamente. Inoltre, quando il tessuto associato ad una rete è tutto di coniche spezzate, è pure la rete tutta di coniche spezzate, questa essendo formata dalle coppie di rette di un fascio se quello è formato dalle coppie di punti con un punto fisso comune (vertice del fascio), e correlativamente.

5. — Poste queste nozioni sulle coniche coniugate, si può intanto dare un altro aspetto alla rappresentazione su un piano π (n. 6, Cap. 14.°) della superficie di Veronese (di S_5), che d'ora innanzi indicheremo con F_2^4 [1]).

Tutte le coniche-luogo costituenti un sistema lineare ∞^4 corrispondono agli S_4 per un punto. Se si fa corrispondere questo punto alla conica-inviluppo coniugata al detto sistema si ottiene, a lato della corrispondenza biunivoca fra le coniche-luogo di π e gli iperpiani di S_5, una corrispondenza biunivoca fra le coniche-inviluppo di π ed i punti di S_5, così che *la condizione dell'appartenersi in S_5 iperpiano e punto equivale alla condizione di essere in π coniugate le coniche corrispondenti*: e di più anche la seconda corrispondenza è omografica come la prima. Per persuadersene basta notare che se un punto di S_5 descrive un S_4 (in generale un S_k) la conica-

---

[1]) La superficie di VERONESE di cui si trova un cenno in CAYLEY, *On the Curves which satisfy given conditions* (Phil. Trans. 1868), fu studiata diffusamente da VERONESE, *La superficie omaloide* ... (Mem. dell'Accad. dei Lincei, 19 (3), 1883-84) e da SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano* ... (Atti dell'Acc. di Torino, 20, 1885): i quali due lavori, specie il secondo, (oltre ad alcuni altri che citeremo a suo luogo) ci furono di guida nella redazione dei n. seguenti. Cfr. anche STUDY, *Ueber Geometrie der Kegelschnitte* (Mathem. Ann., 27).

inviluppo corrispondente descrive il sistema lineare coniugato alla conica-luogo corrispondente ad S_4 (coniugato al sistema lineare ∞^{4-k} di coniche-luogo corrispondenti agli S_4 per S_k).

I punti di F_2^4 corrispondono ai punti di π, considerati come doppî (cioè alle coniche inviluppo ridotte a coppie di punti coincidenti), perchè un punto doppio è appunto coniugato alle coniche-luogo passanti per esso. I punti di una sezione iperpiana di F_2^4, che è una quartica razionale normale, corrispondono ai punti doppi di π giacenti sopra una conica-luogo (la corrispondente all'iperpiano della sezione): e così i quattro punti in cui F_2^4 è incontrata da un S_3 corrispondono a quattro punti doppî base di un fascio di coniche-luogo. Ciascuna conica di F_2^4 corrisponde ad una retta di π considerata come luogo di punti doppî.

Poichè lo spezzarsi di una conica-inviluppo in due punti esige una sola condizione e poichè una schiera di coniche contiene tre coppie di punti, il luogo dei punti di S_5 corrispondenti alle coppie di punti di π (considerate come coniche-inviluppo) è una ipersuperficie del 3.° ordine, che indicheremo con M_4^3. A questa la F_2^4 appartiene, anzi *la* F_2^4 *è doppia per la* M_4^3. In vero un S_1 di S_5 uscente da un punto di F_2^4 corrisponde ad una schiera di coniche di π contenente un punto doppio: ma questa schiera è di coniche bitangenti e, fuori del punto doppio (in cui cadono due delle sue coniche spezzate in coppie di punti), contiene un'altra sola coppia di punti; dunque quell'S_1 ha un solo punto d'incontro con M_4^3 fuori del suo punto d'appoggio su F_2^4.

6. — Un tessuto di coniche-inviluppo tutte spezzate in coppie di punti si compone, come vedemmo (n. 4), delle ∞^2 coppie di punti di una retta o delle ∞^2 coppie formate da un punto fisso e da ogni punto di π. Corrispondentemente avremo due specie di S_2 contenuti in M_4^3: diremo i primi S_2 *di 1.ª specie*, gli altri, S_2 *di 2.ª specie. Quelli sono i piani delle coniche di* F_2^4, come è evidente, *questi sono i piani tangenti di* F_2^4, come risulta dall'osservare che le ∞^1 involuzioni paraboliche giacenti sulle rette per il punto fisso e aventi questo punto doppio rappresentano in S_5 rette tangenti ad F_2^4 nel punto corrispondente allo stesso punto fisso (mentre una involuzione non singolare rappresenta una corda di F_2^4).

Nella rappresentazione piana si verificano pure facilmente queste altre proprietà. Due S_2 di 1.ª specie hanno sempre comune un punto di F_2^4, mentre due S_2 di 2.ª specie hanno comune un punto esterno ad F_2^4. Un S_2 di 1.ª specie ed uno di 2.ª o non hanno alcun punto comune o si tagliano in una retta tangente ad F_2^4. Per un punto di M_4^3 (esterno ad F_2^4) passa un solo S_2 di 1.ª specie e due di 2.ª specie. Per un punto di F_2^4 passa un solo S_2 di 2.ª specie (quello ivi tangente) ed ∞^1 S_2 di 1.ª specie.

Poichè due piani aventi un punto comune stanno in un S_4, due piani della stessa specie di M_4^3 giaceranno in un S_4, il quale conterrà anche un piano di specie diversa. Così, se quei due piani sono di 1.ª specie, l'S_4 che li congiunge conterrà le rette che toccano le due coniche di F_2^4, esistenti in quei due piani, nel loro punto comune e quindi conterrà il loro piano che è il piano (S_2 di 2.ª specie) tangente in questo punto ad F_2^4: anzi il detto S_4, passando per un piano tangente a questa superficie, sarà esso medesimo tangente (n. 12, Cap. 9.°). Viceversa un S_4 tangente ad F_2^4 in un punto, dovendo tagliarla in una quartica con punto doppio ivi (e quindi rappresentata in π da una conica con punto doppio) taglia F_2^4 in due coniche passanti per quel punto. Se poi due piani sono di 2.ª specie, cioè due S_2 tangenti di F_2^4, l'S_4 che li congiunge sega questa superficie in una quartica con due punti doppî nei due punti di contatto di quegli S_2 (cioè rappresentata in π da una conica con due punti doppî e quindi da una retta doppia), la quale quartica si riduce alla conica passante per quei due punti contata due volte. Perciò l'S_4 medesimo contiene, oltre il piano di questa conica (S_2 di 1.ª specie), tutti i piani tangenti ad F_2^4 nei punti della conica stessa (come si vede o direttamente o dalla rappresentazione in π), e per questa ragione è detto *iperpiano tangente doppio di F_2^4 (lungo quella conica).*

7. — Alle F_2^4, M_4^3, superficie ed ipersuperficie luoghi di punti, debbono associarsi un'altra superficie ed un'altra ipersuperficie inviluppi di piani, che nascono dalla dualità in π, riprendendo cioè la primitiva concezione delle coniche di π come luogo di punti. Le ∞^4 coniche che si spezzano in coppie di rette hanno per corrispondenti ∞^4 iperpiani (gli iperpiani tangenti ad F_2^4) costituenti una ipersuperficie del 4.° ordine, che si dirà μ_4^3, e le ∞^2 coniche costituite di rette doppie hanno per corrispondenti ∞^2 iperpiani (gli iperpiani tangenti doppî di F_2^4) costituenti una superficie del 4.° ordine, che s'indicherà con φ_2^4.

Le proprietà delle φ_2^4, μ_4^3 si deducono, almeno in parte, da quelle di F_2^4, M_4^3 sostituendo agli enti di π e di S_5 i loro correlativi. Così in μ_4^3 esisteranno Σ_2 di 1.ª e 2.ª specie: un Σ_2 di 1.ª specie contenendo tutti gli iperpiani corrispondenti alle ∞^2 coppie di rette di un fascio di π ed un Σ_2 di 2.ª specie contenendo tutti gli iperpiani corrispondenti alle ∞^2 coppie costituite da una retta fissa e da ogni retta di π.

Si ha la proprietà: — *L'S_2 sostegno di un Σ_2 di 1.ª o di 2.ª specie di μ_4^3 è un S_2 di 2.ª o di 1.ª specie di M_4^3* —, la quale segue subito dall'ultima proprietà del n. 4 e dalla condizione espressa nel n. 5 per l'appartenersi in S_5 iperpiano e punto.

8. — Un S_2 di 2.ª specie di M_4^3 contiene i punti di S_5 corrispondenti alle coniche-inviluppo di π spezzate in un certo punto fisso ed in un punto variabile in π: quindi (trascurando il punto fisso) i punti di S_2 vengono a corrispondere biunivocamente ai punti di π e la corrispondenza è omografica perchè ai punti di una retta di S_2 corrispondono in π pure i punti di una retta (associati al punto fisso).

Ora presi tre S_2 di 2.ª specie di M_4^3, un quarto S_2 (variabile) di 2.ª specie li sega in tre punti corrispondenti omograficamente, come si è veduto, allo stesso punto di π (quello che associato ad ogni punto del piano dà le coppie corrispondenti ai punti dell'S_2 variabile). Dunque, ricordando (n. 7) che gli S_2 di 2.ª specie di M_4^3 (luoghi di punti) sono gli S_2 di 1.ª specie di μ_4^3 (inviluppi di iperpiani), si ha che *la M_4^3 (μ_4^3) può considerarsi come il luogo degli S_2 congiungenti tre punti corrispondenti di tre S_2 riferiti omograficamente, e tutti questi S_2 risultano per essa di 2.ª specie (di 1.ª specie)* [1].

Vale un teorema correlativo per μ_4^3 che ha significato anche per la M_4^3, cioè *la M_4^3 (μ_4^3) può considerarsi come il luogo degli S_2 intersezioni di tre iperpiani corrispondenti di tre stelle proiettive aventi per sostegni tre S_2, e tutti questi S_2 risultano per essa di 1.ª specie (di 2.ª specie)*.

9. — Le cose esposte possono essere illustrate con semplici considerazioni analitiche. Scriviamo l'equazione di una conica variabile su π nella forma

$$(1) \qquad \sum X_{ik}\xi_i\xi_k = 0 \qquad (X_{ik} = X_{ki}).$$

I coefficienti X_{ik} $(i, k = 0, 1, 2)$ di questa equazione assumiamo come coordinate correnti di punto in S_5 (cfr. n. 2, Cap. 10.°): allora l'equazione

[1]) Siccome gli S_2 qui considerati sono piani tangenti di F_2^4, si trova adunque per questa un teorema analogo a quello delle tangenti di una conica, cioè che *un suo piano tangente variabile incontra gli altri in punti corrispondentisi omograficamente.* Correlativamente.

dell'ipersuperficie M_4^3 è data dall'eguagliare a zero il discriminante della conica

(2) $$|X_{ik}|=0\,,$$

e le equazioni di F_2^4 si ottengono annullando i minori di 2.° ordine di $|X_{ik}|$, cioè sono

(3) $$\begin{cases} X_{00}X_{11}-X_{01}^2=0\,,\quad X_{11}X_{22}-X_{12}^2=0\,,\quad X_{22}X_{00}-X_{02}^2=0\,,\\ X_{01}X_{02}-X_{00}X_{12}=0\,,\quad X_{10}X_{12}-X_{11}X_{02}=0\,,\quad X_{20}X_{21}-X_{22}X_{01}=0\,. \end{cases}$$

Le coordinate x_i in π del punto doppio, rappresentato dalla (1) in virtù delle (3), hanno coi coefficienti X_{ik}, cioè colle coordinate del punto corrispondente di F_2^4, le relazioni

(4) $$X_{ik}=x_i\,x_k \qquad (i\,,k=0\,,1\,,2)$$

(la (1) dovendo ridursi al quadrato della forma lineare $\Sigma\xi_i\,x_i$). Queste sono adunque le formule di rappresentazione di F_2^4 su π.

Dalle stesse formule (4) segue che, se x descrive in π una conica-luogo data dalla equazione

$$\sum \Xi_{ik}\,x_i\,x_k=0\,,$$

il punto corrispondente X (di coordinate X_{ik}) di F_2^4 si muove nell'iperpiano di equazione

$$\sum \Xi_{ik}\,X_{ik}=0\,,$$

cioè di coordinate $\Xi_{00}\,,\Xi_{11}\,,\Xi_{22}\,,2\Xi_{01}\,,2\Xi_{02}\,,2\Xi_{12}$. Si scelgano invece per coordinate d'iperpiano in S_5 le Ξ_{ik}, ossia le precedenti attribuendo quando $i \neq k$ il coefficiente $\frac{1}{2}$, onde si varia l'iperpiano unità (che non sarà più l'iperpiano polare del punto unità rispetto alla piramide fondamentale). Allora le (2), (3), ove si sostituiscano le Ξ_{ik} alle X_{ik}, sono rispettivamente le equazioni di φ_2^4, μ_4^3, e le (4), ove si faccia inoltre la sostituzione delle ξ_i alle x_i, sono le formule di rappresentazione di φ_2^4 su π (esprimenti cioè la corrispondenza biunivoca fra gli iperpiani di φ_2^4 e le rette di π) [1].

[1]) Avvertasi bene, per una applicazione avvenire, che, occorrendo che l'iperpiano unità non sia cambiato (cioè sia polare del punto unità rispetto alla pira-

Se si osserva che l'equazione (2) della M_4^3 si ottiene colla eliminazione dei parametri λ, μ, ν dalle tre equazioni

$$\lambda X_{00} + \mu X_{01} + \nu X_{02} = 0$$
$$\lambda X_{10} + \mu X_{11} + \nu X_{12} = 0$$
$$\lambda X_{20} + \mu X_{21} + \nu X_{22} = 0 \,,$$

e correlativamente per la μ_4^3, si hanno senz'altro i teoremi del n. 8 relativi alla generazione proiettiva delle M_4^3, μ_4^3.

Osserviamo ancora come, in virtù delle formule poste, sia collocata la piramide di riferimento di S_5. Indicando con A_{ik} il vertice di essa che ha tutte le coordinate nulle meno X_{ik}, dalle (3) segue subito che i vertici A_{00}, A_{11}, A_{22} sono punti di F_2^4 e precisamente i tre punti comuni alle coniche (a due a due) di questa superficie contenute nei piani $A_{00}A_{11}A_{01}$, $A_{11}A_{22}A_{12}$, $A_{22}A_{00}A_{02}$ e rappresentate in detti piani dalle prime tre equazioni (3), e che quindi A_{01}, A_{12}, A_{20} sono rispettivamente i punti nei quali s'intersecano le tangenti a quelle coniche nelle coppie di punti A_{00}, A_{11}; A_{11}, A_{22}; A_{22}, A_{00}.

10. — Riprendendo i ragionamenti sintetici, dimostriamo che F_2^4 *(e correlativamente* φ_2^4*) sta su* ∞^5 *quadriche*, ossia è varietà base di un sistema lineare ∞^5 di quadriche. Tali sono infatti le ∞^5 quadriche polari dei punti di S_5 rispetto alla ipersuperficie M_4^3, le quali passano per F_2^4 in quanto è superficie doppia di M_4^3. Che poi non ve ne sieno altre si prova osservando che un S_4 generico sega F_2^4 in una curva razionale normale, che la infinità delle quadriche di S_4 passanti per tale curva è 5 (n. 11, Cap. 12.°) e che questa è la stessa infinità delle quadriche di S_5 passanti

---

mide fondamentale), le equazioni di φ_2^4 (ad es.) sono date invece dall'eguagliare a zero i minori di 2.° ordine del determinante

$$\begin{vmatrix} \Xi'_{00} & \frac{1}{2}\Xi'_{01} & \frac{1}{2}\Xi'_{02} \\ \frac{1}{2}\Xi'_{10} & \Xi'_{11} & \frac{1}{2}\Xi'_{12} \\ \frac{1}{2}\Xi'_{20} & \frac{1}{2}\Xi'_{21} & \Xi'_{22} \end{vmatrix} ,$$

le Ξ'_{ik} essendo *coordinate di iperpiano* ($\Xi'_{ik} = \Xi_{ik}$ se $i = k$, e $\Xi'_{ik} = 2\Xi_{ik}$ se $i \neq k$).

per F_2^4 (n. 17, Cap. 10.°) in quanto nessuna di tali quadriche può passare per l'S_4 cioè spezzarsi (altrimenti F_2^4 non apparterrebbe ad S_5) [1]).

11. — I punti di una quadrica passante per F_2^4, cioè di una quadrica polare di un punto P rispetto a M_4^3, hanno su π una notevole rappresentazione.

Considerisi l'iperpiano polare di P rispetto ad M_4^3 (o alla detta quadrica polare). Poichè ogni punto Q di esso è il gruppo polare di 1.° ordine di P rispetto ai tre punti nei quali PQ taglia M_4^3, ricordando il teorema del n. 1, si ha che la conica-inviluppo corrispondente a P e la conica-luogo aderente alla conica-inviluppo corrispondente a Q sono coniugate: cosicchè, muovendosi Q nell'iperpiano polare di P, la seconda conica descrive il sistema coniugato alla prima, la quale per conseguenza (come luogo) rappresenta l'iperpiano polare di P. Adunque *un punto ed un* S_4, *che sono polo e polare rispetto ad* M_4^3, *sono rappresentati dalla stessa conica come inviluppo e come luogo, e viceversa.* Ne discende, osservando che gli iperpiani per P hanno i loro poli sulla quadrica polare di P e che quegli iperpiani sono rappresentati dalle coniche-luogo coniugate alla conica-inviluppo corrispondente a P (n. 5), che *gli* ∞^4 *punti della quadrica polare di un punto* P *rispetto ad* M_4^3 *corrispondono in* π *alle coniche-inviluppo (costituenti un sistema quadratico* ∞^4*) aderenti alle coniche-luogo coniugate alla conica-inviluppo corrispondente a* P: e correlativamente.

12. — Un S_4 che tocca M_4^3 in un punto, ne contiene gli spazî lineari passanti per il punto, quali sono l'S_2 di 1.ª specie e i due S_2 di 2.ª specie di F_2^4 uscenti dal punto, e quindi (n. 6) è precisamente l'iperpiano tangente doppio di F_2^4 lungo la conica dell'S_2 di 1.ª specie, iperpiano con-

---

[1]) Algebricamente la proprietà risulta dalle (3). Queste, prese singolarmente rappresentano sei quadriche (anzi sei coni: ad es., la prima delle (3) rappresenta un cono avente per vertice il piano fondamentale $A_{00} A_{11} A_{01}$); le quali quadriche si vede subito essere linearmente indipendenti. L'equazione di una altra quadrica

$$\sum A_{ik,rs} X_{ik} X_{rs} = 0$$

($A_{ik,rs} = A_{ik,sr} = A_{ki,rs} = A_{ki,sr} = A_{rs,ik} = A_{rs,ki} = A_{sr,ik} = A_{sr,ki}$), che contenga F_2^4, trasformata colle (4), conduce alla relazione

$$\sum A_{ik,rs} x_i x_k x_r x_s \equiv 0$$

che deve essere identica nelle coordinate x. Di qui si trae, con semplice discussione, che la precedente equazione è combinazione lineare delle (3).

tenente tutti gli S_2 (di 2.ª specie) tangenti ad F_2^4 nei punti della conica stessa. Così si trova anzi che il detto S_4 tocca M_4^2 non solo nel punto considerato ma in ogni punto dell'S_2 di 1.ª specie, o, come si dice, è tangente ad M_4^2 lungo tale S_2. Adunque *gli iperpiani tangenti doppî di* F_2^4 *(lungo coniche) sono gli iperpiani tangenti di* M_4^2 *(lungo i piani delle coniche):* e correlativamente.

Se ne ricava che *la varietà di contatto* V_3^6 *(la quale ha* F_2^4 *doppia) degli* S_4 *tangenti ad* M_4^2*, partenti da un punto* P*, è luogo di* ∞^1 S_2 *di* 1.ª *specie.* Essa è intersezione di M_4^2 colla quadrica polare di P. Segando coll'iperpiano polare di P si ha *una superficie rigata* V_2^6 *luogo dei punti di contatto delle rette osculatrici ad* M_4^2 *uscenti da* P (n. 17, Cap. 8.°).

13. — Vediamo in quale relazione stanno alla F_2^4 gli S_2, spazî massimi, di una quadrica M_4^2 passante per essa.

Suppongasi dapprima che il polo P della M_4^2 rispetto ad M_4^3 sia esterno a questa ipersuperficie. Un iperpiano tangente ad M_4^2 in un suo punto Q generico (e basta esterno ad M_4^3) taglia M_4^2 in un cono, che si può imaginare ottenuto proiettando da Q una quadrica generale di un S_3, e taglia F_2^4 in una curva C^4 razionale normale (giacente sul cono), che viene proiettata da Q sopra questo S_3 in una quartica razionale segnata su quella quadrica. Ora quest'ultima quartica non ha punti doppî, altrimenti per Q passerebbe una corda di C^4 che starebbe su M_4^3 (per la quale C^4 è doppia), contro al supposto di Q esterno ad M_4^3; cioè la quartica considerata è di 2.ª specie e, delle generatrici della quadrica che la contiene, quelle di un sistema la taglieranno in tre punti, quelle dell'altro sistema in un punto. Siccome tali generatrici proiettate da Q dànno gli S_2 passanti per Q della M_4^2, segue che *dei due sistemi* ∞^3 *di* S_2 *di una quadrica* M_4^2 *passante per* F_2^4 *l'uno è composto di* S_2 *che hanno tre punti comuni con* F_2^4*, l'altro di* S_2 *che hanno un sol punto comune con la medesima* F_2^4. Notisi che sulla quadrica M_4^2 esistono ∞^1 S_2 contenenti coniche di F_2^4 (n. 12). Tali S_2 appartengono ad uno stesso sistema avendo a due a due un punto comune (n. 20, Cap. 6.°), e precisamente *al sistema dei piani secanti in un solo punto*, perchè si possono considerare piani di sistema diverso da quello a cui i detti piani appartengono seganti uno qualunque di questi in una retta e quindi la sua conica in due punti e che perciò contengono due ed allora tre punti di F_2^4.

14. — Il polo P di M_4^2 giaccia ora su M_4^3. Per P passa un S_2 di 1.ª specie che taglia F_2^4 in una conica C: quindi ogni S_3 che passa per quell'S_2 taglia

M_4^3 in una superficie di 3.° ordine che si spezza nell'S_2 di 1.ª specie e in una quadrica residua passante per C [1]. Ora la quadrica polare di P rispetto a questa superficie di 3.° ordine si spezza, come subito si vede, nell'S_2 considerato e nel piano polare di P rispetto a quella quadrica residua, il qual piano passa per la polare p di P rispetto a C. Quindi possiamo intanto affermare che *la quadrica polare di un punto* P *di* M_4^3 *è una quadrica* M_4^2 *specializzata due volte, contenente l'* S_2 *di 1.ª specie passante per* P *e avente per retta doppia la polare* p *di* P *rispetto alla conica* C *in cui l'* S_2 *taglia* F_2^4.

L'iperpiano tangente ad M_4^3 in P, anzi (n. 12) in tutti i punti dell'S_2 di 1.ª specie in discorso, è pure tangente in P, e quindi in tutti i medesimi punti, ad M_4^2 e però sega questa quadrica in due S_3 passanti per il detto S_2, che sono quindi, per la quadrica M_4^2, spazî (massimi) di specie diversa (n. 20, Cap. 6.°). Questi due S_3 sono quelli che congiungono l'S_2 di 1.ª specie ai due S_2 di 2.ª specie tangenti ad F_2^4 nei punti Q, Q' in cui p taglia C e però passano per PQ, PQ'. Ora un iperpiano che contenga uno di questi S_3 sega F_2^4 nella conica C ed in una altra conica C' passante per Q (o per Q') e sega la M_4^2 in un altro S_3 avente quindi comune con F_2^4 due punti in Q (o Q'), uno in Q' (o Q) e il quarto variabile. Adunque, nel caso attuale, si deve concludere che, *rispetto alla* F_2^4, *i due sistemi di* S_3 *della quadrica* M_4^2 *polare di* P *si comportano nello stesso modo e solo si differenziano rispetto ai punti* Q, Q' (essendo Q intersezione doppia e Q' semplice per gli S_3 di un sistema, ed inversamente per gli S_3 dell'altro).

15. — Proiettiamo F_2^4 sopra M_4^3 da un punto O di S_5, esterno ad M_4^3, cioè consideriamo la superficie luogo della residua intersezione P_1 con M_4^3 di un raggio congiungente O con un punto P variabile su F_2^4. Se si considera l'iperpiano polare di O rispetto ad M_4^3 e si dice O_1 il punto in cui lo incontra il detto raggio congiungente, il rapporto anarmonico dei quattro punti O, P, O_1, P_1 è costante al variare del raggio stesso ed anzi eguale a -2 come è facile verificare [2]. Segue senz'altro che *la proiezione*

---

[1]) Questa quadrica è un cono, perchè un S_4 per l'S_3 sega F_2^4 in C ed in una altra conica che ha coll'S_3, fuori di C, un punto comune che deve essere doppio per detta quadrica.

[2]) Si ha sul raggio congiungente un gruppo di tre punti, dato dal punto P contato due volte e dal punto P_1, rappresentabile con $x_0^2 x_1 = 0$. Il gruppo

di F_2^4 *su* M_4^2 *da un punto* O, *esterno ad* M_4^2, *è, come* F_2^4, *una superficie di Veronese* $F_2'^4$, *che corrisponde ad* F_2^4 *in una omologia avente* O *per centro, l'iperpiano* ω *polare di* O *rispetto ad* M_4^2 *per asse e* — 2 *per invariante assoluto* [1]).

Ne risulta un'altra proposizione. Si considerino due coniche corrispondenti γ, γ' di $F_2^4, F_2'^4$, le quali coniche hanno sopra l'iperpiano ω due punti comuni P, Q ed appartengono ad un S_3. I due coni passanti per γ, γ' (cfr. n. 10, Cap. 7.°) sono l'uno il cono che le proietta dal punto O, l'altro il cono rimanente intersezione di M_4^2 con questo S_3 (cfr. nota al n. 14). Il vertice V di questo secondo cono è un punto di F_2^4 che si proietta da O in un punto V' (sopra $F_2'^4$) del piano della conica γ; e, siccome VV' è polare di PQ rispetto al fascio di quadriche passanti per le due coniche γ, γ' (giacchè i loro piani tangenti in P, Q passano per V, V'), è chiaro che V' è polo di PQ rispetto a γ. Dunque $F_2'^4$ è anche il luogo dei poli dell'iperpiano ω rispetto alle coniche di F_2^4 medesima. Che se si osserva avere cinque quadriche passanti per la F_2^4 un solo punto comune ulteriore [2]), perchè i loro punti (n. 11) sono rappresentati da cinque sistemi lineari ∞^4 di coniche-luogo (pensando queste come inviluppo) e questi sistemi lineari hanno una conica-luogo comune, è evidente (per il teorema di reciprocità del n. 6, Cap. 8.°) che *ogni iperpiano* ω *di* S_5 *ha ri-*

---

polare di 1.° ordine rispetto ad esso di un punto O $(y_0 : y_1)$ è un punto O_1 di coordinate $-y_0 : 2y_1$ e si ha $\left(\frac{y_0}{y_1}, 0, \frac{-y_0}{2y_1}, \infty\right) = -2$.

[1]) La dimostrazione si estende immediatamente a provare più generalmente che *se una* V_{r-1}^{ν} *di* S_r *contiene una varietà* F *(di qualunque dimensione, zero incluso) di punti* $(\nu-1)^{\text{upli}}$, *la proiezione* F' *di* F *su* V_{r-1}^{ν} *da un punto* O, *esterno ad essa, corrisponde ad* F *in una omologia che ha* O *per centro, l'iperpiano polare di* O *rispetto a* V_{r-1}^{ν} *per asse ed* $1-\nu$ *per invariante assoluto*. Così per la V_3^3 di S_4 con 10 punti doppî (n. 19 e seg., Cap. 8.°) la proiezione di questi dai punti di S_4, dà, su V_3^3, ∞^4 sistemi di 10 punti aventi la stessa configurazione dei 10 punti doppî.

Cfr., anche per altre proprietà che si collegano a quelle del presente n. e per le relative indicazioni bibliografiche, Rosati, *Sulle superficie di Veronese e di Steiner* (Atti dell'Accad. di Torino, 35, 1899).

[2]) La quale proprietà può anche dedursi, come caso particolarissimo, dalla importante formula del n. 35 (ponendovi $r=5$, $n_1=n_2=\ldots=n_5=2$, $\mu_0=4$, $\mu_1=6$, $\mu_2=3$) della citata Memoria di Severi, *Sulle intersezioni* ... (Mem. Accad. Torino, 52 (2), 1902).

spetto ad M_4^3 *un unico polo.* Inoltre la conclusione precedente si può presentare nella forma generale: — *Il luogo dei poli di un iperpiano rispetto alle coniche di una superficie di Veronese è una nuova superficie di Veronese* —.

16. — Una trasformazione proiettiva, omografica o correlativa del piano π in sè stesso, muta in sè stessi o scambia fra loro linearmente i sistemi lineari ∞^5 di coniche-luogo e di coniche-inviluppo di π, mutando insieme le coniche degeneri in coniche degeneri; quindi corrisponde ad una trasformazione proiettiva dello spazio S_5 in sè stesso che trasforma in sè medesime o scambia fra loro le due varietà F_2^4, φ_2^4. Reciprocamente è chiaro che ad una trasformazione proiettiva di S_5 che mantenga ferme o scambi fra loro le F_2^4, φ_2^4 corrisponde rispettivamente in π una trasformazione omografica o correlativa. Dunque *esistono* ∞^8 *omografie di* S_5 *che trasformano in sè stesse* F_2^4 *e* φ_2^4 *e* ∞^8 *correlazioni che trasformano* F_2^4 *in* φ_2^4 [1]).

Una correlazione di S_5 in cui F_2^4 e φ_2^4 si corrispondono, producendo manifestamente in π una correlazione non singolare, non può essere un sistema nullo; giacchè, se fosse, ogni punto di F_2^4 starebbe nell'iperpiano corrispondente di φ_2^4 e quindi ogni punto di π apparterrebbe alla retta corrispondente (il che è impossibile se appunto la correlazione su π non è singolare (n. 5, Cap. 5.°)). Nella correlazione di S_5 si hanno però le due quadriche dei punti e iperpiani incidenti (n. 1, Cap. 5.°). La quadrica dei punti incidenti (sulla quale F_2^4 non può giacere per la stessa ragione ora detta) taglia F_2^4 in una linea, dell'8.° ordine, di punti tutti situati nei loro iperpiani corrispondenti (iperpiani di φ_2^4), la quale linea quindi sarà rappresentata in π dalla conica dei punti incidenti della correlazione di π corrispondente alla correlazione considerata in S_5, e però sarà una quartica razionale normale contata due volte; onde la suddetta quadrica dei punti incidenti toccherà lungo di essa la F_2^4. Correlativamente.

In particolare le ∞^5 polarità del piano π dànno luogo a ∞^5 correlazioni involutorie di S_5, che, per ciò che si è detto, devono essere polarità. Le ∞^5 quadriche fondamentali, rispetto alle quali F_2^4, φ_2^4 sono polari reciproche, toccheranno tutte F_2^4 (e correlativamente per φ_2^4) lungo quartiche razionali normali.

---

[1]) Le omografie di S_5 che lasciano invariato un punto, oltre F_2^4, dànno la metrica euclidea o non euclidea, secondochè il punto non è od è esterno ad M_4^3. Cfr. per altri particolari su questo argomento il n. 6 del lavoro di SEGRE citato nella nota al n. 1.

Se fra i piani rappresentativi di due F_2^4 di Veronese si stabilisce una omografia ne risulta una corrispondenza collineare fra le due F_2^4. Anzi *fra due* F_2^4 *qualunque di Veronese esiste una corrispondenza collineare così che ad una data sezione iperpiana dell'una corrisponde una data sezione iperpiana dell'altra in una proiettività pure data fra queste due linee sezioni,* perchè resta fissata una proiettività fra le due coniche imagini delle due linee e quindi una omografia fra i due piani rappresentativi delle due F_2^4 [1]). Correlativamente.

Osserviamo qui che, essendo ∞^{35} le omografie di un S_5 e ∞^8 le omografie di una F_2^4 di Veronese in sè e potendosi una tale superficie ottenere collinearmente da ogni altra, sono ∞^{27} le F_2^4 di Veronese in S_5 e ∞^6 quelle che passano per una C^4 razionale normale (di queste esistendo ∞^5 sopra F_2^4 ed ∞^{26} in S_5).

17. — Il confronto di ciò che si è detto nel n. precedente con ciò che si disse nel n. 25, Cap. 6.°, porge una chiara idea della differenza esistente fra la geometria proiettiva delle coniche di un S_2 e la geometria proiettiva dei complessi lineari di un S_3: giacchè quella corrisponde alla geometria di uno spazio S_5 rispetto al gruppo delle trasformazioni omografiche che lasciano in sè una superficie di Veronese F_2^4, mentre questa corrisponde alla geometria di uno spazio S_5 rispetto al gruppo delle trasformazioni omografiche che lasciano in sè una quadrica V_4^2.

Tuttavia si possono ottenere fra le due geometrie relazioni notevoli ed eleganti, ad es. scegliendo per V_4^2 una delle quadriche per F_2^4; ma su ciò non vogliamo qui fermarci [2]).

---

[1]) Combinando questa proposizione, che diremo *a*), coll'altra *b*): — *In un* S_5 *due* F_2^4 *di Veronese aventi comuni due sezioni iperpiane coincidono* — (subito dimostrata, giacchè, segandole con un iperpiano variabile, si hanno due C^4 con otto punti comuni e quindi identiche), SEGRE perviene in questo altro modo a dimostrare che *in* S_6 *una* V_3^4 *le cui sezioni iperpiane sieno* F_2^4 *di Veronese è un cono* (n. 10, Cap. 14.°). Si seghi la V_3^4 con due iperpiani S_5, S'_5: si ottengono due superficie di VERONESE F, F' con una sezione iperpiana comune C^4 dell'S_4 intersezione di S_5, S'_5. Per la proposizione *a*) esiste una omografia fra F, F' in cui tutti i punti di questa C^4 sono uniti, e quindi uniti tutti i punti di S_4. Ne segue che quella omografia è una prospettività, e però F, F' sono in un cono (col vertice nel centro di prospettiva). Segando con un iperpiano generico questo cono e la V_3^4, si hanno due superficie di VERONESE aventi comuni le stesse C^4 su F, F' e quindi coincidenti, in causa della proposizione *b*). Dunque la V_3^4 coincide col cono.

[2]) Cfr. n. 12 e seg. del lavoro di SEGRE citato nella nota al n. 1.

18. — Occupiamoci invece di quella superficie di S_3 che nasce dalla F_2^4 per proiezione da un S_1 non avente punti comuni con F_2^4, ossia che è rappresentativa di un sistema lineare ∞^3 di coniche senza punti base e che dicemmo superficie di Steiner (n. 6, Cap. 14.°) [1].

Sieno A_1, A_2, A_3 i tre punti in cui l'S_1 di proiezione taglia la M_4^3, S'_2, S''_2, S'''_2 gli S_2 di 1.ª specie che passano rispettivamente per quei punti, e C', C'', C''' le tre coniche loro intersezioni con F_2^4. Se A_{23} è il punto comune a C'', C''', l'$S^*_2 = A_{23}S_1$ taglia S''_2, S'''_2 lungo le rette A_2A_{23}, A_3A_{23}, le quali incontrano rispettivamente C'', C''' in punti A_{12}, A_{13} la cui congiungente, essendo in quell'S^*_2, incontra S_1 in un punto. Questo punto (manifestamente diverso da A_2, A_3) deve essere il punto A_1, perchè l'S_2 della conica di F_2^4 passante per A_{12}, A_{13} giace sopra M_4^3 e questa non ha sull'S_1 che i tre punti A_1, A_2, A_3. Anzi, l'S_2 di 1.ª specie partente da A_1 essendo S'_2, risulta che la detta conica è C'. Dunque *i tre punti nei quali una retta taglia M_4^3 e i tre punti d'intersezione delle coniche di F_2^4 situate nei tre S_2 di 1.ª specie che passano per quei punti sono i sei vertici di un quadrilatero completo.* Quando si proietta dall'S_1 la F_2^4 su S_3, ciascuna delle tre coniche C', C'', C''' si proietta in una retta doppia e i punti A_{12}, A_{23}, A_{13} in un punto triplo: onde *la superficie di Steiner ha tre rette doppie concorrenti in un punto triplo (triplanare)* [2].

Una retta uscente per es. da A_1 e segante C' in due punti dà luogo ad un punto di una retta doppia (traccia nell'S_3 dell'S_2 congiungente quella retta coll'S_1 di proiezione), e i piani tangenti alla superficie di Veronese in quei due punti si proiettano nei due piani tangenti alla superficie di Steiner in questo punto doppio. Le due tangenti condotte

---

[1] Questa superficie fu scoperta da STEINER nel 1844, durante la sua permanenza in Roma (onde la diceva « *seiner Römerfläche* »). I suoi dubbi sull'ordine furono tolti da WEIERSTRASS che ne ottenne la rappresentazione con forme quadratiche di tre parametri. Non essendosi pubblicato nulla in proposito, KÜMMER la trovò nelle sue ricerche sulle superficie di 4.° grado su cui giacciono serie di coniche (Journal für die reine und ang. Mathematik, 64). Seguirono subito lavori di SCHRÖTER, CREMONA, CLEBSCH (cfr. *Steiner's Werke*, II, pag. 721, 741).

[2] Se l'S_1 di proiezione tocca oppure oscula la M_4^3, si hanno quei due casi particolari della superficie di STEINER, osservati da CLEBSCH e da CREMONA (cfr. CREMONA: *Rappresentazione della superficie di Steiner* ... (Rend. dell' Ist. lomb., 4, 1867)), nei quali due oppure tutte e tre le rette doppie della superficie divengono successive.

da A_1 a C' dànno luogo adunque a due punti uniplanari o cuspidali della superficie di Steiner. Cosicchè *questa ha sei punti cuspidali, due per ciascuna retta doppia.*

Gli iperpiani per S_1 che toccano F_2^4 sono tagliati dall'S_3 (su cui si fa la proiezione) nei piani tangenti alla superficie di Steiner e ognuno di questi taglia la superficie in due coniche i cui quattro punti comuni sono il punto di contatto e le intersezioni del piano con le tre rette doppie.

Per la retta S_1 passano quattro iperpiani (di φ_2^4) tangenti doppî di F_2^4 (n. 6). Quindi *la superficie di Steiner ammette quattro piani tangenti doppî (ciascuno dei quali cioè la tocca lungo una conica)* [1]. Ma di più notiamo che i suddetti quattro iperpiani devono toccare le coniche C', C'', C''' e quindi segare S'_2, S''_2, S'''_2 in tangenti di quelle coniche passanti per A_1, A_2, A_3; onde la conica di contatto di ciascuno di quegli iperpiani deve contenere tre dei punti di contatto di tali tangenti. Si ha adunque che *la conica di contatto di ciascuno dei piani tangenti doppî della superficie di Steiner contiene tre punti cuspidali.*

19. — Veniamo alla rappresentazione della superficie di Steiner sul piano π.

Le ∞^3 sezioni piane di questa superficie hanno per imagini le ∞^3 coniche-luogo di π che corrispondono agli iperpiani di S_3 passanti per S_1. La schiera di coniche-inviluppo coniugata a quel sistema lineare corrisponde ai punti della retta S_1: in particolare le tre coppie di punti di questa schiera corrispondono ai punti A_1, A_2, A_3, mentre ai singoli punti di ciascuna di quelle coppie (considerati come punti doppî di π) corrispondono i punti di contatto delle tangenti condotte dai punti A_1, A_2, A_3 alle coniche C', C'', C'''. Le quattro rette base della schiera corrispondono ai quattro iperpiani tangenti doppî di F_2^4 passanti per S_1.

Adunque queste quattro rette base rappresentano i quattro piani tangenti doppî della superficie di Steiner; i sei vertici del loro quadrilatero, i punti cuspidali di questa superficie; e le rette diagonali, le rette doppie di essa. Anzi, poichè tali rette diagonali sono imagini delle tre coniche C', C'', C''' della superficie di Veronese F_2^4 e su queste coniche le coppie di punti corrispondenti ai punti delle rette doppie della superficie

[1]) La superficie di STEINER è adunque la correlativa in S_3 della superficie di 3.° ordine (e di 4.ª classe) con quattro punti doppî.

di Steiner costituiscono tre involuzioni quadratiche aventi per punti doppî i punti di contatto delle tangenti da A_1, A_2, A_3 a C', C'', C''', è chiaro che i punti delle tre rette doppie della superficie di Steiner hanno per imagini le coppie delle tre involuzioni quadratiche sulle tre rette diagonali suddette aventi per punti doppî i vertici opposti del quadrilatero. Infine il punto triplo ha per imagine la terna dei vertici del trilatero diagonale.

20. — Se si indicano con $y_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ le equazioni dei quattro lati del quadrilatero base della schiera superiormente considerata, così che la relazione identica fra esse sia

$$\sum y_i \equiv 0\,, \tag{5}$$

poichè il sistema lineare delle imagini delle sezioni piane è una combinazione lineare delle $y_i^2 = 0$, si potranno assumere, come formule per la rappresentazione piana della superficie di Steiner, le

$$x_i = y_i^2 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)\,.$$

Da queste e dalla (5), eliminando le y_i, si ha l'equazione della superficie di Steiner nella forma

$$\sum x_i^{\frac{1}{2}} = 0\,,$$

ovvero nell'altra

$$(x_0^2 + \ldots - 2\,x_0 x_1 - \ldots)^2 - 64\,x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\,.$$

Un piano di equazione $\Sigma \xi_i x_i = 0$, cui corrisponde una conica di equazione $\Sigma \xi_i y_i^2 = 0$, sarà un piano tangente della superficie, quando questa conica si spezzi, quando cioè si annullino le derivate del primo membro della sua equazione rispetto (ad es.) a y_0, y_1, y_2, le quali derivate (eguagliate a zero) sono, in virtù della (5), $\xi_0 y_0 - \xi_3 y_3 = \xi_1 y_1 - \xi_3 y_3 = \xi_2 y_2 - \xi_3 y_3 = 0$. Ne segue la $\Sigma \dfrac{1}{\xi_i} = 0$ come equazione tangenziale della superficie di Steiner.

Se si prende invece nel piano rappresentativo per triangolo fondamentale il triangolo diagonale del quadrilatero suddetto, saranno intanto $y_0 y_1 = 0$, $y_1 y_2 = 0$, $y_0 y_2 = 0$ coppie di rette coniugate a tutte le coniche della schiera e quindi coniche del sistema imagine. L'equazione di un'altra conica del sistema sia $\Sigma a_{ik} y_i y_k = 0$: allora appartiene pure al sistema la conica di equazione $a_{00} y_0^2 + a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 = 0$, (ottenuta sottraendo dalla precedente $2a_{01}y_0y_1 + 2a_{02}y_0y_2 + 2a_{02}y_{02}$), cioè, cambiando il punto unità, la conica di equazione $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$. Sicchè alle formule della rappresentazione piana della superficie di Steiner si può dare la forma

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_2 : y_0 y_2 : y_0 y_1 : y_0^2 + y_1^2 + y_2^2;$$

da cui, per l'eliminazione delle y, si ricava

$$x_0^2 x_1^2 + x_2^2 x_0^2 + x_1^2 x_2^2 - x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\,,$$

altra equazione (data da Kümmer) della superficie di Steiner.

21. — Le coniche della suddetta schiera, coniugata al sistema lineare delle coniche che rappresentano le sezioni piane della superficie di Steiner, hanno per questa superficie un importante significato geometrico.

Sia M un punto qualunque della superficie di Steiner e sia M′ la sua imagine sul piano rappresentativo π. Il piano tangente in M alla superficie di Steiner la taglia in due coniche che hanno per imagini due rette che escono da M′ e che (dovendo formare insieme una conica imagine di sezione piana) sono coniugate a tutte le coniche della schiera in discorso. Ora gli elementi delle due asintotiche della superficie di Steiner uscenti da M (cioè appunto gli elementi di quelle due coniche) sono rappresentati dagli elementi di queste due rette uscenti da M′, le quali due rette, per ciò che ora si è detto, sono le tangenti delle due coniche della schiera passanti per M′. Se ne conclude che queste due coniche sono le imagini delle due asintotiche partenti da M, e però che le asintotiche della superficie di Steiner sono rappresentate dalle coniche (considerate come luoghi) della schiera considerata. Quindi, avendo riguardo alla rappresentazione piana, si può enunciare che *le asintotiche della superficie di Steiner sono quartiche gobbe razionali (di 2.ª specie) bisecate dalle tre rette doppie della superficie ed aventi per piani stazionarî i quattro piani tangenti doppî di essa* [1].

Ricordando che una linea asintotica sopra una superficie è caratterizzata dall'essere i piani osculatori alla linea tangenti alla superficie, risulta che i piani osculatori ad un'asintotica nei suoi punti d'appoggio con una retta doppia passano per questa retta. Adunque, dicendo *principale* una corda quando è l'intersezione dei piani osculatori nei suoi estremi, *le tre rette doppie sono corde principali di tutte le asintotiche.*

---

[1]) Cfr. Cremona, Nota citata (nei Rend. dell'Ist. lomb. 1867).

Un piano tangente alla superficie di Steiner la sega in due coniche rappresentate in π da due rette coniugate rispetto a tutte le coniche imagini delle asintotiche. Ne segue senz'altro che *ogni asintotica della superficie di Steiner è tagliata da un piano tangente qualunque della superficie in quattro punti costituenti (sull'asintotica) gruppo armonico.*

22. — Dimostriamo ora reciprocamente che, *data una quartica gobba di 2.ª specie* C^4, *esiste una superficie di Steiner per la quale essa è asintotica* (inviluppata quindi dai piani che tagliano C^4 in quattro punti armonici): donde risulta essere le asintotiche della superficie di Steiner quartiche gobbe razionali affatto generali. Per la dimostrazione ricorriamo alla Γ^4 razionale normale di S_4, della quale la nostra C^4 è proiezione.

Le corde di Γ^4 costituiscono una ipersuperficie di S_4, di cui la Γ^4 è linea doppia, del 3.° ordine, cioè una V_3^3, come si vede proiettando da un S_1 sopra un S_2 e notando che la quartica piana proiezione di Γ^4 ha in generale tre punti doppi. Se si osserva poi che una involuzione di 2.° ordine (e di 1.ª specie) su Γ^4 dà origine, colle corde congiungenti i punti corrispondenti, ad una rigata razionale appartenente ad S_4, che è normale (perchè tale è Γ^4) e quindi (n. 4, Cap. 13.°) del 3.° ordine con una retta direttrice (semplice), retta che si dice *asse* della involuzione, si riconosce che sopra V_3^3 esiste un altro sistema di rette, cioè il sistema degli assi di quelle involuzioni di 2.° ordine. Un S_3 tangente a V_3^3 in un punto di una corda di Γ^4 sega V_3^3 in una superficie cubica avente questo punto doppio, oltre i due punti di appoggio della corda, e però avente la corda stessa per direttrice doppia (la qual superficie contiene gli assi delle involuzioni, di cui una coppia è data dai detti due punti di appoggio). Segue che gli S_3 tangenti a V_3^3 formano solo una ∞^2, ciascuno di essi essendo tangente lungo una corda. Inoltre ogni S_3 tangente contiene manifestamente le tangenti a Γ^4 negli estremi della corda di contatto: onde, in particolare, gli S_3 tangenti a V_3^3 lungo le tangenti di Γ^4 sono gli S_3 osculatori di questa.

Ciò premesso, prendasi di questa V_3^3 la polare reciproca rispetto alla quadrica W_3^2 passante per Γ^4 e tangente in ogni suo punto al relativo S_3 osculatore (n. 8, Cap. 12.°). Questa polare reciproca sarà una superficie, i cui S_2 tangenti sono quelli corrispondenti nella detta polarità alle corde di Γ^4 (gli S_3 corrispondenti ai punti di una corda passando per l'S_2 a questa corrispondente e toccando la superficie nel punto corrispondente all'unico S_3 che tocca V_3^3 lungo la corda). Invece gli ∞^2 S_2 corrispondenti ai sunnominati assi segano la superficie stessa secondo coniche. In vero ciascuno degli S_3 tangenti a V_3^3 nei punti di un asse, contenendo due corde successive appoggiate all'asse, è tangente al cono quadrico di 2.ª specie formato dai piani determinati dall'asse medesimo e dalle corde ad esso appoggiate; cono quadrico, in quanto un S_3 per l'asse contiene due soli tali (corde e quindi) piani. Dunque la suddetta superficie è (n. 6, Cap. 14.°) una V_2^4, proiezione nell'S_4 di una superficie di Veronese [1]. Questa V_2^4 passa per Γ^4, perchè ogni S_3 osculatore in un punto a Γ^4 ha, per ciò che si disse sopra, per polo rispetto a W_3^3 il punto stesso, ed anzi l'S_2 tangente in questo punto a V_2^4, cioè l'S_2 polare della tangente ivi a Γ^4, è anche osculatore nel punto a Γ^4 (essendo l'intersezione di due S_3 osculatori successivi).

Ed ora proiettando la Γ^4 e la V_2^4 da un punto di S_4 sopra un S_3 si trova ciò che si è asserito al principio del presente n..

23. — Sulla superficie di Steiner vogliamo per ultimo dare alcune proprietà che provengono da quelle di F_2^4 esposte nel n. 15.

L'ultimo teorema di questo n., se si indica con C^4 la quartica (razionale normale) secondo cui l'iperpiano ω taglia simultaneamente le F_2^4, F'^4_2, si può evidentemente enunciare anche così: F'^4_2 è il luogo dei poli delle corde di C^4 rispetto alle coniche di F_2^4 passanti per i loro punti d'appoggio. Proiettando da un S_1 sopra un S_3, ne segue senz'altro che *il luogo dei poli delle corde di una quartica gobba di una superficie di Steiner rispetto alle coniche della medesima passanti per i loro punti d'appoggio è un'altra superficie di Steiner.*

Se l'iperpiano ω si fa passare per l'S_1 di proiezione, la C^4 si proietta in una quartica piana e si ha il teorema (di Lie): — *Il luogo dei poli di un piano arbitrario rispetto alle coniche di una superficie di Steiner è un'altra superficie di Steiner* —.

Se invece il punto O, polo dell'iperpiano ω rispetto ad M_4^3, si pone sopra S_1, l'imagine di O è (n. 20) una conica della schiera coniugata alle imagini delle sezioni piane della superficie di Steiner e quindi (n. 11) la stessa conica come luogo è imagine di una C^4 asintotica. Ma ora l'altra superficie di Steiner coincide con quella, perchè ogni S_2 proiettante

[1]) Ne discende che la V_3^3 è di 4.ª classe. Veggansi per le cose di questo n. e per altre proprietà della V_3^3 i n. 43, 44 della Memoria di Segre citata nella nota del n. 22, Cap. 8.°.

da S_1 un punto di F_2^4 (passando per il centro O di omologia) proietta anche un punto di F_2^4. Dunque *il luogo dei poli delle corde di una asintotica di una superficie di Steiner, rispetto alle coniche di essa passanti per i loro punti d'appoggio, è la medesima superficie di Steiner.*

A questo teorema si può dare un'altra forma. Una conica della superficie si appoggia in due punti a ciascuna asintotica; il polo, rispetto alla conica medesima, della corda comune, dovendo essere un punto della superficie, sarà situato sull'altra conica in cui il piano della prima interseca ulteriormente la superficie. Dunque, *in una superficie di Steiner le corde che una conica ha comuni colle asintotiche, inviluppano una seconda conica, che è la polare reciproca, rispetto alla prima, di quella nella quale il suo piano interseca ulteriormente la superficie* [1]).

24. — La superficie di Veronese F_2^4 può essere di grande utilità anche nello studio delle quartiche piane [2]).

Una quartica Γ^4 del piano rappresentativo π ha per imagine sopra F_2^4 una curva dell'8.° ordine Γ^8, e viceversa: onde si puo far passare una Γ^8 per 14 punti generici di F_2^4 (perchè così è su π). Ma anche le curve d'intersezione di F_2^4 con quadriche di S_5, curve pure di ottavo ordine, sono tali che per 14 punti se ne può far passare una sola, giacchè esse sono ∞^{20-5-1} (per il n. 17, Cap. 10.° e per essere ∞^5 le quadriche passanti per F_2^4). Dunque queste ultime sono proprio tutte le Γ^8 di F_2^4. Una tale Γ^8, essendo intersezione di F_2^4 e di una quadrica, è per conseguenza curva base di un sistema lineare ∞^6 di quadriche. Per essa passano ∞^5 quadriche con punto doppio, ∞^3 con retta doppia e un numero finito con piano doppio (n. 5, Cap. 6.°).

Se l'equazione della Γ^4 è

$$\sum a_{i_1 i_2 i_3 i_4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} = 0 \tag{6}$$

(ove $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$ è una permutazione qualunque con ripetizione dei numeri

---

[1]) Altre proprietà, che sono in relazione colle precedenti, non solo per la superficie di STEINER, ma anche per la superficie gobba di 3.° grado (proiezione, come sappiamo, di F_2^4 da un S_1 che la incontri) si trovano nel lavoro di ROSATI citato in nota al n. 15. Cfr. anche MONTESANO: *La superficie romana di* STEINER (Rend. Accad. sc. Napoli, 1899).

[2]) Cfr. SEGRE: *Alcune idee di* ETTORE CAPORALI *intorno alle quartiche piane* (Annali di Matem., 20, 1892).

0, 1, 2 e $a_{i_1 i_2 i_3 i_4} = a_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ quando $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$, $j_1\, j_2\, j_3\, j_4$ coincidono a meno dell'ordine), attuando la trasformazione (4)

$$X_{ik} = x_i\, x_k$$

si trovano infinite equazioni quadratiche nelle X_{ik}; giacchè si può sostituire a ciascun coefficiente $a_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ una certa somma di numeri (tutti meno uno arbitrarî) e poi attribuire ad un numero il fattore $x_{i_1} x_{i_2} . x_{i_3} x_{i_4}$, ad un altro il fattore $x_{i_1} x_{i_3} . x_{i_2} x_{i_4}$, ecc.. Viceversa, per la stessa trasformazione, si passa da una equazione di 2.° grado nelle X_{ik} ad una del 4.° nelle x_i. Le dette equazioni quadratiche sono adunque quelle delle ∞^6 quadriche passanti per la Γ^8 corrispondente alla Γ^4.

25. — La polarità rispetto ad una qualunque Q di queste quadriche si traduce in proprietà di Γ^4. Se Q non è specializzata, si avrà in π una corrispondenza biunivoca fra conica-inviluppo (corrispondente ad un S_0) e conica-luogo (corrispondente all'S_4 polare di S_0 rispetto a Q): o, ciò che è lo stesso, fra un sistema lineare ∞^4 di coniche-luogo (coniugate a quella conica-inviluppo) e questa conica-luogo. La quale corrispondenza è determinata rispetto ad un sistema quadratico ∞^4 di coniche (corrispondenti agli iperpiani tangenti a Q) appartenente al sistema ∞^5 delle coniche di π. Se le ∞^4 coniche sono quelle che passano per un punto di π (cioè la conica-inviluppo coniugata è questo punto doppio) la conica corrispondente si dirà, col Caporali, *conica congiunta* a quel punto: e manifestamente *un punto che giace sulla sua conica congiunta, e solo allora, è un punto di* Γ^4 (giacchè gli corrisponde un punto di F_2^4 e di Q). Si ha così *un modo di generazione di* Γ^4.

26. — Se Q è specializzata k volte ($k = 1, 2, 3$), cioè se possiede un S_{k-1} doppio, si considereranno soltanto gli iperpiani di S_5 passanti per questo S_{k-1}, cioè si considererà la quadrica Q come quadrica non specializzata della stella avente per sostegno questo spazio (n. 6, Cap. 6.°). Allora si avrà in π un sistema σ lineare ∞^{5-k} (∞^4, ∞^3, ∞^2) di coniche-luogo e, appartenente ad esso, un sistema quadratico, rispetto al quale ogni sistema lineare ∞^{5-k-1} (∞^3, ∞^2, ∞^1) di coniche-luogo di σ corrisponderà ad una conica-luogo dello stesso sistema σ, e reciprocamente. Come dianzi, se quel sistema lineare è di coniche passanti per un punto, la conica corrispondente si dirà *congiunta* a questo punto, e Γ^4 *risulterà come luogo dei punti che giacciono nelle loro coniche congiunte.* Si hanno così *tre altri modi di generazione di* Γ^4.

In particolare, se $k = 3$, cioè se Q ha un S_2 doppio, poichè ogni S_3 incontra F_2^4 in 4 punti, è chiaro che ogni conica (del sistema σ, ∞^2) è congiunta a quattro punti. Inoltre, siccome un S_4 tangente a Q lungo un S_3 generatore taglia Γ^8 in otto punti due a due infinitamente vicini ai quattro punti d'intersezione di quell' S_3 con F_2^4, si trova, come corrispondente alla totalità degli S_4 tangenti a Q, *una serie quadratica* ∞^1 *di coniche quadritangenti a* Γ^4, la quale quindi risulta come *inviluppo di una cosiffatta serie*. Il numero di tali serie sarà il numero delle Q specializzate tre volte. I sei S_4 tangenti ad una tale Q e a μ_4^3 dànno le sei coppie di rette (bitangenti) contenute nella relativa serie.

Se $k = 2$, cioè se Q ha un S_1 doppio, si ricordi che Q contiene due serie ∞^1 di S_3 e che ogni iperpiano tangente a Q lungo un S_2 generatore contiene un S_3 di ciascun sistema (n. 20, Cap. 6.°). Or bene: un iperpiano tangente a Q taglia Γ^8 in otto punti di cui quattro sono in uno di questi S_3 e quattro nell'altro; dunque, corrispondentemente alle due serie ∞^1 di quaterne di punti segnate su Γ^8 dagli S_3 dei due sistemi di Q, si hanno su Γ^4 due serie ∞^1 di quaterne di punti, così collegate che due quaterne qualunque appartenenti a serie distinte costituiscono la completa intersezione di Γ^4 con una conica. Allora basta congiungere mediante coniche tutte le quaterne di una serie a ciascuna di due quaterne fisse dell'altra per avere *una generazione della* Γ^4 *mediante due fasci proiettivi di coniche.*

27. — Vi è una quadrica particolare, in generale non specializzata, nella ∞^6 delle quadriche che passano per Γ^8, la quale vogliamo ora considerare. Essa è una quadrica coniugata alle ∞^5 quadriche inscritte in φ_2^4 (cioè, come inviluppi, passanti per questa). Infatti sono $\infty^{19-5} = \infty^{14}$ le quadriche coniugate a questa ∞^5, e perciò una (almeno) di esse esiste nella suddetta ∞^6.

È facile vedere che l'equazione di questa particolare quadrica è

$$\sum a_{i_1 i_2 i_3 i_4} X_{i_1 i_2} X_{i_3 i_4} = 0 , \tag{7}$$

ottenuta dalla (6) senza alcun spezzamento dei coefficienti (cfr. n. 24); giacchè essa è coniugata a ciascuna delle sei quadriche che individuano φ_2^4 (cfr. nota al n. 9), come subito si verifica applicando la (4) del Cap. 10.°.

L' S_4 polare di un punto di coordinate $Y_{i_1 i_2}$ rispetto a questa particolare quadrica Q è dato, per la (7), dall'equazione

$$\sum a_{i_1 i_2 i_3 i_4} Y_{i_1 i_2} X_{i_3 i_4} = 0 .$$

Passando al piano π, le $Y_{i_1 i_2}$ sono le coordinate (coefficienti dell'equazione) di una conica-inviluppo e l'equazione ora scritta, facendovi la sostituzione $X_{i_1 i_2} = x_{i_1} x_{i_2}$, dà l'equazione

$$\sum a_{i_1 i_2 i_3 i_4} Y_{i_1 i_2} x_{i_3} x_{i_4} = 0 \tag{8}$$

della conica-luogo ad essa corrispondente nella corrispondenza biunivoca, di cui si è discorso nel n. 25. Questa corrispondenza biunivoca, nel caso presente, si dice *corrispondenza polare* o *polarità rispetto alla quartica* Γ^4, perchè se

$$Y_{i_1 i_2} = y_{i_1} x_{i_2} + y_{i_2} x_{i_1},$$

cioè se la conica-inviluppo diventa una coppia di punti (distinti o coincidenti), la (8) è l'equazione della loro polare (mista o pura).

28. — Nel n. precedente si è supposto il discriminante D della quadrica considerata Q diverso da zero [1]).

Se $D = 0$ e precisamente di caratteristica 5, la quadrica Q acquista un punto doppio e quindi in π si ha una corrispondenza polare, in cui la conica-luogo corrispondente ad una certa conica-inviluppo è indeterminata. Questa conica-inviluppo si dice *apolare* alla quartica Γ^4, la quale è allora quella particolare detta *quartica di Clebsch* [2]). Se il suddetto punto doppio di Q giace su M_4^3, la conica apolare è un paio di punti.

Se D è di caratteristica 4, 3 si hanno altre quartiche particolari dotate rispettivamente di una schiera o di un tessuto di coniche apolari. Nel caso della schiera di coniche apolari, cioè quando la quadrica Q ha un S_1 doppio, se quel particolare S_2, che contiene S_1 ed i tre punti comuni alle tre coniche di F_2^4 dei tre piani di 1.ª specie incontrati da quell'S_1 (cfr. n. 18), ha per S_4 polare, rispetto a Q, un S_4 tangente a F_2^4 (cioè segante questa in due coniche), si ottiene quella particolare Γ^4 che è detta *quartica di Caporali* [3]).

La considerazione di sistemi lineari di quartiche piane, che ammettono coniche apolari, si riduce pure col metodo indicato alla considerazione di sistemi lineari di quadriche tutte specializzate.

[1]) Il discriminante D è quello che dicesi invariante sestico di Γ^4. Per scriverlo si tenga presente che esso è il determinante delle coordinate dei sei iperpiani polari dei sei vertici della piramide fondamentale, le quali coordinate sono i coefficienti delle $X_{i_1 i_2}$ nelle derivate prime della (7), divise però per 2, quando $i_1 \neq i_2$ (cfr. nota al n. 9).

[2]) LUROTH, *Neuer Beweis des Satzes* ... (Math. Ann. 13, 1877).

[3]) Cfr. CIANI, nei Rend. della Accad. di Napoli, 1896.

APPENDICE

SULLE

CURVE ALGEBRICHE E LORO SINGOLARITÀ

Capitolo 1.°

Rami di una curva algebrica.
Alcune proposizioni fondamentali relative ad essi.

1. — È noto dall'Analisi [1]) che, data una curva piana algebrica, ad es. per mezzo della sua equazione $f(xy)=0$ in coordinate (non omogenee) x, y, e fissato un suo punto qualunque $(x_0 y_0)$, i punti della curva stessa sufficientemente vicini [2]) a questo punto formano una o più totalità, ciascuna delle quali si può determinare coi valori di un parametro t. Precisamente, se si indica con t_0 il valore di t corrispondente al punto $(x_0 y_0)$, le coordinate di un punto variabile in ciascuna totalità si esprimono mediante serie di potenze intere positive di $t-t_0$, cioè si ha

$$x-x_0=a(t-t_0)^n+a'(t-t_0)^{n+1}+\dots$$
$$y-y_0=b(t-t_0)^n+b'(t-t_0)^{n+1}+\dots$$

(ove n è intero e ≥ 1 ed uno almeno dei coefficienti a, b è diverso da zero): ed anzi si può scegliere il parametro t così che i suoi valori corrispondono biunivocamente ai punti della totalità. Questa si chiama *ramo* o *ciclo* o *elemento* della curva uscente dal punto $(x_0 y_0)$, il quale è detto *origine* di esso.

---

[1]) Cfr., ad es., L. Bianchi: *Lezioni sulle funzioni di una variabile complessa e sulle funzioni ellittiche* (Pisa, Spoerri, 1901), § 76 e seg..

[2]) Il punto di coordinate x, y (ed analogamente nel caso di un numero qualunque di coordinate non omogenee) si dice *sufficientemente vicino* al punto di coordinate x_0, y_0 (che possiamo supporre finite), quando i valori assoluti o moduli delle $x-x_0$, $y-y_0$ sieno minori od eguali a valori (finiti) opportunamente dati.

Il concetto esposto si estende immediatamente ad ogni curva C appartenente a qualsiasi spazio S_r $(r > 2)$, notando che essa può proiettarsi biunivocamente in una curva piana C′, e che quindi le coordinate di un punto variabile di C si esprimono razionalmente per le coordinate x, y del punto corrispondente di C′ e reciprocamente. Allora la nozione di ramo si trasporta dalla curva C′ alla curva C. Possiamo prendere per un punto variabile di C le coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$: queste sono proporzionali a funzioni razionali intere delle x, y e, introdotti gli sviluppi precedenti, risultano per conseguenza proporzionali a serie di potenze intere positive di $t - t_0$. Si hanno adunque espressioni di questa forma:

$$x_i - x_i^{(0)} = a_i (t - t_0)^\alpha + b_i (t - t_0)^{\alpha+1} + \ldots \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

le quali, per valori di t abbastanza prossimi a t_0 (cioè facendo variare t, nella rappresentazione di Gauss, entro un circolo di centro t_0 e di raggio sufficientemente piccolo) definiscono un *ramo* o *ciclo* o *elemento* di una curva (algebrica) appartenente ad S_r. *L'origine* $(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)})$ è data dal valore t_0 del parametro t e s'intende che questo parametro sia così scelto che i suoi valori corrispondano biunivocamente ai punti del ramo.

Per semplicità supporremo in seguito che l'origine del ramo sia il vertice A_0 della piramide fondamentale, e che il valore t_0, corrispondente all'origine, sia $= 0$. Le formule ultime (preso comunque $x_0 \neq 0$, ad es., $x_0 = 1$) sono allora sostituite dalle

$$(1) \qquad x_i = a_i t^\alpha + b_i t^{\alpha+1} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

ove α è intero e ≥ 1 ed almeno una delle a_i è $\neq 0$.

Se due curve sono in corrispondenza birazionale è chiaro che *ogni ramo dell'una si muta in un ramo dell'altra*, mentre un punto multiplo può trasformarsi in uno o più punti, multipli o semplici (cfr. Cap. 2.° A. [1])), e perciò rami colla stessa origine possono trasformarsi in rami colla stessa origine o con origini diverse. Onde nella Geometria delle trasformazioni birazionali sarà ben determinato un punto di una curva (multiplo per essa) solo quando sia fissato il ramo in cui si vuol considerare, e dovranno ritenersi come infinitamente vicini soltanto punti che stanno in uno stesso ramo.

---

[1]) Coll'indicazione A. intendiamo riferirci ai Cap. di questa Appendice.

2. — Le proprietà fondamentali dei rami di una curva algebrica derivano dalla nozione di multiplicità d'intersezione di un ramo con una ipersuperficie.

Sia A_0 origine di un ramo dato dalle (1), e per A_0 passi una ipersuperficie di equazione $F(x_0, \ldots, x_r) = 0$ (equazione mancante quindi del termine contenente la sola x_0). Sostituendo nella equazione stessa le (1), si ottiene una nuova equazione di cui il primo membro è una serie di potenze di t, priva di termine costante,

$$M t^{\mu} + N t^{\mu+1} + \ldots = 0.$$

Sia t^{μ} la potenza più bassa di t che compare in questa equazione (cioè sia $M \neq 0$): il numero intero μ si dirà *multiplicità d'intersezione in* A_0 *del ramo colla ipersuperficie* o *numero delle loro intersezioni raccolte in* A_0.

A questa definizione si può dare un aspetto più geometrico colla considerazione seguente. Pensiamo la $F = 0$ come posizione di una ipersuperficie variabile in una totalità ∞^1, ad es. in un fascio $F + \lambda\varphi = 0$, ove $\varphi = 0$ sia dello stesso ordine di $F = 0$ e non passi per A_0. Le intersezioni del ramo con una ipersuperficie del fascio sufficientemente prossima ad $F = 0$ si ottengono sostituendo le (1) nella equazione $F + \lambda\varphi = 0$ e supponendo λ (o meglio il suo modulo) abbastanza piccolo. Per la detta sostituzione si avrà un'equazione della forma

$$M t^{\mu} + N t^{\mu+1} + \ldots + \lambda(M' + N' t^{\mu'} + \ldots) = 0$$

(ove anche $M' \neq 0$), la quale, facendo convergere λ a zero, dà μ soluzioni per t, prossime a zero, variabili per essere A_0 esterno a $\varphi = 0$ e distinte quando si evitino per λ i cosiddetti valori di diramazione [1]). Per λ *sufficientemente prossimo* a zero si hanno adunque μ punti distinti variabili comuni al ramo ed alla ipersuperficie del fascio, e quindi la multiplicità d'intersezione di un ramo con una ipersuperficie F che passi per l'origine di esso si può anche definire *il numero delle intersezioni che il ramo ha con una ipersuperficie che non passi per l'origine del ramo e che sia abbastanza vicina ad* F.

Sia O un punto comune ad una curva C e ad una ipersuperficie F: si considerino i rami di C aventi l'origine in O e per ciascun ramo la multiplicità d'intersezione con F. La somma di queste multiplicità è ciò

---

[1]) Cfr. L. Bianchi, l. c..

che dicesi *multiplicità d'intersezione* in O di F e C o *numero delle loro intersezioni raccolte in* O (od *assorbite dal punto* O). Tale numero è anche, per quanto si è veduto, *il numero delle intersezioni, che tendono a cadere nel punto* O, *di* C *e di una ipersuperficie non passante per* O *e convenientemente vicina ad* F.

Amendue le definizioni reggono tanto se C è irriducibile, quanto se è riducibile, salvo che in questo secondo caso C contenga parti ripetute, chè allora la seconda definizione deve essere completata. Basta però ritenere che, *in ogni caso, la multiplicità d'intersezione di una ipersuperficie* F *con una curva* C *in un loro punto comune* O è *la somma delle multiplicità d'intersezione di* F *con tutti i rami di* C *uscenti da* O. Così, se C è composta delle curve irriducibili $C_1, C_2, \ldots$, alcune delle quali sieno anche coincidenti, la multiplicità d'intersezione in O di C con F è la somma delle multiplicità d'intersezione in O di C_1 con F, di C_2 con F, ... (essendo nulle quelle relative a curve non passanti per O).

3. — Considerando ora le multiplicità d'intersezione in tutti i punti comuni ad una curva C e ad una ipersuperficie F, è facile provare che *la somma di tali multiplicità non muta se alla* F *si sostituisce un'altra ipersuperficie* F′ *dello stesso ordine*, escludendo che le F, F′ passino per C o per una sua parte. Basterà considerare il caso che C sia irriducibile, perchè a questo si riduce ogni altro (ultimo alinea del n. 2), e basterà pure considerare due ipersuperficie F, F′ tali che i punti che C ha comuni con F sieno tutti distinti da quelli che C ha comuni con F′ (accoppiando, ove ciò non fosse, ciascuna di queste ipersuperficie con un'altra, dello stesso ordine, assunta genericamente). Allora una ipersuperficie variabile del fascio determinato da F, F′ ha comuni con C punti tutti variabili, ed anzi generalmente punti tutti distinti (cioè di multiplicità d'intersezione = 1), perchè, avendosi in un punto comune a C e ad una ipersuperficie del fascio multiplicità d'intersezione $\mu > 1$, l'ipersuperficie del fascio a questa abbastanza vicina, non passando per quel punto, ha con C, prossime ad esso, μ intersezioni distinte (n. 2) [1]). Ora, se i punti comuni a C e ad una ipersuperficie del fascio sono tutti distinti, finchè restano tali al variare di questa ipersuperficie, il loro numero non varia perchè ciascuno si muove su C con continuità: mentre, quando si ha una ipersuperficie avente con C un punto comune di multiplicità μ, passando

---

[2]) Cfr. anche n. 18, Cap. 10.°.

ad una ipersuperficie ad essa abbastanza vicina, ne risultano μ intersezioni distinte; viceversa può accadere che tante vengano in un punto di multiplicità μ d'intersezione. Passando così da F ad F' attraverso a superficie del fascio si conclude ciò che si è affermato.

Se l'ipersuperficie F è un iperpiano, si arriva in tal modo al concetto di *ordine* di una curva C, già stabilito algebricamente (n. 3, Cap. 9.°).

Se l'ipersuperficie F è di ordine m e C di ordine n si arriva altresì, con applicazione immediata della proprietà dimostrata, a stabilire che, quando F e C non hanno infiniti punti comuni, *la somma delle loro multiplicità d'intersezione è* mn, caso particolare del teorema enunciato nel n. 31, Cap. 9.° (e del quale ivi sono indicate in nota dimostrazioni algebriche). Basta prendere infatti per F' un gruppo di m iperpiani.

4. — Per altre proposizioni sulle multiplicità d'intersezione di una curva e di una ipersuperficie occorre ritornare alla considerazione di un solo ramo e definirne l'ordine e la tangente.

Un iperpiano

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_r x_r = 0,$$

passante per l'origine A_0 di un ramo di curva algebrica dato dalle (1) ha col ramo stesso in generale multiplicità d'intersezione α, come segue dal sostituire nella precedente equazione i valori delle x_i dati dalle stesse (1), ed ha multiplicità maggiore di α solo quando sia

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_r \xi_r = 0,$$

quando cioè l'iperpiano ξ passi per una determinata retta della stella A_0, quella che ha in questa stella le coordinate $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Si dice che α è *l'ordine* o la *multiplicità* del ramo od anche si dice che il ramo è α^{uplo}, e la nominata retta si chiama *tangente* al ramo. Se si assume su questa retta il punto fondamentale A_1 (onde la tangente è data dalle $x_2 = x_3 = \ldots = x_r = 0$) dovrà essere $a_2 = a_3 = \ldots = a_r = 0$ ed $a_1 \neq 0$.

Così facendo, suppongasi ora che lo stesso punto A_0, origine del ramo considerato, sia punto s^{uplo} di una ipersuperficie di ordine n, la quale avrà quindi una equazione della forma

$$u_s x_0^{n-s} + u_{s+1} x_0^{n-s-1} + \ldots + u_n = 0$$

e che inoltre il ramo stesso non tocchi l'ipersuperficie, cioè la sua tangente ($= A_0 A_1$) non sia del cono $u_s = 0$ tangente alla ipersuperficie (per cui si avrà $u_s = mx_1^s + \dots$ con $m \neq 0$). Sostituendo allora nella precedente equazione le (1) si trova αs come minimo esponente di t. Questo minimo esponente è invece $> \alpha s$, se la tangente al ramo è generatrice del cono. Adunque *la multiplicità d'intersezione di un ramo di ordine α e di una ipersuperficie che abbia un punto s^{uplo} nell'origine del ramo, se questo non tocca l'ipersuperficie, è αs; se tocca, è maggiore di αs.*

Ne discende che *la multiplicità d'intersezione di una curva e di una ipersuperficie in un punto che sia s_1^{uplo} per quella ed s_2^{uplo} per questa è $s_1 s_2$, se in quel punto non vi è alcuna tangente comune alla curva e alla ipersuperficie, ed è maggiore di $s_1 s_2$ nel caso contrario.* Infatti un punto s_1^{uplo} di una curva è origine di rami di essa tali che la somma dei loro ordini è $= s_1$ e che le loro tangenti sono le tangenti della curva, com'è chiaro, osservando che dei punti d'intersezione della curva con un iperpiano che tenda a passare genericamente per il punto s_1^{uplo} ne cadono s_1 in questo punto e ne cadono più di s_1 se l'iperpiano tende a passare per una di quelle tangenti [1]). Quindi, dicendo α, α', α'', ... gli ordini dei rami della curva uscenti dal punto, si ha $s_1 = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$: e però, in virtù della proprietà precedente e per il n. 2, sarà $\alpha s_2 + \alpha' s_2 + \alpha'' s_2 + \dots = s_1 s_2$ la multiplicità d'intersezione della curva e dell'ipersuperficie nel punto considerato, quando non vi sieno tangenti comuni, e $> s_1 s_2$ se ne esistono.

Così è $s_1 s_2$ la multiplicità d'intersezione di due curve piane in un punto, s_1^{uplo} per l'una ed s_2^{uplo} per l'altra, nel quale presentino il caso semplice (secondo la denominazione introdotta nel n. 16, Cap. 8.°) ed è maggiore di $s_1 s_2$ nel caso contrario [2]). Se applichiamo adesso alle stesse due curve piane, di cui gli ordini sieno n_1, n_2, la proposizione del n. 3 (ultimo alinea) abbiamo il risultato complessivo che *due tali curve (se non hanno infiniti punti comuni) si segano in $n_1 n_2$ punti, purchè ogni punto s_1^{uplo} per l'una ed s_2^{uplo} per l'altra si conti per $s_1 s_2$ intersezioni o più secondochè in esso si ha o no il caso semplice.* Cosicchè la somma $\Sigma s_1 s_2$ estesa a tutti i punti comuni è $= n_1 n_2$ se per tutti si verifica il caso semplice, ed è $< n_1 n_2$ se per qualche punto comune non si verifica.

---

[1]) Nel caso che per il punto s_1^{uplo} passino parti ripetute della curva è evidente la semplice modificazione da farsi al ragionamento. Del resto la proprietà si potrebbe assumere come definizione in sostituzione di quella algebrica data nel n. 3, Cap. 9.° ($k = 1$).

[2]) Un metodo per calcolare il numero delle intersezioni in ogni caso si troverà nel n. 11, Cap. 2.° A..

5. — Tale proprietà può ora estendersi con metodo induttivo al caso di r ipersuperficie $F_1, F_2, \ldots, F_r$ di S_r. Mostreremo cioè che, *essendo* $n_1, n_2, \ldots, n_r$, *rispettivamente gli ordini di queste ipersuperficie, il numero delle loro intersezioni (se non è infinito) è* $n_1 n_2 \ldots n_r$, *nel qual numero ogni punto ordinatamente* $s_1^{\text{uplo}}, s_2^{\text{uplo}}, \ldots, s_r^{\text{uplo}}$ *per le ipersuperficie stesse va contato un conveniente numero di volte (numero detto multiplicità d'intersezione delle ipersuperficie nel punto), che è* $= s_1 s_2 \ldots s_r$ *ovvero* $> s_1 s_2 \ldots s_r$ *secondochè il punto considerato presenta o no il caso semplice*: onde la somma $\Sigma s_1 s_2 \ldots s_r$ estesa a tutti i punti comuni è $= n_1 n_2 \ldots n_r$ o $< n_1 n_2 \ldots n_r$, secondochè per tutti ha luogo il caso semplice o vi è almeno un punto in cui non ha luogo (proprietà enunciata in base a teoremi algebrici nei n. 3, 16, Cap. 8.°). Stabiliremo il teorema per r ipersuperficie $F_1, F_2, \ldots, F_r$ di S_r, ammettendo che sussista per $r-1$ ipersuperficie di S_{r-1}, sicchè, il teorema essendo vero per $r=2$, risulta dimostrato per ogni valore di r.

Prendansi $r-1$ delle date ipersuperficie, $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ e sieno $L_1, L_2, \ldots$, degli ordini $\nu_1, \nu_2, \ldots$, le linee irriducibili *distinte* che esse hanno a comune (linee, non superficie, perchè le r ipersuperficie non hanno infiniti punti comuni). Si definisca *multiplicità d'intersezione* delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ lungo una linea L_i il numero δ_i che indica la multiplicità d'intersezione, in ognuno dei punti d'intersezione di un S_{r-1} generico con L_i, per le $r-1$ ipersuperficie dell'S_{r-1} in cui questo sega le $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$; il qual numero, per ciò che si è ammesso, ha significato ed è tale che deve aversi $\sum_i \nu_i \delta_i = n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$. Questa esprime intanto che la complessiva linea d'intersezione delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ è d'ordine $n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$.

Sieno ora $P_1, P_2, \ldots$ i punti comuni alle r ipersuperficie, cioè comuni a quella linea e ad F_r. Se in un punto P_j la linea L_i, considerata semplicemente, ha con F_r la multiplicità d'intersezione ω_{ij}, onde (n. 3) deve essere $\sum_j \omega_{ij} = \nu_i n_r$, la stessa L_i ripetuta δ_i volte avrà con F_r in P_j la multiplicità d'intersezione $\omega_{ij} \delta_i$ (ultimo alinea del n. 2) e quindi la somma delle multiplicità d'intersezione della complessiva curva d'intersezione delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ con F_r sarà $\sum_{ij} \omega_{ij} \delta_i = n_r \sum_i \nu_i \delta_i = n_1 n_2 \ldots n_r$. Ma, se il punto P_j è multiplo secondo il numero k_{ij} per la L_i considerata semplicemente, onde il punto stesso risulta multiplo secondo il numero $\sum_i k_{ij} \delta_i$

per la complessiva curva d'intersezione delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$, è facile mostrare che questo numero $\sum_i k_{ij}\delta_i$ è precisamente la multiplicità d'intersezione in P_j delle $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ sezioni delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ con un S_{r-1} *generico* passante per P_j, e quindi (per il teorema ammesso in S_{r-1}) $\sum_i k_{ij}\delta_i \geqq s_1 s_2 \ldots s_{r-1}$ secondochè (le r ipersuperficie considerate e per conseguenza, come è subito veduto) le dette sezioni $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ non presentano o presentano in P_j il caso semplice. Si osservi infatti che le sezioni $f'_1, f'_2, \ldots, f'_{r-1}$ di $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ con un S'_{r-1}, non passante per P_j e che tenda a cadere in quell'S_{r-1}, hanno, come le $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$, la somma delle multiplicità d'intersezione nei loro punti comuni $= n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$ (sempre per il teorema ammesso in S_{r-1}) e che inoltre, avvicinandosi le $f'_1, f'_2, \ldots, f'_{r-1}$ alle $f_1, f_2, \ldots f_{r-1}$ vi è un solo mutamento nelle multiplicità d'intersezione proveniente dai $\sum_i k_{ij}$ punti d'intersezione di S'_{r-1} colle curve L_i, i quali tendono a cadere in P_j, mentre per gli altri punti (essendo S_{r-1} generico per P_j) la multiplicità d'intersezione non varia. Ne risulta manifestamente, che la somma delle multiplicità d'intersezione delle $f'_1, f'_2, \ldots, f'_{r-1}$ nei nominati Σk_{ij} punti, cioè $\sum_i k_{ij}\delta_i$, è uguale, come si è detto, alla multiplicità d'intersezione delle $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ in P_j.

La multiplicità d'intersezione in P_j della linea complessiva intersezione delle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ con F_r essendo $= s_r \Sigma k_{ij}\delta_i$ se quella linea non ha tangenti comuni con F_r (n. 4), risulta adunque che detta multiplicità d'intersezione è proprio $= s_1 s_2 \ldots s_r$ se $F_1, F_2, \ldots, F_r$ presentano in P_j il caso semplice, ed è invece $> s_1 s_2 \ldots s_r$ in ogni altro caso. Così resta completamente dimostrato il teorema enunciato [1]).

6. — Già abbiamo stabilito (n. 4) il significato di ordine e di tangente di un ramo ed abbiamo visto che, assumendo nell'origine del ramo il punto fondamentale A_0 e sopra la tangente il punto fondamentale A_1, quella delle serie (1) che dà x_1 comincia con $a_1 t^\alpha$ ($a_1 \neq 0$), mentre le altre che dànno $x_2, \ldots, x_r$ cominciano con termini contenenti potenze di t superiori

---

[1]) Quando non ha luogo in un punto P_j il caso semplice rimane ancora da accertare che la multiplicità d'intersezione ivi delle r ipersuperficie date non varia sostituendo nel ragionamento suddetto alle $F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ altre $r-1$ qualunque di quelle r ipersuperficie, ed inoltre che tale multiplicità d'intersezione coincide con quella data algebricamente dalla risultante.

ad α, onde possono scriversi nella forma: $x_2 = b_2 t^{\alpha+\alpha_1} + \dots, x_3 = b_3 t^{\alpha+\alpha_1} + \dots,$ $\dots, x_r = b_r t^{\alpha+\alpha_1} + \dots,$ ove una almeno delle b è $\neq 0$.

Aggiungiamo ora che un iperpiano per la tangente $A_0 A_1$, cioè di equazione

$$\xi_2 x_2 + \dots + \xi_r x_r = 0 ,$$

ha multiplicità d'intersezione $\alpha + \alpha_1$ col ramo e l'ha maggiore solo quando $\xi_2 b_2 + \dots + \xi_r b_r = 0$, ossia quando l'iperpiano passa per un determinato piano della stella $A_0 A_1$, quello che ha in essa le coordinate $b_2, \dots, b_r$. Il numero α_1 si dice *primo rango*, ed il detto piano, *piano osculatore* del ramo. Si prenda su questo piano (fuori di $A_0 A_1$) il punto fondamentale A_2: dovrà essere $b_2 \neq 0$ e $b_3 = \dots = b_r = 0$, cosicchè nelle serie scritte sopra quella che dà x_2 comincia con $b_2 t^{\alpha+\alpha_1}$, mentre le altre prendono l'aspetto: $x_3 = c_3 t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2} + \dots, \dots, x_r = c_r t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2} + \dots$, ove una almeno delle c è $\neq 0$.

Si prosegue: cioè, facendo variare un iperpiano per l'S_2 ($= A_0 A_1 A_2$) osculatore, si stabilisce l'esistenza di un S_3 tale che ogni iperpiano per l'S_2 ha col ramo multiplicità d'intersezione $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2$ e soltanto se l'iperpiano passa per l'S_3 tale multiplicità cresce: e il numero α_2 si dice *secondo rango* e il detto S_3 si chiama *osculatore*. Preso in questo S_3 il punto fondamentale A_3, la serie che dà x_3 comincia con $c_3 t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}$ ($c_3 \neq 0$) e le altre si possono scrivere: $x_4 = d_4 t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + \dots, \dots, x_r = d_r t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, ove una almeno delle d è $\neq 0$.

Così si continua fino ad arrivare all'$(r-2)^{\text{esimo}}$ *rango* α_{r-2} ed all'S_{r-2} *osculatore* ($= A_0 A_1 \dots A_{r-2}$), e da ultimo all'$(r-1)^{\text{esimo}}$ *rango* ed all'S_{r-1} *osculatore* ($= A_0 A_1 \dots A_{r-1}$). Il ramo (assunti i punti fondamentali nel modo detto e variato il punto unità per eliminare le costanti $a_1, b_2, c_3, d_4, \dots$) sarà dato dalle serie

$$(2) \qquad x_i = t^{\nu_i} + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

ove $\nu_i = \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1}$.

Per un ramo di ordine α e di ranghi $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ si adotterà la notazione $(\alpha \alpha_1 \dots \alpha_r)$ od anche $O(\alpha \alpha_1 \dots \alpha_r)$ per indicare altresì l'origine O del ramo.

Un ramo si dice *lineare* se l'ordine $\alpha = 1$. In un punto non multiplo di una curva si ha un solo ramo lineare: in un punto generico si hanno inoltre tutti i ranghi $= 1$. Ricordando (cfr. n. 4) che un punto r^{uplo} di una curva è origine di rami la somma dei cui ordini è $= r$, è chiaro che in un punto r^{uplo} ordinario (cioè con r tangenti distinte) si hanno r rami lineari. Un punto origine di un solo ramo di 2.° ordine dicesi *cuspide* o *regresso*.

7. — Siccome un iperpiano generico per l'S_k osculatore ad un ramo $(\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1})$ ha $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ intersezioni col ramo si può dire che l'S_k stesso ha col ramo questo numero di punti comuni. E poichè un iperpiano per un S_{k-1} osculatore e per un punto che tenda all'origine del ramo viene in un iperpiano con più di $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}$ intersezioni con questo e quindi con $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1} + \alpha_k$ intersezioni, è chiaro che si può pensare l'S_k osculatore come posizione limite di un S_k che passa per l'S_{k-1} osculatore e per un altro punto del ramo stesso che si avvicina indefinitamente alla sua origine. Ciò del resto si verifica subito anche valendosi delle formule (2).

Questo concetto degli spazî osculatori come spazî limiti conduce a trovarne le equazioni. Limitiamoci al caso di un punto che sia origine di un ramo di ordine e ranghi tutti $= 1$. Allora, se indichiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_r$ le coordinate correnti e con $x_1, x_2, \ldots, x_r$ le coordinate dell'origine del ramo ($X_0 = x_0 = 1$), un iperpiano per l'S_k osculatore passa per i $k+1$ punti successivi di coordinate $x_i, x_i + dx_i, x_i + 2dx_i + d^2x_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e quindi ha per primo membro della sua equazione un determinante d'ordine $r+1$, nel quale figurano in $k+2$ colonne (ad es.) queste coordinate e le coordinate correnti X_i (aggiunta per ciascuna colonna la prima coordinata $= 1$) e figurano nelle rimanenti $r-k-1$ colonne parametri indeterminati. Con ovvie trasformazioni di determinanti si trova quindi che le equazioni dell'S_k osculatore nel punto x si hanno eguagliando a zero i determinanti di ordine $k+1$, estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & dx_1 & \ldots & d^k x_1 \\ X_2 - x_2 & dx_2 & \ldots & d^k x_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ X_r - x_r & dx_r & \ldots & d^k x_r \end{matrix} \right\| .$$

In particolare, se $k = r - 1$, si ha così l'equazione dell'iperpiano osculatore.

8. — Consideriamo la totalità degli iperpiani osculatori nei varî punti di un ramo $(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1})$, che intenderemo rappresentato dalle (2). L'equazione dell'iperpiano osculatore nel punto di parametro t sarà data, per ciò che ora dicemmo, dal seguente determinante, di cui scriviamo solo la linea i^{esima}:

$$\left| X_i - t^{\nu_i} - \ldots, \nu_i t^{\nu_i - 1} + \ldots, \nu_i(\nu_i - 1) t^{\nu_i - 2} + \ldots, \ldots, \nu_i \ldots (\nu_i - r + 2) t^{\nu_i - r + 1} + \ldots \right| = 0 .$$

Ora alla 3.ª colonna moltiplicata per t aggiungiamo la 2.ª; poi alla 4.ª moltiplicata per t^2 aggiungiamo la 2.ª moltiplicata per -2 e la 3.ª, trasformata nel modo detto, moltiplicata per $3t$; e così via, in modo che dei polinomi in ν_i rimangano solo i primi termini. Viene

$$\left| X_i - t^{\nu_i} - \ldots, \nu_i t^{\nu_i - 1} + \ldots, \nu_i^2 t^{\nu_i - 1} + \ldots, \ldots, \nu_i^{r-1} t^{\nu_i - 1} + \ldots \right| = 0 ,$$

nel qual determinante il primo termine di ogni elemento quale ora è scritto esiste effettivamente (non ha coefficiente nullo). Dividiamo la linea i^{esima} per $t^{\nu_i - 1}$ (per ogni i), poi moltiplichiamo la 1.ª colonna per $t^{\nu_r - 1}$: si ottiene

$$\left| t^{\nu_r - \nu_i} X_i - t^{\nu_r} - \ldots, \nu_i + \ldots, \nu_i^2 + \ldots, \ldots, \nu_i^{r-1} + \ldots \right| = 0 :$$

ossia, indicando con Δ il determinante formato colle successive potenze (fino alla $(r-1)^{\text{esima}}$) delle $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, determinante che, essendo questi numeri tutti distinti, è diverso da zero [1]) ed indicando con Δ_i minori di Δ che godono pure della stessa proprietà, si ha

$$\sum_1^r t^{\nu_r - \nu_i} X_i (\Delta_i + \ldots) + t^{\nu_r} (\Delta + \ldots) = 0 .$$

Cosicchè le coordinate $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ dell'iperpiano osculatore sono espresse dalle

$$\xi_i = t^{\nu_r - \nu_i} [t] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

$$\xi_0 = t^{\nu_r} [t] ,$$

indicando con $[t]$ delle serie di potenze di t col termine costante $\neq 0$.

---

[1]) Cfr. Capelli, l. c., n. 481-2.

Dividendo per la serie che dà ξ_r e ponendo $\xi_r=1$, si hanno infine le formule

$$\xi_{r-1}=t^{\alpha_{r-1}}[t]\,,\ \xi_{r-2}=t^{\alpha_{r-1}+\alpha_{r-2}}[t]\,,\ \dots,\ \xi_1=t^{\alpha_{r-1}+\dots+\alpha_1}[t],\ \xi_0=t^{\alpha_{r-1}+\dots+\alpha}[t],$$

che esprimono una proprietà correlativa a quella espressa dalle (2), le quali ora possiamo scrivere così:

$$x_1=t^{\alpha}[t]\,,\ x_2=t^{\alpha+\alpha_1}[t]\,,\dots,\ x_{r-1}=t^{\alpha+\dots+\alpha_{r-2}}[t]\,,\ x_r=t^{\alpha+\dots+\alpha_{r-1}}[t].$$

Per formulare detta proprietà si avverta prima che, avendosi una varietà ∞^1 (algebrica, irriducibile) di iperpiani, si chiama ancora *ramo* l'ente duale del ramo di curva, si dice *iperpiano origine* l'ente duale del punto origine, *classe* β il numero duale dell'ordine ed ancora *ranghi primo, secondo*, ..., $(r-1)^{\text{esimo}}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}$, i numeri duali dei ranghi del ramo di curva: onde sarà β il numero degli iperpiani della varietà che cadono nell'iperpiano origine Σ_0 per un punto generico di questo iperpiano, sarà $\beta+\beta_1+\dots+\beta_k$ il numero di quelli che cadono in Σ_0 per un punto generico di un certo Σ_k, cioè per un punto generico del suo sostegno S_{r-k-1}, sostegno che diremo pure *osculatore* in Σ_0 al ramo, ed in particolare sarà $\beta+\beta_1+\dots+\beta_{r-1}$ il numero di quelli che cadono in Σ_0 per il punto sostegno di un certo Σ_{r-1}, il qual punto si dirà *di osculazione* dello stesso piano origine Σ_0.

Ciò premesso ed osservato inoltre che la varietà degli iperpiani osculatori ad una curva algebrica irriducibile, è pure, come è manifesto, algebrica irriducibile, l'essere le ξ_i coordinate degli iperpiani osculatori nei punti di un ramo espresse dalle formule precedenti, cioè per serie di potenze di t, significa che *detti iperpiani osculatori costituiscono pure un ramo.* Inoltre, confrontando quelle formule colle altre che dànno le x_i dei punti del ramo o ragionando direttamente, si vede che *essendo* $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}$ *l'ordine ed i ranghi del ramo di punti, sono* $\alpha_{r-1}, \alpha_{r-2}, \dots, \alpha_1, \alpha$ *la classe ed i ranghi del ramo degli iperpiani osculatori* e che, essendo O l'origine ed $O_1, \dots, O_{r-1}$ l'S_1 tangente, ..., l'iperpiano osculatore in O al primo ramo, sono O_{r-1} iperpiano origine ed $O_{r-2}, \dots$, O l'S_{r-2} osculatore, ..., il punto di osculazione di O_{r-1} per il secondo ramo.

I numeri $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ hanno così due definizioni correlative. Per un iperpiano generico contenente O_i, in O cadono $\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_i$ intersezioni e, per un punto generico giacente sopra O_{r-i-1}, in O_{r-1} cadono

$\alpha_{r-1}+\alpha_{r-2}+\ldots+\alpha_{r-i-1}$ iperpiani osculatori. La somma $\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{r-1}$ è correlativa a sè stessa: dà il numero delle intersezioni di O_{r-1} coincidenti in O, ovvero il numero degli iperpiani osculatori per O coincidenti in O_{r-1} [1]).

9. — Dato un ramo $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{r-1})$ di curva algebrica C di S_r, se lo si proietta in S_k da un S_{r-k-1}, si otterrà un ramo della curva algebrica proiezione C′: ed è facile in ogni caso determinare di questo i ranghi e gli spazï osculatori. Se il centro di proiezione S_{r-k-1} è generico, il ramo di C′ sarà $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{k-1})$ ed avrà per tangente, piano, ..., S_{k-1} osculatore le proiezioni di quelli di C; il che risulta conducendo per S_{r-k-1} degli iperpiani passanti per l'origine, piano, ..., S_{k-1} osculatori del ramo di C e contandone le intersezioni con questo ramo, le quali si proietteranno nelle intersezioni col ramo di C′ delle traccie S_{k-1} di quegli iperpiani su S_k. In generale, qualunque sia la posizione del centro S_{r-k-1}, lo si congiunga successivamente all'origine, alla tangente, al piano, ..., osculatori del ramo di C, si veda quali diversi spazï si ottengano in tal modo e si contino le multiplicità d'intersezioni degli iperpiani per essi con quel ramo: si conosceranno così le multiplicità d'intersezione del ramo di C′ cogli S_{k-1} passanti per le traccie di quegli spazï su S_k. Solo è da avvertire che se S_{r-k-1} passa per O, la sua multiplicità d'intersezione col ramo di C (cioè la multiplicità d'intersezione di un iperpiano generico per S_{r-k-1}) deve essere costantemente sottratta nel suddetto computo.

Così, ad es., proiettando C dall'origine del ramo sopra un iperpiano, il ramo di C′ è $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1})$: proiettando C da un punto generico dell'S_k osculatore, il ramo di C′ è $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}+\alpha_k,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{r-1})$. In particolare, se il ramo di C è $(111\ldots1)$, proiettando da un punto generico della tangente si ha un ramo $(211\ldots1)$; proiettando questo di nuovo da un punto generico della sua tangente e così di seguito, $\alpha-1$ volte in tutto, si ha un ramo $(\alpha11\ldots1)$: ed ora analogamente, proiettando questo ramo α_1-1

[1]) Indicazioni bibliografiche relative al teorema dimostrato nel caso del piano veggansi a pag. 390 (n. 15) del libro di Brill e Noether citato nella nota al n. 21, Cap. II.°. Per lo spazio ordinario cfr. Halphen, *Sur les singularités des courbes*... (Bull. soc. math. de Fr., 6, 1877, pag. 10) e, per un S_r qualunque, H. B. Fine, *A Theoreme respecting the Singularities of Curves*... (American Journal of Math., 9, 1887, pag. 180). Una dimostrazione sintetica si trova nel n. 43 della Memoria di Segre citata nella nota al n. 7, Cap. 10.°. La dimostrazione algebrica esposta nel testo è pure di Segre.

volte successivamente da punti generici degli S_2 osculatori, si ha un ramo $(\alpha\alpha_1 1 \dots 1)$; e continuando, si può giungere fino ad un ramo $(\alpha\alpha_1 \dots \alpha_i)$ di un S_{i+1}, ove non escludiamo che alcune delle $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_i$ sieno eguali ad 1, bastando a questo fine omettere alcune delle dette proiezioni, ed ove risulta manifestamente $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = r$.

10. — Consideriamo le varietà (algebriche) $V_2, V_3, \dots, V_k, \dots$ costituite dalle tangenti, dai piani osculatori, ..., dagli S_{k-1} osculatori, ... di una curva algebrica C, dette rispettivamente 1.ª, 2.ª, ..., $(k-1)$.ª, ... *sviluppabile osculatrice* della curva. I loro ordini $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, \dots$ prendono nome ordinatamente di 1.°, 2.°, ..., $(k-1)$.°, ... *rango* della curva C. Va eccettuata l'$(r-1)$.ª sviluppabile costituita dagli S_{r-1} osculatori (che riempiono tutto S_r), il numero n_{r-1} di questi S_{r-1} che passano per un punto P dello spazio dicendosi *classe* della curva.

Nel determinare la classe deve contarsi α_{r-1} volte ogni iperpiano, partente dal punto P, che è osculatore in un punto origine di un ramo $(\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{r-1})$ se P non esiste nell'S_{r-2} osculatore, mentre se esiste nell'S_i (e non nell'S_{i-1}) osculatore del ramo, è da contare $\alpha_{r-1} + \alpha_{r-2} + \dots + \alpha_i$ volte (perchè altrettanti, secondo il n. 8, sono gli iperpiani osculatori vicinissimi a quello per un punto vicinissimo a P). Similmente nel determinare il $(k-1)$.° rango n_{k-1} di C, cioè il numero degli S_{k-1} osculatori di C che incontrano un dato S_{r-k}, si deve contare ciascuno il debito numero di volte, il che si fa riducendo la questione al caso ora considerato. In vero, proiettando C in C' da un S_{r-k-1} generico dell'S_{r-k} sopra un S_k, gli S_{k-1} osculatori di C si proiettano negli S'_{k-1} osculatori di C', in particolare gli S_{k-1} osculatori incontranti S_{r-k} negli S'_{k-1} osculatori passanti per il punto $P \equiv S_k S_{r-k}$; onde il $(k-1)$.° rango n_{k-1} di C è la classe di C', ed il numero delle volte che un S_{k-1} osculatore di un ramo di C va contato fra quelli incontranti S_{r-k} è lo stesso del numero delle volte che l'S'_{k-1} proiezione dell'S_{k-1} va contato fra gli S'_{k-1} osculatori di C' partenti dal punto P. Poichè quell'S'_{k-1} è osculatore del ramo proiezione del ramo considerato, occorrerà quindi valersi di quanto si è detto nel n. 9 per la determinazione dei ranghi dei rami proiezione di rami dati, a seconda della posizione del centro di proiezione.

Così se l'S_{r-k} incontra in un punto l'S_i (e non l'S_{i-1}) osculatore $(i \leq k-1)$ ad un ramo $(\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{r-1})$, l'$S_{r-k-1}$ è da ritenere in posizione generica rispetto a C e quindi (n. 9) il ramo proiezione sarà $(\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{k-1})$. Segue che *nella* V_k *sviluppabile osculatrice di una curva* C, *l'*S_i *oscula-*

tore ($i \leq k-1$) *di un ramo* ($\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$) *della curva è multiplo secondo* $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{k-1}$ ($= \alpha_{k-1}$ se $i = k-1$), cioè l' S_{k-1} osculatore del ramo ne rappresenta $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{k-1}$ successivi passanti per l' S_i. Di che la proprietà correlativa è che un S_{r-k} osculatore in un punto $(\beta\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{r-1}) = (\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}\alpha_{r-3} \ldots \alpha)$ (cfr. n. 8) ne rappresenta $\beta_i + \beta_{i+1} + \ldots + \beta_{k-1} = \alpha_{r-i-1} + \alpha_{r-i-2} + \ldots + \alpha_{r-k}$ successivi giacenti nell' S_{r-i-1} osculatore in quel punto, ovvero (sostituendo anche i, $k-1$ rispettivamente ad $r-i-1$, $r-k$) *un* S_i *osculatore di un ramo* ($\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$) *ha un contatto* $(\alpha_i + \alpha_{i-1} + \ldots + \alpha_{k-1})^{\text{punto}}$ *lungo l'* S_{k-1} *osculatore del ramo stesso* (cioè in ogni punto di questo S_{k-1}) *colla* V_k *sviluppabile osculatrice di* C ($i \geq k-1$). Così in un punto (1211 ...), *punto di flesso*, l' S_2 osculatore ha colla V_2 sviluppabile osculatrice 3 S_1 coincidenti nella tangente di flesso: ecc..

Notiamo pure il caso particolare in cui l'origine del ramo sia un punto generico di C, cioè le $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ sieno tutte eguali all'unità. Allora si ha che *un* S_i *osculatore in un punto generico di* C *è multiplo secondo* $k-i$ *per la* V_k *sviluppabile osculatrice, se* $i < k-1$, *ed ha invece un contatto* $(i-k+2)^{\text{punto}}$ *colla sviluppabile stessa lungo l'* S_{k-1} *osculatore in quel punto, se* $i > k-1$.

CAPITOLO 2.°

Trasformazione quadratica.

Scomposizione di un punto multiplo di una curva piana.

1. — Gli sviluppi in serie ed i metodi della geometria proiettiva debbono essere adoperati insieme alle trasformazioni cremoniane per dare un concetto geometrico completo dei punti multipli delle curve algebriche, specialmente in relazione al problema di derivare un punto multiplo da altri più semplici. Qui ci limitiamo ad accennare alle trasformazioni quadratiche, facendone poi applicazione alle curve piane.

Le quadriche V^2_{r-1} di S_r passanti per una quadrica V^2_{r-2} di un S_{r-1} (cioè per $\frac{(r-1)(r+2)}{2}$ punti generici di essa) e per un punto (esterno all'S_{r-1}) formano un sistema lineare di dimensione $\frac{r(r+3)}{2} - \frac{(r-1)(r+2)}{2} - 1 = r$. Se si prende A_0 $(x_1 = ... = x_r = 0)$ per il punto e $x_0 = 0$ per l'S_{r-1}, ed inoltre è $\varphi(x_1 ... x_r) = 0$ l'equazione del cono di vertice A_0 che passa per la V^2_{r-2} (o l'equazione di questa in S_{r-1}), è chiaro che il sistema lineare è rappresentato dalla equazione

$$(1) \qquad \lambda_0 \varphi(x_1 \dots x_r) + x_0(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r) = 0$$

al variare di $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_r$. Facendo corrispondere proiettivamente questo sistema lineare agli iperpiani di un altro spazio S'_r, alle quadriche che passano per un punto di coordinate x_i corrispondono gli iperpiani di una stella; e si vede facilmente, con ragionamento analogo a quello contenuto nel n. 1, Cap. 14.°, che, dette y_i le coordinate del centro della stella (in un opportuno sistema di riferimento), queste si esprimono colle x_i per mezzo delle formule (ρ essendo un fattore di proporzionalità)

$$(2) \qquad \rho y_0 = \varphi(x_1 \dots x_r) \ , \ \rho y_i = x_0 x_i \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

e che reciprocamente da queste si ritorna alla suddetta corrispondenza.

Ma ora si noti che dalle (2) seguono le $x_i = \frac{\rho}{x_0} y_i$, $\rho y_0 = \frac{\rho^2}{x_0^2} \varphi(y_1 \dots y_r)$, cioè le $\frac{y_0 x_0}{\rho} x_i = y_0 y_i$, $\frac{y_0 x_0}{\rho} x_0 = \varphi(y_1 \dots y_r)$: cosicchè (detto σ un nuovo fattore di proporzionalità $= \frac{y_0 x_0}{\rho}$) si traggono dalle (2) le

$$(3) \qquad \sigma x_0 = \varphi(y_1 \dots y_r) \ , \ \sigma x_i = y_0 y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

e perciò agli iperpiani di S'_r vengono a corrispondere le quadriche del sistema lineare dato dalla

$$(4) \qquad \mu_0 \varphi(y_1 \dots y_r) + y_0 (\mu_1 y_1 + \dots + \mu_r y_r) = 0$$

al variare delle $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$. Si può adunque affermare che la corrispondenza posta fra i due spazî S_r, S'_r, detta *trasformazione quadratica*, è birazionale (cremoniana), onde il grado di ciascuno dei sistemi lineari (1), (4) è $= 1$, come si prova anche direttamente con semplice ragionamento sintetico, e di più che i due spazî sono nelle stesse condizioni, le quadriche (4) passando per il punto $A'_0 (y_1 = \dots = y_r = 0)$ e per la quadrica $\varphi(y_1 \dots y_r) = 0$, $y_0 = 0$ di S'_r.

Poichè le x_i sono proporzionali alle y_i $(i = 1, 2, \dots, r)$, è chiaro che ad una retta per A_0 corrisponde una retta per A'_0, e reciprocamente, e che *tale corrispondenza è una collineazione* fra le stelle A_0, A'_0 (subordinata della trasformazione quadratica). Fra due rette omologhe di detta corrispondenza, date rispettivamente dalle coordinate x_i, y_i $(i = 1, 2, \dots, r)$, si ha poi *una proiettività*, come risulta (ad es.) dalla $\frac{y_0}{y_i} = \frac{\varphi(x_1 \dots x_r)}{x_0 x_i}$ (ove per x_i, y_i si scelgano, come si può, coordinate non nulle), la quale è bilineare nei parametri y_0, x_0 di due punti corrispondenti. Tale proiettività è *singolare* allora ed allora soltanto che la prima retta giace sul cono $\varphi(x_1 \dots x_r) = 0$ e quindi anche la seconda retta sul cono $\varphi(y_1 \dots y_r) = 0$. Quando la proiettività non è singolare, al punto di parametro $x_0 = 0$ della prima retta corrisponde il punto di parametro $y_0 = \infty$ della seconda; onde si può dire che ai punti del piano $x_0=0$ corrisponde il punto A'_0 o meglio corrispondono i punti infinitamente vicini ad A'_0 o le direzioni uscenti da questo punto (collinearmente): e conclusione simile si ha scambiando i due spazî. Quando invece la proiettività è singolare, *ogni* punto della prima retta ha per corrispondente il punto in cui la seconda incontra il piano $y_0=0$, e si vede così che ad ogni retta del cono $\varphi(x_1 \dots x_r)=0$ corrisponde un punto della quadrica $\varphi(y_1 \dots y_r)=0$, $y_0=0$, e viceversa: e similmente scambiando i due spazî.

Il punto A_0 ed i punti della quadrica $x_0=0$, $\varphi(x_1 \dots x_r)=0$ (come pure il punto A'_0 ed i punti della quadrica $y_0=0$, $\varphi(y_1 \dots y_r)=0$) sono detti *punti fondamentali*, e le ipersuperficie $y_0=0$, $\varphi(y_1 \dots y_r)=0$ (e $x_0=0$, $\varphi(x_1 \dots x_r)=0$) che rispettivamente loro corrispondono sono dette *ipersuperficie fondamentali* della corrispondenza quadratica. Le ipersuperficie fondamentali di uno spazio, ad es. $x_0=0$ contato $r-1$ volte ed il cono $\varphi(x_1 \dots x_r)=0$ considerato semplicemente costituiscono la jacobiana del sistema (1), come si ottiene subito dallo sviluppo del determinante (6) del n. 9, Cap. 10.° scritto nel presente caso.

2. — Ad una ipersuperficie F d'ordine n dello spazio S_r (ad es.) che abbia in A_0 un punto s^{uplo}, e quindi di equazione

$$u_s(x_1 \dots x_r)\, x_0^{n-s} + \dots + u_n(x_1 \dots x_r) = 0,$$

corrisponde in S'_r la ipersuperficie data per la (3) dalla equazione

$$y_0^s\, u_s(y_1 \dots y_r)\, \varphi(y_1 \dots y_r)^{n-s} + \dots + y_0^n\, u_n(y_1 \dots y_r) = 0,$$

che si scompone nell'iperpiano $y_0=0$ contato s volte corrispondente al punto A_0 ed in una ipersuperficie F′, propriamente corrispondente alla F, di ordine $2n-s$. Alle direzioni di F uscenti da A'_0 e date dal cono tangente $u_s(x_1 \dots x_r)=0$ vengono a corrispondere (collinearmente) i punti del piano $y_0=0$, pei quali è $u_s(y_1 \dots y_r)=0$. Veramente, facendo $y_0=0$ nella equazione di F′ si trova $u_s(y_1 \dots y_r)\,\varphi(y_1 \dots y_r)^{n-s}=0$, ma l'equazione $\varphi(y_1 \dots y_r)^{n-s}=0$ proviene dall'intersezione di F col cono $\varphi(x_1 \dots x_r)=0$, in quanto agli $n-s$ punti d'intersezione di F con ciascuna generatrice di questo cono corrisponde un punto da contarsi $n-s$ volte della quadrica $y_0=0$, $\varphi(y_1 \dots y_r)=0$: precisamente questa quadrica è $(n-s)^{\text{upla}}$ per F′, come risulta subito dalla equazione suddetta. Dalla quale segue pure immediatamente che il punto A'_0 è n^{uplo} per F′, il cono ivi tangente, dato dalla equazione $u_s(y_1 \dots y_r)=0$, essendo costituito dalle rette le cui direzioni, uscenti dal punto A'_0, corrispondono (collinearmente) ai punti della sezione di F col piano $x_0 = 0$.

3. — Si faccia l'ipotesi che x, y sieno due punti corrispondenti esterni rispettivamente alle jacobiane dei sistemi lineari (1), (4), il che vuol dire (n. 1) esterni rispettivamente agli elementi fondamentali dei due spazî S_r, S'_r. Allora *la trasformazione quadratica induce una omografia non singolare fra le due stelle di centri x, y, facendo corrispondere ad ogni iperpiano per x (o per y) l'iperpiano tangente alla quadrica corrispondente nel punto y (od x)*. Infatti non può avvenire che ad un iperpiano per x (ad es.) corrispondano due iperpiani per y, perchè allora l'ipersuperficie corrispondente a quell'iperpiano avrebbe in y un punto doppio, cioè y sarebbe della jacobiana, e d'altra parte se un iperpiano per x descrive un fascio, la quadrica corrispondente e quindi il suo iperpiano tangente in y descrive pure un fascio (n. 4, Cap. 3.°).

Nella stessa suddetta ipotesi *qualunque ramo di curva di ordine α uscente da x ha per corrispondente un ramo pure di ordine α uscente da y*, perchè ad un iperpiano che non passi per x corrisponde una quadrica non passante per y, e quando quell'iperpiano tenda a passare genericamente per x cioè ad avere α intersezioni col primo ramo, la quadrica corrispondente tende pure a passare genericamente per y e quindi non può essere tangente al secondo ramo: ma detta quadrica viene ad avere con questo ramo α intersezioni, dunque (n. 4, Cap. 1.° A.) il ramo stesso è di ordine α [1]. Parimenti ad una curva con punto α^{uplo} in x corrisponde una curva con punto α^{uplo} in y: anzi, come è facile vedere, *se quello è un punto multiplo ordinario (cioè con tangenti distinte), questo pure lo è.*

Si ha altresì, mantenuta quella ipotesi, che, *se una ipersuperficie F ha in x un punto s^{uplo}, la ipersuperficie corrispondente F' ha pure in y un punto s^{uplo}* e, *se quel punto x è ordinario (cioè con cono tangente privo di generatrici multiple), questo punto y è pure ordinario.* Basta osservare che ad una retta r che tende a passare genericamente per x corrisponde una curva C' che tende a passare semplicemente e genericamente per y e che il numero delle intersezioni di r e di F che cadono in x eguaglia il numero delle intersezioni di C' e di F che cadono in y, ed allora ricordare il n. 4 citato testè ed osservare inoltre che (per questo stesso n. 4) se r

---

[1]) Se x (od y) è punto fondamentale questa proprietà e le altre di questo numero possono non aver luogo. Vedansi ad es. i n. 8, 9.

tocca F in x, anche C′ tocca F′ in y, cioè le direzioni delle tangenti in x ad F corrispondono (in una omografia non singolare, per ciò che si è veduto sopra) alle direzioni delle tangenti in y ad F′.

Notiamo ancora, sempre nell'ipotesi stabilita, che, *se una ipersuperficie* F *ed un ramo di curva (od anche una curva)* C *hanno in* x *una multiplicità* μ *d'intersezione, questa medesima multiplicità* μ *d'intersezione hanno in* y *l'ipersuperficie* F′ *ed il ramo* C′ *a quelli corrispondenti*, giacchè una superficie φ non passante per x e convenientemente vicina ad F avrà con C μ punti d'intersezione (distinti) che tendono a cadere in x, i cui corrispondenti comuni a φ' (corrispondente a φ) e a C′ tendono pure a cadere in y quando φ' tende ad F′.

4. — Facciamo il caso $r=2$, ossia consideriamo la trasformazione quadratica fra due piani π, π'. Allora $\varphi(x_1 x_2)=0$ è una coppia di punti ed avremo che la rete (1) è una rete di coniche per un punto O e per altri due punti P, Q; e parimenti la rete (4) è di coniche per un punto O′ e per altri due punti P′, Q′. Se intendiamo che P′, Q′ corrispondano rispettivamente alle rette OQ, OP, evidentemente il caso che vogliamo considerare rientra nel caso generale studiato non solo prendendo in esso per punti A_0, A'_0 i punti O, O′, ma anche i punti P, P′ ovvero Q, Q′. I triangoli OPQ, O′P′Q′ dànno i punti e le rette fondamentali della trasformazione quadratica: alle direzioni uscenti da O, P, Q corrispondendo rispettivamente e proiettivamente i punti di P′Q′, Q′O′, O′P′ (e similmente passando dal piano π' al piano π).

Le formule (2), ponendo $\varphi(x_1 x_2)=x_1 x_2$ e scambiando fra loro y_1, y_2 divengono

$$\mu y_0 = x_1 x_2\ ,\quad \mu y_1 = x_2 x_0\ ,\quad \mu y_2 = x_0 x_1 \quad [1]:$$

da cui seguono le inverse, caso particolare delle (3),

$$\nu x_0 = y_1 y_2\ ,\quad \nu x_1 = y_2 y_0\ ,\quad \nu x_2 = y_0 y_1 .$$

Ad una curva di ordine n aventi in O, P, Q punti multipli secondo ρ_1, ρ_2, ρ_3, corrisponde (prescindendo dalle rette P′Q′, Q′O′, O′P′, contate

---

[1]) Se P, Q coincidono (e allora anche P′, Q′) e si pone $\varphi(x_1 x_2)=x_1^2$ le (2) sono $\rho y_0 = x_1^2$, $\rho y_1 = x_0 x_1$, $\rho y_2 = x_1 x_2$, che, facendo le sostituzioni $x=\dfrac{x_2}{x_0}$, $y=\dfrac{x_1}{x_0}$, $x'=\dfrac{y_2}{y_0}$, $y'=\dfrac{y_0}{y_1}$, prendono la forma $x=x'y'$, $y=y'$.

rispettivamente ρ_1, ρ_2, ρ_3 volte) una curva di ordine $2n - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3$ avente i punti O', P', Q' multipli secondo $n - \rho_2 - \rho_3$, $n - \rho_3 - \rho_1$, $n - \rho_1 - \rho_2$.

5. — Questa trasformazione quadratica ci servirà ora a presentare altri concetti sui punti multipli delle curve piane (algebriche) e particolarmente sulla loro scomposizione [1]). A questo fine occorre premettere un lemma.

Sia C^n una curva d'ordine n di un piano π, anche riducibile purchè composta di parti distinte, dotata di punti $\rho_1^{\text{uplo}}, \rho_2^{\text{uplo}}, \dots, \rho_i^{\text{uplo}}, \dots$ qualsiansi (in numero finito). Introduciamo il numero p_1 definito dalla

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{\rho_i(\rho_i - 1)}{2}$$ (pseudogenere)

che coincide col genere di C^n (n. 20, Cap. 9.°) se i detti punti multipli sono ordinarî, e dimostriamo, indicando con g il numero delle curve irriducibili di cui si compone C^n, che *si ha la relazione* $p_1 + g - 1 \geq 0$.

Se $g = 1$, cioè se C^n è irriducibile, valgono senz'altro le considerazioni fatte nel caso che i punti multipli sieno ordinarî (n. 22, Cap. 9.°). Se $g > 1$ e sono $n_1, n_2, \dots, n_g$ gli ordini delle g parti di C^n e $\rho_{1i}, \rho_{2i}, \dots, \rho_{gi}$ le loro rispettive multiplicità nel punto ρ_i^{uplo} di C^n, onde

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_g \;, \quad \rho_i = \rho_{1i} + \rho_{2i} + \dots + \rho_{gi} \;,$$

e se inoltre rappresentiamo con $p_{11}, p_{21}, \dots, p_{g1}$ numeri definiti per quelle g parti come p_1 per C^n, cioè dati dalle

$$p_{h1} = \frac{(n_h - 1)(n_h - 2)}{2} - \sum_i \frac{\rho_{hi}(\rho_{hi} - 1)}{2} \qquad (h = 1, 2, \dots, g),$$

si trova con facile calcolo

$$(5) \qquad p_1 + g - 1 = p_{11} + p_{21} + \dots + p_{g1} + \sum_{h,k} \left(n_h n_k - \sum_i \rho_{hi} \rho_{ki}\right)$$

$(h, k = 1, 2, \dots, g$ ed $h \neq k)$. Di qui, tenendo presente che il numero $p_{h1} \geq 0$ per il caso di prima, che le g curve componenti C^n sono distinte e che il numero $n_h n_k$ delle intersezioni di due tali curve degli ordini n_h, n_k non è inferiore a $\sum_i \rho_{hi} \rho_{ki}$, si conclude quanto si è affermato.

---

[1]) Cfr. BERTINI, *Sopra alcuni teoremi fondamentali*... (Rend. Ist. lomb., 21 (2), 1888).

6. — Ciò premesso, fra i punti multipli di C^n cominciamo a considerarne uno qualunque O, di cui diciamo s la moltiplicità, continuando ad indicare con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots$ quelle degli altri, onde

$$(6) \qquad p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - \sum \frac{\rho_i(\rho_i - 1)}{2}.$$

Consideriamo una trasformazione quadratica fra il piano π ed un altro piano π' qualsiasi, ponendo in O uno dei punti fondamentali e assumendo poi genericamente gli altri due punti fondamentali P, Q di π e quelli O′, P′, Q′ di π'. La curva C^n sarà trasformata in una curva $C^{n'}$ di ordine $n' = 2n - s$ (n. 4) e costituita di g parti come C^n (questa non potendo contenere PQ generica in π, nè OP, OQ generiche per O). Inoltre $C^{n'}$ avrà (n. 4) in O′, P′, Q′ punti rispettivamente n^{uplo}, $(n-s)^{\text{uplo}}$, $(n-s)^{\text{uplo}}$, i quali saranno punti multipli ordinarî perchè PQ, QO, OP segano C^n (fuori di O) in punti distinti [1]), ed avrà nei punti corrispondenti ai punti $\rho_1^{\text{uplo}}, \rho_2^{\text{uplo}}, \ldots, \rho_i^{\text{uplo}}, \ldots$ di C^n, in quanto questi sono esterni al triangolo fondamentale OPQ, punti di eguale multiplicità (n. 3); non avrà punti sopra O′P′, O′Q′ (fuori di O′, P′, Q′) perchè C^n non passa per P, Q, ed avrà invece, sopra P′Q′, s punti distinti o coincidenti come le s tangenti o direzioni di C^n in O, alle quali quei punti corrispondono proiettivamente. Sieno appunto $t_1, t_2, \ldots$ i numeri che indicano i punti di $C^{n'}$ sopra P′Q′ che cadono rispettivamente in punti distinti di questa retta, o, come si è detto, i numeri che indicano le tangenti di C^n in O che cadono rispettivamente in rette distinte per questo punto, onde sarà $t_i \geq 1$, $\Sigma t_i = s$: e sieno ancora $s_1, s_2, \ldots$ gli ordini di multiplicità dei detti punti distinti di P′Q′ per la curva $C^{n'}$, sicchè si avrà $s_i \geq 1$ ed inoltre $s_i \leq t_i$ secondochè P′Q′ sarà o non sarà tangente nel punto s_i^{uplo} a $C^{n'}$, e però $\Sigma s_i \leq \Sigma t_i$.

Come si vede, la trasformazione quadratica ha condotto dalla curva C^n ad una curva $C^{n'}$ che possiede punti della stessa multiplicità di C^n

---

[1]) Si può aggiungere anzi che questi punti ordinarî (e analogamente gli altri punti multipli ordinarî che s'incontrano in seguito) *non hanno particolarità tangenziali*, cioè ogni tangente nel punto n^{uplo} (ad es.) ha non più di $n+1$ punti comuni con $C^{n'}$, perchè (essendo P, Q generici) la retta corrispondente (partente da O) ha sopra PQ un solo punto comune con C^n.

salvo che, in luogo del punto s^{uplo}, la curva $C^{n'}$ possiede tre punti multipli ordinarî e possiede inoltre i suddetti punti s_1^{uplo}, s_2^{uplo}, ... sopra $P'Q'$, essendo $\Sigma s_i \leq s$. Si faccia ora una seconda trasformazione quadratica fra il piano π' di $C^{n'}$ ed un altro piano π'', ponendo un punto fondamentale O_1 in un punto s_1^{uplo} (ad es.) e scegliendo gli altri due punti fondamentali P_1, Q_1 di π e quelli O'_1, P'_1, Q'_1 di π'' genericamente, come avanti. Da $C^{n'}$ si passerà ad una curva $C^{n''}$ (composta di g parti) di ordine $n''=2n'-s_1$, per la quale il punto s_1^{uplo} sarà sostituito da tre punti multipli ordinarî e da punti multipli s_{11}^{uplo}, s_{12}^{uplo}, ... posti sulla retta $P'_1Q'_1$. Si facciano successivamente altre analoghe trasformazioni quadratiche ponendo i rispettivi punti fondamentali O_2, O_3, ... nei punti trasformati dei punti s_2^{uplo}, s_3^{uplo}, ... [1]); si arriverà ad una curva in cui il punto s^{uplo} di C^n è sostituito da punti multipli ordinarî e da punti s_{ik}^{upli} ($i=1, 2, ...$; $k=1, 2, ...$), essendo $\Sigma s_{ik} \leq \Sigma s_i \leq s$. Per questi si facciano trasformazioni quadratiche come per i punti s_i^{upli}: si avrà una curva in cui il punto s^{uplo} di C^n è sostituito da punti multipli ordinarî e da punti s_{ikl}^{upli} ($i=1, 2, ...$; $k=1, 2, ...$; $l=1, 2, ...$): essendo $\Sigma s_{ikl} \leq \Sigma s_{ik} \leq s$: e così di seguito.

L'operazione avrà un termine, ossia si potrà infine arrivare ad una curva in cui il punto s^{uplo} di C^n sia sostituito da tutti punti multipli ordinarî? Se i punti s_i^{upli} hanno rispettivamente multiplicità inferiore ad s (il che avviene certamente se sono almeno due, o se, essendo un solo s_1^{uplo}, sia $s_1 < t_1$) ovvero se, pure ottenendosi successivamente un punto s^{uplo} sopra $P'Q'$, $P'_1Q'_1$, ..., $P'_{h-1}Q'_{h-1}$, cioè dopo un numero h *finito* di successive trasformazioni quadratiche, si trovino però, eseguendo la $(h+1)^{esima}$ trasformazione quadratica, cioè sopra $P'_hQ'_h$, punti di multiplicità $< s$, e se la stessa cosa si verifica per i punti s_{ik}^{upli} ($k=1, 2, ...$) in relazione al punto s_i^{uplo}, per i punti s_{ikl}^{upli} ($l=1, 2, ...$) in relazione al punto s_{ik}^{uplo}, ..., la risposta alla suddetta domanda è evidentemente affermativa.

Il dubbio che, ripetendo indefinitamente trasformazioni quadratiche nel modo detto, *sempre* si trovi un punto s^{uplo} (o un punto s_i^{uplo}, o un punto s_{ik}^{uplo}, ...) si elimina nel modo seguente.

Anzitutto notiamo che, detti $p'_1, p''_1, ..., p_1^{(h)}, ...$ i numeri per successive trasformate $C^{n'}, C^{n''}, ..., C^{n^{(h)}}, ...$ analoghi al numero p_1 per la C^n

[1]) Tengasi presente per tutto il ragionamento il n. 3.

definito dalla (6), si ha

$$p'_1 = \frac{(2n-s-1)(2n-s-2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - 2\frac{(n-s)(n-s-1)}{2} - \\ - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2} - \sum \frac{\rho_i(\rho_i-1)}{2}$$

cioè, per la (6),

$$p'_1 = p_1 - \sum_i \frac{s_i(s_i-1)}{2}.$$

Parimenti si ha

$$p''_1 = p'_1 - \sum_{ik} \frac{s_{ik}(s_{ik}-1)}{2} = p_1 - \sum_i \frac{s_i(s_i-1)}{2} - \sum_{ik} \frac{s_{ik}(s_{ik}-1)}{2}$$

. . . .

$$(7) \quad p_1^{(h)} = p_1 - \sum_i \frac{s_i(s_i-1)}{2} - \sum_{ik} \frac{s_{ik}(s_{ik}-1)}{2} - \sum_{ikl} \frac{s_{ikl}(s_{ikl}-1)}{2} - \dots$$

. . . .

Ma, se per h successive trasformazioni quadratiche si trova il fatto sopradetto ($s_{\text{I}} = s_{\text{II}} = s_{\text{III}} = \dots = s$), invece della (7) si avrà

$$p_1^{(h)} = p_1 - h\,\frac{s(s-1)}{2}.$$

Ora la curva $C^{n^{(h)}}$ essendo composta di g parti (come la C^n), deve essere (n. 5)

$$p_1^{(h)} + g - 1 \geq 0,$$

cioè, per la precedente,

$$h \leq \frac{2(p_1+g-1)}{s(s-1)};$$

dunque il fatto suindicato può avvenire solo per un numero finito di trasformazioni, che è al più eguale al massimo intero contenuto nel secondo membro di questa diseguaglianza (numero finito per essere $s > 1$).

Ripetasi per ogni altro punto multiplo di C^n quanto si è detto per il considerato punto s^{uplo} e si avrà infine una curva trasformata con soli punti multipli ordinarî; risultato che non si altera anche se si aggiungano nuove trasformazioni quadratiche, nelle condizioni dette, applicate a punti multipli ordinarî ed anche a punti semplici della curva (cioè collocando successivamente in questi i punti fondamentali O_i e prendendo gli altri punti fondamentali genericamente): il che si farà anzi per quei punti multipli ordinarî, posseduti già dalla curva, che eventualmente presentino particolarità tangenziali. Siccome poi una successione di trasformazioni quadratiche è manifestamente una trasformazione cremoniana (fra il primo e l'ultimo piano considerati) [1], concludiamo che *ogni curva piana può con trasformazione cremoniana ridursi ad un'altra fornita soltanto di punti multipli ordinarî, i quali sieno inoltre senza particolarità tangenziali.*

7. — Il teorema dimostrato, nel caso che la curva sia composta, si può enunciare così: *Due (o più) curve distinte si possono sempre, con trasformazione cremoniana, ridurre ad altre con punti multipli ordinarî e tali che in ogni punto comune presentino il caso semplice* (cioè le tangenti ivi sieno distinte).

Si applichi ciò a due curve generiche di un sistema lineare di curve piane e su questo sistema si eseguisca la stessa trasformazione cremoniana fatta su quelle due curve. I punti base del sistema lineare trasformato sono punti comuni anche alle curve trasformate di dette due curve, le quali curve trasformate hanno in ciascuno di essi un punto ordinario della stessa multiplicità (per essere le due curve generiche) senza tangenti comuni. Ne segue che ogni curva generica del sistema trasformato ha in ciascuno dei punti medesimi un punto ordinario di quella multiplicità con tangenti variabili. Adunque, ricordando che punto base ordinario di un sistema lineare di curve piane significa che la curva generica del sistema non solo ha ivi le tangenti distinte ma le ha tutte variabili, si conclude che *un sistema lineare di curve piane si può, con trasformazione cremoniana, ridurre ad un altro con punti base ordinarî.*

8. — Riprendiamo il concetto di ramo, di cui per una curva piana sono da considerare l'ordine e la classe. Intanto il teorema del n. 6 si può esprimere così (cfr. n. 6, Cap. 1.° A.): *Ogni curva piana può, con trasformazione cremoniana, ridursi ad un'altra con rami tutti lineari.*

---

[1]) Ricordo, per incidenza, sussistere anche il teorema inverso, cioè ogni trasformazione cremoniana essere una successione di trasformazioni quadratiche. Cfr. Castelnuovo, *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano* (Atti Accad. Torino, 36, 1901).

Un ramo di curva di un piano π abbia l'origine O, l'ordine α e la classe α_1. Si applichi una trasformazione quadratica prendendo O per un punto fondamentale in π e prendendo poi genericamente (come per l'addietro) gli altri due P, Q di π e quelli O′, P′, Q′ di π'. Se la tangente in O al ramo ha per corrispondente la retta $O'O'_1$ segante P′Q′ nel punto O'_1, questo sarà l'origine del ramo trasformato. Di più, osservando che, se una retta variabile intorno a P (ad es.) tende a PO, viene ad avere in O α punti comuni col ramo primitivo, è chiaro che la sua corrispondente, variabile intorno a P′, tendendo a P′Q′, viene ad avere α punti comuni col ramo trasformato: mentre una retta per O che tenda alla tangente viene ad avere nuove α_1 intersezioni col ramo primitivo e quindi la corrispondente per O′, tendendo ad $O'O'_1$, viene ad avere α_1 punti d'intersezione col ramo trasformato.

Ne risulta evidentemente che, se $\alpha < \alpha_1$, l'ordine del ramo trasformato è α, la classe $\alpha_1 - \alpha$ e la tangente è la retta $O'O'_1$: se $\alpha > \alpha_1$, l'ordine è α_1, la classe $\alpha - \alpha_1$ e la tangente è P′Q′: e se $\alpha = \alpha_1$, l'ordine è certamente α, ma nulla si può affermare della classe e della tangente colla sola conoscenza dei numeri α, α_1. In particolare se un ramo è del 1.° ordine e di classe $\alpha_1 > 1$ si è nel primo caso e si potrà ridurne anche la classe ad 1 con successive trasformazioni quadratiche.

9. — Sarà utile illustrare le cose dette con qualche esempio.

Sia O un punto s^{uplo} di una curva piana. Se le tangenti sono distinte, se cioè il punto O è ordinario, si hanno sopra P′Q′ s punti semplici distinti e però s rami di 1.° ordine, di cui uno qualunque avrà la classe $\alpha_1 - 1$ se la tangente in O al ramo corrispondente abbia comune con questo $1 + \alpha_1$ punti (cioè colla curva $s + \alpha_1$ punti) e se $\alpha_1 > 1$. Supposto che vi sieno α delle s tangenti ciascuna avente in O soltanto $s + 1$ punti comuni colla curva e che queste α tangenti coincidano colla condizione che la retta di coincidenza continui ad avere in O colla curva $s + 1$ punti comuni si ha in corrispondenza un ramo di 1.° ordine che ha con P′Q′ α punti comuni, sicchè (n. 8) il ramo primitivo è d'ordine α. Adunque *la detta coincidenza colla detta condizione produce un solo ramo* [1]). Così, se in un punto doppio

[1]) Forse qui torna opportuna l'osservazione generale: — *Se una retta l passante per un punto O s^{uplo} di una curva piana ha in O colla curva incontro $(s+h)^{\text{punto}}$, ciò equivale al fatto che essa è tangente a rami uscenti da O, le cui classi dànno per somma h* — . Ciò risulta considerando una retta uscente da O ed avvicinantesi

le due tangenti coincidono in una che abbia ivi contatto tripunto, si ha ciò che dicemmo (n. 6, Cap. 1.° A.) *regresso* o *cuspide* (di 1.ª specie).

Suppongasi invece che in un punto doppio O le tangenti coincidano in una retta avente ivi contatto quadripunto colla curva. Nel punto O'_1 in cui la corrispondente a tale retta incontra P Q′ si ha un punto doppio (le $O'O'_1$, P′Q′ avendo in esso incontro bipunto colla trasformata della curva considerata). Se questo è a tangenti distinte, il punto O è origine di due rami di 1.° ordine: si dice *tacnodo*. Se poi il punto doppio O'_1 è a tangenti coincidenti in una sola con contatto tripunto, cioè O'_1 è una cuspide (di 1.ª specie), allora O è origine di un solo ramo di 2.° ordine: dicesi *regresso* o *cuspide di 2.ª specie*. Se O'_1 è tacnodo, il punto O, detto *oscnodo*, è nuovamente origine di due rami di 1.° ordine: se invece O'_1 è regresso di 2.ª specie, O è origine di un solo ramo di 2.° ordine e si chiama *cuspide* o *regresso di 3.ª specie*. Ecc..

10. — La successione di trasformazioni quadratiche considerata nel n. 6 conduce ad una importante nozione geometrica di un punto multiplo di una curva piana. Mantenendo le denominazioni adoperate in quel n., diremo che *al punto* O *sono successivi punti* $s_1^{\text{uplo}}, s_2^{\text{uplo}}, \dots$, *che ad ogni tale punto* s_i^{uplo} *sono successivi punti* $s_{i1}^{\text{uplo}}, s_{i2}^{\text{uplo}}, \dots$, *che ad ogni tale punto* s_{ik}^{uplo} *sono successivi punti* $s_{ik1}^{\text{uplo}}, s_{ik2}^{\text{uplo}}, \dots$, *e così via di seguito*, potendosi continuare e, come si vedrà fra breve (n. 11), occorrendo anzi di continuare anche quando si ottengano pei numeri $s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \dots$ valori eguali ad 1 [1]). Il punto multiplo O o, come anche si dice, la sua *composizione*, si indica colla scrittura $(s s_i s_{ik} s_{ikl} \dots)$, mentre alla operazione del n. 6 si da il nome di *scomposizione* del punto stesso.

Questo concetto si giustifica considerando la curva $C^{n'}$ come limite di un'altra curva che abbia ancora s intersezioni con P′Q′ (distinte da

---

indefinitamente alla l: allora h delle sue intersezioni variabili colla curva tenderanno verso O e d'altra parte per ogni ramo che l tocca tendono verso O appunto tante di quelle intersezioni quanta è la classe del ramo, e però ecc.. Se $h=1$ si ha come corollario di questa osservazione ciò che si è veduto nel testo coll'uso della trasformazione quadratica.

[1]) Si ha una specie di costellazione, essendo i punti s_i^{upli} satelliti di O, i punti s_{ik}^{upli} $(k=1,2,\dots)$ satelliti del punto s_i^{uplo}, i punti s_{ikl}^{upli} $(l=1,2,\dots)$ satelliti del punto s_{ik}^{uplo}, ...: o meglio una specie di ramificazione, ogni ramo ottenendosi dalla successione $s s_i s_{ik} s_{ikl} \dots$ col dare ad i, e parimenti a $k, l, \dots$, un valore determinato (scelto comunque fra i numeri $1, 2, \dots$).

$P'Q'$) ma queste tutte diverse fra loro e che possegga punti s_1^{upli}, s_2^{upli}, ..., vicinissimi a $P'Q'$, chè allora C^n risulta come limite di una curva che abbia un punto s^{uplo} e vicinissimi a questo punti $s_1^{\text{upli}}, s_2^{\text{upli}}, \ldots$, e ripetendo la stessa considerazione per ogni punto s_i^{uplo}, per ogni punto s_{ik}^{uplo}, ...

11. — Un'altra giustificazione molto espressiva della nozione posta nel n. precedente sta nella determinazione del numero dei punti d'intersezione di due curve.

Sieno C, C_1 due curve di un piano π e dicasi I il numero delle loro intersezioni raccolte in un punto O s^{uplo} per la prima e t^{uplo} per la seconda. Se le due curve non hanno in quel punto tangenti comuni già vedemmo (n. 4) essere $I = st$: ed allora, fatta una prima trasformazione quadratica (n. 6), si troveranno sopra $P'Q'$ punti s_i^{upli} per la trasformata di C tutti distinti dai punti t_i^{upli} per la trasformata di C_1. Ma se le due curve vengono ad avere una tangente comune, uno di quei punti coincide con uno di questi ed in O cadono tante nuove intersezioni quante sono le intersezioni delle due curve trasformate che cadono nel detto punto di coincidenza: ed analogamente se le curve primitive hanno varie tangenti comuni. Sicchè, detto I_1 il numero delle intersezioni delle due curve trasformate raccolte nei punti comuni esistenti sopra $P'Q'$, si ha

$$I = st + I_1 .$$

Si ragiona egualmente per ciascuno dei punti comuni alle due curve trasformate esistenti sopra $P'Q'$. Se, ad es., il punto s_1^{uplo} dell'una coincide col punto t_1^{uplo} dell'altra, queste due curve trasformate si segano ivi in $s_1 t_1$ punti o più secondochè non vi sono o vi sono tangenti comuni. Si ha adunque

$$I_1 = \sum s_i\, t_i + I_2 ,$$

intendendo che la somma va estesa a tutte le coppie di punti multipli delle due curve primitive che sono in una stessa direzione uscente da O e procedendo alla determinazione di I_2 come si è fatto per I_1. Si eseguisce cioè una seconda trasformazione quadratica col porre il vertice O_1 in uno dei punti comuni alle dette due trasformate sopra $P'Q'$, il che non varia la multiplicità degli altri di questi punti comuni per le due curve nè varia la multiplicità d'intersezione in essi delle medesime (n. 3, Cap. 1.° A.), e si eseguiscono poi altre trasformazioni quadratiche ponendone i vertici O_2, O_3, ... successivamente nei punti trasformati dei punti stessi. Si trova così

$$I_2 = \sum s_{ik} t_{ik} + I_3 ,$$

ove la somma va estesa a tutte le coppie di punti multipli delle due curve trasformate suddette che si trovano in una stessa direzione partente da O_1, O_2, O_3, ... Si procede per I_3 come si è fatto per I_2, e così via via, fino a considerare anche eventualmente punti comuni semplici, arrestando la successione delle trasformazioni quadratiche soltanto quando si giunga a due curve trasformate non aventi tangenti comuni in alcuno di quei punti comuni (multipli o semplici) a cui si arriva per effetto delle dette trasformazioni. Ciò fatto si ha

$$I = st + \sum s_i t_i + \sum s_{ik} t_{ik} + \sum s_{ikl} t_{ikl} + \dots$$

le somme essendo estese alle coppie sopra definite [1]. Adunque, introdotta la nozione del n. 10, si può dire che *il numero nm delle intersezioni di due curve degli ordini n, m è la somma dei prodotti delle multiplicità che le due curve hanno nei loro punti comuni distinti o successivi* [2].

---

[1]) Per dare una forma visibile al risultato si pensi alle due ramificazioni rappresentanti i due punti s^{uplo}, t^{uplo} (nota al n. 10) così sovrapposte che coincidano i punti di ramificazione corrispondenti a punti comuni (multipli o semplici).

[2]) Come applicazione, ricorderò che dicesi *curva aggiunta* di una data curva C^n ogni curva (di ordine qualsiasi) che possegga rispettivamente punti $(s_j - 1)^{\text{upli}}$ nei punti s_j^{upli} di C^n *distinti* o *successivi* (cioè, riprendendo le cose e le notazioni del n. 6, in un punto s^{uplo} di C^n, la curva aggiunta abbia punto $(s-1)^{\text{uplo}}$, la sua trasformata in ogni punto s_i^{uplo}, sopra P' Q', abbia punto $(s_i - 1)^{\text{uplo}}$, ecc.). Si può dimostrare (cfr. NOETHER, Mem. citata nella nota al n. 5, Cap. 8.°), che le prime polari di C_n formano una rete di curve aggiunte di ordine $n-1$: ma una prima polare generica, in ogni punto s^{uplo} *distinto*, ha (oltre le altre intersezioni provenienti dalla sua qualità di aggiunta) un certo numero di punti *semplici* comuni con C^n, numero ≥ 0 secondo la natura del punto s^{uplo} e $\leq s-1$ (cfr. il lavoro citato dianzi e BERTINI, Nota citata nel n. 5). Questo numero (che è un *nuovo carattere* da aggiungersi ai numeri s_i, s_{ik}, ...) dicesi *numero dei punti di diramazione* del punto s^{uplo} considerato. Sottraendo da $n(n-1)$ le intersezioni della polare nei punti s_j^{upli} (distinti o successivi) di C^n e nei punti di diramazione, il cui numero complessivo indicheremo con $\delta (\leq (s_j - 1)$, si ha la classe di C^n data dalla

$$m = n(n-1) - \sum s_j (s_j - 1) - \delta ,$$

Ecco un esempio. Due curve C, C_1 si tocchino in un punto O semplice per amendue. Per la curva Γ composta delle C, C_1 è chiaro che O è un punto doppio, origine di due rami: onde, dopo un certo numero h delle solite trasformazioni quadratiche (n. 6), la trasformata di Γ dovrà presentare sopra $P'_{h-1}Q'_{h-1}$ un punto doppio ordinario, e quindi dopo la $(h+1)^a$ trasformazione quadratica le trasformate delle C, C_1 non avranno sopra $P'_h Q'_h$ alcun punto comune. Dunque C, C_1 hanno nel punto O $1+1+...+1=h+1$ punti comuni: vale a dire O è per esse di contatto $(h+1)^{\text{punto}}$ o d'ordine h. Si vede anche che ciascuna delle suddette trasformazioni quadratiche *diminuisce di uno l'ordine del contatto.*

Un altro esempio è il seguente. Due curve abbiano comune un punto O triplo colle tre tangenti comuni coincidenti in una sola così che, eseguendo la 1.ª trasformazione quadratica (n. 6), le curve trasformate abbiano sopra $P'Q'$ il medesimo regresso (di 1.ª specie), nel quale la stessa $P'Q'$ sia tangente comune. Eseguendo la 2.ª trasformazione quadratica si avranno due curve che hanno sopra $P'_1Q'_1$ un punto semplice comune colla stessa $P'_1Q'_1$ tangente comune. Se in questo punto l'ordine del contatto è h (il che si giudica operando come nell'es. precedente) le due curve si segano in $9+4+h+1=14+h$ punti coincidenti in O.

12. — Anche per un solo ramo di curva algebrica si dirà che la sua origine O è α^{upla} se il ramo è d'ordine α, che ad esso è successivo un punto β^{uplo} se, dopo la 1.ª trasformazione quadratica (cfr. n. 8), il ramo trasformato avente l'origine in un punto O'_1 di $P'Q'$ è d'ordine β,...; ed il ramo stesso si indicherà con $(\alpha\beta\gamma...)$.

Sia l'origine O di un ramo $(\alpha\beta\gamma...)$ di una curva piana algebrica punto $(s\, s_i\, s_{ik}...)$ per un'altra curva. Se la tangente al ramo non coincide con una delle tangenti alla curva, le loro intersezioni in O sono (n. 4, Cap. 1.° A.) αs: se coincide, cioè il punto β^{uplo} del ramo cade nel punto s_1^{uplo} (ad es.), ragionando come nel n. 11, si vede che quelle intersezioni sono $\alpha s+\beta s_1$, e così se il punto γ^{uplo} cade nel punto s_{11}^{uplo} (ad es.) sono $\alpha s+\beta s_1+\gamma s_{11}$, e così via via, intendendo bene che (come nel n. 11) può

---

ossia, ponendo $D=\sum\frac{s_j(s_j-1)}{2}-\delta$, $R=\delta$, dalla

$$m=n(n-1)-2D-3R,$$

che è una formula di PLÜCKER. Un'altra è la correlativa di questa: la terza è data dal teorema di RIEMANN (n. 14) applicato alla C^n ed al suo inviluppo aderente.

occorrere di considerare anche punti comuni semplici per il ramo o per la curva o per amendue (cioè può occorrere di prolungare la successione di trasformazioni quadratiche dette nel n. 6).

Adunque, se per un punto O $(s s_i s_{ik} ...)$ di una curva si fa passare un ramo (o una curva) semplicemente, il numero delle intersezioni della curva e del ramo sono in generale s: diventa maggiore e precisamente $s+s_i$ se si fa passare il ramo semplicemente per un punto s_i^{uplo}: cresce ulteriormente se il ramo passa per un altro punto s_{ik}^{uplo}; ecc.. Però (ed è questa una importante osservazione di Segre [1])) dopo aver fatto passare semplicemente il ramo per il punto s^{uplo} e per un punto successivo s_i^{uplo}, *può darsi che non si possa far passare il ramo per un punto s_{ik}^{uplo} successivo al punto s_i^{uplo} conservando il ramo lineare.* In vero, se dopo la 1.ª trasformazione quadratica (cfr. n. 6) il punto s_{ik}^{uplo} consecutivo al punto s_i^{uplo} si trova con questo su P′Q′, ritornando dal ramo trasformato al primitivo si vede (n. 8) che questo è *necessariamente* di 2.° ordine. Quindi tre punti consecutivi s^{uplo}, s_i^{uplo}, s_{ik}^{uplo} possono stare sopra un ramo lineare o sopra un ramo di 2.° ordine (il suddetto numero d'intersezioni essendo corrispondentemente $s+s_i+s_{ik}$ ovvero $2s+s_i+s_{ik}$). Nel secondo caso, ad es., non esistono coniche irriducibili per i tre punti (le cubiche trasformate spezzandosi evidentemente nella P′Q′, in quanto la toccano in O'_1 oltre a passare per P′, Q′, e in coppie di rette per O′). Parimenti quattro punti successivi s^{uplo}, s_i^{uplo}, s_{ik}^{uplo}, s_{ikl}^{uplo} possono essere su rami lineari o su rami di 2.° ordine o su rami di 3.° ordine: ecc..

13. — Una trasformazione quadratica (e la stessa cosa vale per qualsiasi trasformazione cremoniana) trasforma un punto multiplo O di C, esterno agli elementi fondamentali della trasformazione, in un punto multiplo O′ della curva trasformata C′, il quale ha la stessa composizione: cioè, *se* O *ha la composizione* $(s s_i s_{ik} ...)$ *ed* O′ *la composizione* $(s' s'_i s'_{ik} ...)$, *deve essere* $s=s'$, $s_i=s'_i$, $s_{ik}=s'_{ik}$,... Che sia $s=s'$ segue subito dal n. 3. Ora un ramo (o curva) passante semplicemente per O si obblighi a contenere il punto s_1^{uplo} (ad es.) di C, il suo trasformato passante per O′ verrà a contenere un punto s'_1^{uplo} di C′: ma il numero $s+s_1$ delle intersezioni di quello con C deve essere eguale al numero $s+s'_1$ delle intersezioni di questo con C′, dunque deve essere $s_1=s'_1$. Il primo ramo si faccia adesso passare

[1]) SEGRE, *Un' osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane...* (Atti della R. Accad. di Torino, 36, 1901).

ulteriormente per il punto s_{11}^{uplo} (ad es.) di C, onde il secondo venga a passare per il punto s'^{uplo}_{11} di C′: secondochè quello è di 1.° o 2.° ordine (cfr. n. 12), questo è pure (n. 3) di 1.° o 2.° ordine, e si avrà, per la stessa ragione di prima, nell'un caso $s+s_1+s_{11}=s+s_1+s'_{11}$ e nell'altro caso $2s+s_1+s_{11}=2s+s_1+s'_{11}$, in ogni caso adunque $s_{11}=s'_{11}$. Continuando con analoghi ragionamenti si conclude ciò che si è affermato.

Coll'aiuto della proprietà dimostrata si toglie ogni dubbio sulla influenza che può avere nella composizione $(s s_i s_{ik} \ldots)$ di un punto multiplo di una curva la successione delle trasformazioni quadratiche che serve ad ottenerla (n. 6): cioè si può asserire che i numeri s_i, s_{ik}, ... sono affatto indipendenti da detta successione, perchè, quando un punto multiplo esistente sui lati $P'Q'$, $P'_1Q'_1$, ... non è adoperato, la sua composizione, per quanto ora vedemmo, rimane inalterata.

Dalle osservazioni del presente n. si trae una nuova conferma dell'essere i numeri s_i, s_{ik}, ... caratteri essenziali del punto multiplo.

14. — La definizione del genere di una curva con punti multipli qualunque è data ancora dalla (5) del n. 20, Cap. 9.°, nella quale però s'intenda che la somma è estesa a tutti i punti multipli *distinti* o *successivi*.

Il teorema di Riemann, dimostrato nel detto n. per due curve C, C′ con punti multipli ordinarî, si estende ora facilmente al caso che le due curve abbiano punti multipli qualunque. Infatti sia $C^{n^{(k)}}$ la curva, ottenuta da C dopo un certo numero k di trasformazioni quadratiche, fornita di soli punti multipli ordinarî: allora il numero $p_1^{(k)}$ relativa ad essa è proprio il suo genere $p^{(k)}$. D'altra parte la espressione di $p_1^{(k)}$ dedotta dalla (7), sostituendo per p_1 il suo valore (6) ed intendendo di aver poi attuata la scomposizione per gli altri punti t_i^{upli}, come per il punto s^{uplo}, è manifestamente il genere p di C secondo la definizione data sopra: quindi si ha intanto $p=p^{(k)}$. Analogamente, detto p' il genere di C′ e $p^{(l)'}$ il genere della sua trasformata, avente soli punti multipli ordinarî, si ha $p'=p^{(l)'}$. Ma le due trasformate di C, C′ si corrispondono birazionalmente (in quanto corrispondono birazionalmente alle C, C′ e queste, per ipotesi, fra loro): dunque $p^{(k)}=p^{(l)'}$ (n. 20 succitato [1])) e però $p=p'$.

---

[1]) Si noti che, prolungando la successione di trasformazioni quadratiche del n. 6, si può fare che, per le trasformate di C, C′ la corrispondenza, che ne deriva fra queste trasformate, sia tale che gli s punti corrispondenti ad un punto s^{uplo} (ordinario) di una sieno tutti distinti sull'altra (non giacciano in un altro punto

In simil modo si estendono le proprietà del n. 22, Cap. 9.°: vale a dire, avendosi $p=p^{(h)}$ ed essendo per questo n. $p^{(h)}\geq 0$, è pure $p\geq 0$, e, nel caso di $p=0$, cioè di $p^{(h)}=0$, risulta $C^{n^{(h)}}$ razionale e quindi anche C.

15. — La definizione di genere data nel n. precedente per una curva irriducibile si mantiene anche per una curva C composta di un numero qualunque (finito) g di curve irriducibili (distinte). In tal caso, se si indica con p il genere di C e con $p_1, p_2, \dots, p_g$ i generi delle sue g curve componenti, si ha

$$p+g-1=p_1+p_2+\dots+p_g\geq 0 .$$

Basta riferirsi di nuovo alla $C^{n^{(k)}}$, trasformata di C, con soli punti multipli ordinarï ed osservare che $C^{n^{(k)}}$ e le g curve di cui essa (come C) è composta hanno rispettivamente i generi $p, p_1, p_2, \dots, p_g$ (n. 14) [1]. Si applichino allora a $C^{n^{(k)}}$ le cose del n. 5, coll'avvertenza che i numeri ivi indicati con $p_1, p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{g1}$ sono ora appunto ordinatamente i numeri suddetti $p, p_1, p_2, \dots, p_g$ (per essere i punti multipli ordinarï) e che ora si ha $\sum_{hk}(n_h n_k - \sum_i \rho_{hi}\rho_{ki})=0$, perchè le g curve componenti $C^{n^{(k)}}$ presentano in ogni punto comune il caso semplice.

La precedente relazione (la sola eguaglianza) vale anche se le parti di C sono riducibili. Così, essendo π_t il genere della curva composta delle ultime $g-t+1$ parti, onde si ha $\pi_t+g-t=p_t+p_{t+1}+\dots+p_g$, da quella relazione segue

$$p+t-1=p_1+p_2+\dots+p_{t-1}+\pi_t .$$

16. — Consideriamo ora in un piano π un sistema lineare $|C|$ di curve piane di ordine n con punti base qualunque, e sia $|C'|$ il sistema lineare con soli punti base ordinarï a cui esso può ridursi per una successione di trasformazioni quadratiche (n. 7). Questa successione conduce a precisare il concetto dei punti base del sistema primitivo $|C|$. Se, ad es., dopo la 1.ª trasformazione quadratica (n. 6) si saranno trovati sopra $P'Q'$ dei punti s_i^{upli}, *che sieno punti base del sistema trasformato,* i loro cor-

---

multiplo). A questo caso si può quindi ridurre la dimostrazione di Schubert esposta in quel n. 20.

[1]) Il ragionamento di questo n. che conduce alla relazione $p=p^{(k)}$ è valido anche se C è riducibile.

rispondenti nel sistema primitivo si diranno pure punti base s_i^upli^ per questo, ed analogamente per i punti s_{ik}^upli^, ecc.. Sicchè per un sistema lineare $|C|$ dato si avranno a considerare soltanto punti base s_j^upli^ *distinti* o *successivi;* dei quali, volendo, si potrà considerare anche soltanto una parte, un gruppo, bene intendendosi che escludendo, ad es., il punto s_i^uplo^ restano pure esclusi i punti a questo successivi s_{ik}^upli^, e così i punti a questi successivi s_{ikl}^upli^, ... [1]. Si dirà anche qui *sistema completo rispetto ad un gruppo base* quello che non soddisfa ad altre condizioni oltre quelle date dai punti base del gruppo.

Intanto, se indichiamo con D il numero delle intersezioni di due curve generiche del sistema fuori dei punti s_j^upli^ del gruppo, si ha evidentemente (n. 11)

$$D = n^2 - \sum s_j^2 .$$

Poi diciamo dimensione virtuale di un sistema completo $|C|$ anche nel caso di punti base successivi il numero, già definito nel n. 5, Cap. 11.°,

$$\rho'_n = \binom{n+2}{2} - 1 - \sum \frac{s_j(s_j+1)}{2} ,$$

mentre la dimensione effettiva ρ_n è sempre il numero dei punti generici occorrenti ad individuare una curva del sistema. È facile vedere che *la dimensione virtuale di $|C|$ rispetto ad un gruppo di punti s_j^upli^ è la dimensione virtuale del sistema trasformato $|C'|$ rispetto al gruppo dei punti multipli ordinarî, che vengono a sostituirsi a questi punti s_j^upli^.*

La dimostrazione si fa imitando il ragionamento del n. 14. Riprendansi tutte le denominazioni ed i simboli del n. 6 e s'introduca il numero

$$q_1 = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \sum \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2}$$

(che sarebbe la dimensione virtuale se i punti distinti s^uplo^ e ρ_i^uplo^ fossero ordinarî). Dopo la 1.ª trasformazione quadratica il numero q'_1, analogo al

---

[1]) Insomma, ricorrendo al concetto della ramificazione (nota al n. 10), questa si arresterà a certi punti, trascurando tutti i prolungamenti che emanano da essi.

precedente, per la $C^{n'}$, è dato da

$$q'_1 = \frac{(2n-s)(2n-s+3)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{(n-s)(n-s+1)}{2} - \\ - \sum\frac{s_i(s_i+1)}{2} - \sum\frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2},$$

ossia da

$$q'_1 = q_1 - \sum\frac{s_i(s_i+1)}{2},$$

ove la somma (e lo stesso ripetasi per ciascuna delle altre somme analoghe che si presentano in appresso) deve essere estesa ai punti s_i upli che si vogliono considerare. Quindi, dopo un certo numero h di trasformazioni quadratiche, sostituito anche il valore superiore di q_1, si troverà

$$q_1^{(h)} = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \sum\frac{s_i(s_i+1)}{2} - \sum\frac{s_{ik}(s_{ik}+1)}{2} - \\ - \sum\frac{s_{ikl}(s_{ikl}+1)}{2} - \dots - \sum\frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2}.$$

Ripetendo la stessa cosa per ciascuno dei punti ρ_i upli, si arriva infine dopo un certo numero t di trasformazioni quadratiche, al sistema $|C'|$: ed allora il numero $q_1^{(t)}$ è proprio la dimensione virtuale di $|C'|$, mentre la sua espressione trovata è ciò che si è definito per dimensione virtuale di $|C|$.

Ne risulta la validità della formula di postulazione (1) del n. 5, Cap. 11.° in ogni caso, perchè prendendo abbastanza alto l'ordine del sistema $|C'|$, e conseguentemente abbastanza alto l'ordine del sistema $|C|$, quando restino fermi per quello i punti base ordinarî a cui si è giunti e conseguentemente per questo i punti base dati, la dimensione virtuale di $|C'|$ diventa la sua dimensione effettiva, e però tale diventa anche la dimensione virtuale di $|C|$, sempre eguale a quella.

Così restano dimostrate per punti base distinti o successivi le proprietà dei n. 5, 6, 7, Cap. 11.°.

17. — Facciamo un'ultima osservazione sopra un sistema lineare $|C|$ di cui si considerino *tutti* i punti base (distinti o successivi).

È ovvio che per un tal sistema la dimensione ρ_n ed il grado D sono invarianti per trasformazioni cremoniane. Invariante è pure il genere ρ (cfr n. 14): ed ora aggiungiamo che sono altresì invarianti per dette trasformazioni la dimensione virtuale ρ'_n la sovrabbondanza σ_n e la deficienza δ_n. Infatti, dalla (5) del n. 6, Cap. 11.°

$$D = \rho_n + p - \sigma_n - 1,$$

che vedemmo dianzi sussistere sempre, essendo D, ρ_n, p invarianti, segue che lo è anche σ_n e quindi $\rho'_n (= \rho_n - \sigma_n)$. Poi per un sistema incompleto si ha, invece della relazione precedente, la

$$D = \rho_n + p - \sigma_n + \delta_n - 1$$

dalla quale, tutti i numeri essendo stati dimostrati invarianti meno la deficienza δ_n, risulta che questa pure è invariante.

Capitolo 3.°

Sul principio di corrispondenza di Chasles. — Formula di Zeuthen. — Formule di Cayley e di Veronese.

1. — Per una corrispondenza (nn') fra due enti algebrici ∞^1 sono da considerare gli *elementi di diramazione* e gli *elementi multipli*. Un elemento di un ente dicesi di diramazione quando due o più dei suoi corrispondenti dell'altro ente coincidono e tali elementi di coincidenza sono gli elementi multipli. Un elemento di diramazione è *semplice* se due soli dei suoi corrispondenti coincidono ed allora l'elemento di coincidenza si dice *doppio*. Se i due enti sono razionali, e l'equazione della corrispondenza (nn') è

$$f(x\,y) = 0 \qquad (1)$$

(degli ordini n, n' in x, y rispettivamente), gli elementi di diramazione dell'ente dato dal parametro x si ottengono formando il discriminante della f considerata nella variabile y, discriminante che, essendo di ordine $2(n-1)$ nei coefficienti, risulta di ordine $2n'(n-1)$ nella x.

Ci proponiamo di ritornare appunto sull'argomento trattato nei n. 18, 19 del Cap. 9.° introducendo per una corrispondenza rappresentata dalla (1) la cosiddetta *curva della corrispondenza*. Riferiamo i due enti razionali a due fasci di rette di un piano di centri O, O', cioè assumiamo x, y come coordinate in questi fasci. Si può sempre supporre (facendo, ove occorra, una trasformazione proiettiva di ciascun fascio in sè) che nella corrispondenza fra i due fasci data dalla (1) la retta OO' non sia unita (corrispondente a sè stessa) e non sia di diramazione nè multipla.

La curva della corrispondenza è il luogo del punto comune alle rette corrispondenti dei due fasci. Se m è il suo ordine e k, k' sono le sue multiplicità nei punti O, O′, si ha $m = n' + k = n + k'$, perchè una retta generica per O (e similmente per O′) contiene fuori di O, n' punti del luogo, quelli in cui è incontrata dalle n' rette corrispondenti. Inoltre si ha $m = k + k'$, giacchè se quella retta generica tende a passare per O′, i detti n' punti tendono tutti a cadere in O′ su rette distinte fra loro e da OO′ (perchè la retta OO′ non è di diramazione nè unita), onde OO′ non conterrà punti del luogo fuori di O, O′ e non sarà in questi punti tangente al luogo stesso. Adunque, notando anche che, per aver escluso che OO′ sia retta multipla, ogni tangente nel punto O non ha ivi più di $n + 1$ punti col luogo (e analogamente in O′), si conclude che *la curva della corrispondenza è dell'ordine $n + n'$ ed ha i punti O, O′ rispettivamente n^{uplo}, n'^{uplo} ordinarî senza particolarità tangenziali* [1]).

2. — Consideriamo in particolare una corrispondenza $(n\,n')$ di un ente in sè, cioè supponiamo che i due enti dianzi considerati sieno sovrapposti. Trasportando la corrispondenza sopra una retta r (cioè interpretando il parametro che dà gli elementi dell'ente come coordinata in r) e proiettando poi da due punti O, O′ di un piano per r, tali che la retta OO′ non passi per alcun punto unito, multiplo o di diramazione della corrispondenza su r, si ottiene la curva della corrispondenza stessa.

Se la corrispondenza è simmetrica e sono X, X′ due punti corrispondenti della retta r, appartengono alla curva della corrispondenza tanto il punto I d'incontro di OX, O′X′ quanto il punto I′ d'incontro di OX′, O′X. La retta II′ taglia OO′ in un punto N, che (per la proprietà armonica del quadrangolo completo) è coniugato armonico rispetto ad O, O′ del punto d'intersezione di OO′ e di r ed è quindi fisso al variare della coppia dei punti corrispondenti X, X′. Se ne trae, per essere anche N ed r armonici rispetto ad I, I′, che *la curva di una corrispondenza simmetrica è omologico-armonica*, cioè trasformata in sè da una omologia armonica (di centro N ed asse r).

---

[1]) Tale curva ha l'equazione (1), quando si dia ad x, y il significato di coordinate di un punto di un piano (ad es. $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, cioè i punti O, O′ sieno i punti (001), (010)) e si premetta eventualmente una trasformazione lineare di ciascuna delle x, y.

3. — L'essere la curva della corrispondenza, che diremo Γ, segata dalla retta r in $n+n'$ punti esprime il principio di corrispondenza di Chasles (n. 18, Cap. 9.°): ma ora possiamo valerci della curva stessa per la determinazione della multiplicità di un punto unito.

Osserviamo che, avendosi una corrispondenza non simmetrica (nn') e dicendo X i punti di r proiettati da O ed X' quelli proiettati da O', se un punto X coincide in un punto U di r con *uno solo* dei suoi n' corrispondenti X', la retta OU sega Γ nel punto U, cioè U è semplice per Γ, ma come punto unito della corrispondenza può essere semplice o multiplo a seconda che Γ è segata o toccata in U dalla retta r. Però se, X coincidendo in U con un solo punto corrispondente X', accada che X' coincida in U con due (o più) dei suoi corrispondenti X, allora la retta O'U è essa tangente a Γ in U e quindi non può esserlo la r: onde U è punto unito semplice della corrispondenza.

Se X coincide in U con due dei suoi corrispondenti e la stessa cosa è di X', le OU, O'U hanno in U incontro bipunto con Γ e per conseguenza U è doppio per Γ, cioè ha (almeno) la multiplicità due come punto unito per la corrispondenza. Non è vera la reciproca, per ciò che vedemmo prima, salvo se la corrispondenza è simmetrica, perchè in questo caso la curva Γ è omologico-armonica (n. 2) e quindi una retta generica per il centro N di omologia la sega in coppie di punti armonici rispetto ad N ed all'asse r di omologia; cosicchè, se un punto di una coppia cade sull'asse, in esso deve cadere anche l'altro punto della stessa coppia, e però le rette che vanno dal centro di omologia N ai punti uniti U hanno ivi incontro (almeno) bipunto con Γ. Adunque, se U ha la multiplicità due per la corrispondenza, non solo la retta r ma anche la NU ha ivi incontro bipunto con Γ e però il punto U è doppio per Γ. [1])

4. — Ecco un'altra osservazione relativa alla multiplicità di un elemento unito, la quale ha frequenti applicazioni [2]).

Abbiansi due enti algebrici qualsiansi, anche non razionali, i cui elementi correnti sieno Y, Y', e fra di essi sia stabilita una corrispondenza $(\rho\rho')$. Supponiamo inoltre di avere due enti razionali, di cui sieno X, X'

---

[1]) Delle due osservazioni contenute in questo n. la seconda fu già dedotta dall'equazione della corrispondenza (n. 19, Cap. 9.°): ed è egualmente facile dall'equazione stessa dedurre la prima.

[2]) Ad es. nel n. 50 della Mem. di SEGRE citata nella nota al n. 7, Cap. 10.°

gli elementi correnti, tali che X sia in corrispondenza (1ν) con Y ed X' in corrispondenza $(1\nu')$ con Y'. Se si prendono come corrispondenti due elementi X, X' dei due enti razionali che corrispondano a due elementi Y, Y' corrispondenti fra loro, si vede facilmente che fra quei due enti razionali risulta stabilita una corrispondenza $(\nu'\rho, \nu\rho')$, ogni coppia (YY') della corrispondenza $(\rho\rho')$ producendo una ed una sola coppia (XX') della $(\nu'\rho, \nu\rho')$. Imaginiamo che i due enti razionali sieno sovrapposti e che vi sieno μ coppie *distinte* $(Y_1 Y'_1), (Y_2 Y'_2), \ldots, (Y_\mu Y'_\mu)$ della corrispondenza $(\rho\rho')$ [1], le quali dieno luogo tutte ad un medesimo elemento unito U della $(\nu'\rho, \nu\rho')$: dico che U *va contato almeno* μ *volte (e in generale solo* μ *volte) fra i punti uniti di questa corrispondenza*. Infatti, se supponiamo trasportata tale corrispondenza sopra una retta r e consideriamo la relativa curva della corrispondenza Γ, poichè le coppie successive a ciascuna delle dette μ coppie dànno origine, per l'ipotesi fatta, a μ successioni distinte, è chiaro che pure μ successioni distinte di punti di Γ partiranno dal punto U (rappresentante su r l'elemento U), vale a dire questo punto sarà origine almeno di μ rami di Γ, ossia sarà almeno μ^{uplo} per Γ, e però ecc..

5. — Un teorema di geometria infinitesimale, che dà con precisione in ogni caso la multiplicità di un elemento unito in una data corrispondenza di un ente in sè, è dovuto a Zeuthen. A questo teorema si arriva mediante la seguente interpretazione della multiplicità d'intersezione di un ramo di curva piana con una retta passante comunque per l'origine del ramo (cioè tangente o no al ramo).

Si prendano le coordinate cartesiane x, y e sia l'asse $x\,(y=0)$ la retta considerata, l'altro asse $y\,(x=0)$ formando con esso angolo qualunque. Se il ramo è dato dalle

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a t^{\beta} + \ldots & (a \neq 0) \\ y = a_1 t^{\beta_1} + \ldots & (a_1 \neq 0) \end{cases}$$

(ove, se nessuno degli assi è tangente al ramo, β è eguale a β_1 ed è l'ordine del ramo, mentre se l'asse x, ad es., è tangente al ramo, β è l'ordine e $\beta_1 - \beta$ la classe), una retta parallela all'asse y e ad una distanza infi-

[1]) Due coppie potendo avere un punto comune ed anche amendue gli elementi comuni, purchè questi sieno scambiati nel passaggio dall'una all'altra coppia (ad es. $Y_1 = Y'_2$, $Y_2 = Y'_1$).

nitesima ε da esso (misurata sull'asse x), cioè di equazione $x=\varepsilon$, incontra il ramo in β punti corrispondenti ai valori di t dati dalla

$$\varepsilon = at^{\beta} + \ldots$$

cioè, prendendo lo sviluppo inverso [1]), dati dalla

$$t = \frac{1}{a^{\frac{1}{\beta}}}\varepsilon^{\frac{1}{\beta}} + \ldots,$$

e quindi aventi, per la seconda delle (2), le y espresse dalla

$$y = \frac{a_1}{a^{\frac{\beta_1}{\beta}}}\varepsilon^{\frac{\beta_1}{\beta}} + \ldots .$$

Assunto ε come infinitesimo di 1.° ordine, vediamo che tali y sono infinitesime di ordine $\frac{\beta_1}{\beta}$ e quindi che la somma degli ordini d'infinitesimo di tutte queste y è $\beta\frac{\beta_1}{\beta}=\beta_1$, cioè *eguale alla multiplicità d'intersezione dell'asse x col ramo.*

Applicando ciò ad ogni ramo uscente da un punto multiplo M di una curva piana, e tenendo conto che l'ordine d'infinitesimo di un segmento finito è zero, si può adunque affermare che *la multiplicità d'intersezione in* M *di una retta r qualsiasi (passante per* M) *colla curva è data dalla somma degli ordini d'infinitesimo dei segmenti di un'altra retta r' infinitamente vicina ad* M *(e formante con r angolo finito) compresi fra r ed i punti in cui r' sega la curva, essendo infinitesimo di* 1.° *ordine il segmento di r compreso fra r' ed* M.

Ed ora abbiasi una corrispondenza (nn') trasportata sopra una retta r e sia U un suo punto unito. La multiplicità di U per la corrispondenza è data dalla multiplicità d'intersezione in U della r colla curva della corrispondenza Γ relativa a due punti O, O′ (n. 1): la quale multiplicità, prendendo un punto X di r infinitamente vicino ad U e considerando i punti d'intersezione M_1, M_2, ... del raggio OX (ad es.) con Γ, è, per il teorema che precede, la somma degli ordini di infinitesimo dei segmenti XM_1,

[1]) Cfr. Bianchi, *l. c.*, § 58.

$XM_2, \ldots$ preso XU come infinitesimo di 1.° ordine. Ma, se $X'_1, X'_2, \ldots$ sono i punti corrispondenti ad X cioè le intersezioni di r colle $O'M_1, O'M_2, \ldots$, dai triangoli $XM_1X'_1, XM_2X'_2, \ldots$ segue subito che ciascuno dei rapporti $\frac{XM_1}{XX'_1}, \frac{XM_2}{XX'_2}, \ldots$ tende ad un limite finito e diverso da zero (avendosi $\frac{XM_1}{XX'_1} = \frac{\operatorname{sen}(r, O'X'_1)}{\operatorname{sen}(OX, O'X'_1)}, \ldots$). Possiamo adunque concludere col teorema di Zeuthen: — *La multiplicità di un punto unito* U, *in una corrispondenza trasportata sopra una retta r, è la somma degli ordini di infinitesimo dei segmenti* $XX'_1, XX'_2, \ldots$ *compresi fra un punto* X *di r infinitamente vicino ad* U *ed i suoi corrispondenti* $X'_1, X'_2, \ldots$, *preso* XU *come infinitesimo di* 1.° *ordine* [1]).

6. — Sulle corrispondenze (nn') fra due enti ∞^1 si ha un altro teorema di Zeuthen, che non richiede alcuna determinazione di ordini di infinitesimi ed è una bella e utile generalizzazione del teorema di Riemann (cfr. n. 14, Cap. 2.° A.). Lo dimostreremo prima nel caso di due enti razionali, poi in quello (n. 8) di due enti qualunque.

Se fra gli elementi di due enti razionali ∞^1 si ha una corrispondenza algebrica (nn') e per ogni coppia (XX') di elementi corrispondenti si dice ν' il numero degli n' elementi corrispondenti ad X che cadono in X' e ν il numero degli n corrispondenti ad X' che cadono in X, ha luogo la relazione $\Sigma(\nu - \nu') = 2(n - n')$. Infatti, introdotta la curva della corrispondenza Γ, relativa a due punti O, O' (n. 1), scriviamo che è nulla la differenza fra il numero delle tangenti di Γ che partono da O ed il numero di quelle che partono da O'. Abbiamo n tangenti distinte in O ed n' in O', ciascuna delle quali conta per due (come segue dall'essere, per il citato n. 1, ciascuno dei rami uscenti da O, O' di 1.° ordine e di 1.ª classe) e però si ha intanto la differenza $2(n - n')$. Poi la retta congiungente O con un punto P s^{uplo} (s anche $= 1$) di Γ ha in P, per ogni ramo di ordine α e di classe α_1, multiplicità d'intersezione α ovvero $\alpha + \alpha_1$

[1]) Vedasi Zeuthen: *Note sur le principe de correspondance* (Bullettin de sciences math., 5, 1873, pag. 186). Il teorema fu esteso, mediante la rappresentazione dei rami di curva data nel Cap. 1.° A., alle corrispondenze sopra curve di genere qualunque nella Memoria di Zeuthen, *Nouvelle démonstration du principe de correspondance...* (Math. Ann., 40, 1892): di che, oltre le applicazioni date da Zeuthen, possono vedersi ad es. quelle contenute nella Memoria di Severi, *Sopra alcune singolarità delle curve in un iperspazio* (Mem. Accad. Torino, 50 (2), 1901).

secondochè OP non è od è tangente al ramo, e corrispondentemente è 0 ovvero α_1 la multiplicità tangenziale della OP (cioè il numero delle tangenti al ramo per O che cadono in essa). Sommando per tutti i rami partenti da P, si trova che la multiplicità d'intersezione in P di OP e Γ è s accresciuto della multiplicità di OP come tangente di Γ, e d'altra parte quella multiplicità d'intersezione è pure ν', alla OP corrispondendo per ipotesi ν' raggi O'P. Analogamente per la O'P. La differenza $\nu'-\nu$ è adunque la differenza di multiplicità tangenziale di OP, O'P in quanto possono essere tangenti in P a Γ; e quindi si ha $2(n-n')+\Sigma(\nu'-\nu)=0$, come si voleva [1].

7. — Dalla proprietà dimostrata si trae subito una nuova definizione del genere di una curva piana algebrica C (e però di qualsiasi ente algebrico ∞^1).

Consideriamo sopra una tal curva due serie lineari semplicemente infinite, i gruppi generici delle quali contengano rispettivamente m, n punti tutti variabili (cfr. n. 16, Cap. 10.°), serie che indicheremo con g^1_m, g^1_n; e facciamo corrispondere due gruppi di queste serie quando hanno comune un punto, supponendo che le serie sieno tali che due loro gruppi per un punto generico non ne abbiano di conseguenza altri in comune. La corrispondenza fra le due serie, che sono due totalità razionali ∞^1 di gruppi, è manifestamente una (nm), e due gruppi che abbiano comune un punto μ_1^{uplo} per la g^1_m e ν_1^{uplo} per la g^1_n, poi un punto μ_2^{uplo} per quella e ν_2^{uplo} per questa, ... sono due elementi corrispondenti così che ad uno (della prima totalità) corrispondono $\mu_1+\mu_2+\ldots$ elementi coincidenti nell'altro (della seconda) e a questo $\nu_1+\nu_2+\ldots$ elementi coincidenti in quello. Per ciò che fu dimostrato nel n. 6 deve adunque aversi

$$\sum(\nu_1-\mu_1+\nu_2-\mu_2+\ldots)=2(n-m),$$

estesa la somma a tutti i gruppi corrispondenti. Tale somma, cioè brevemente $\Sigma(\nu-\mu)$, si può anche scrivere $\Sigma[(\nu-1)-(\mu-1)]$, ed allora si può prescindere da tutti quei valori delle ν, μ che sono $=1$. Si ha

[1]) Per le cose di questo n. e dei due seg. cfr. Zeuthen, *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., 10, 1876), e *Sur un groupe des théorèmes et formules de la géométrie énumérative* (Acta mathem., 1, 1882).

quindi infine

$$\sum(\nu-1)-2n=\sum(\mu-1)-2m,$$

le ν indicando tutte le multiplicità della g^1_n e le μ tutte quelle della g^1_m. Ciò dimostra che *il numero* $\Sigma(\nu-1)-2n$ *relativo ad una* g^1_n *non dipende affatto da essa.*

È poi facile vedere che *il numero stesso è* $=2p-2$, *se* p *è il genere di* C: onde quel numero è pari e ne risulta una nuova definizione del genere, come sopra dicemmo. Basta avvertire che per una trasformazione birazionale di C una g^1_n si trasforma pure in una g^1_n ed un punto ν^{uplo} di quella in un punto pure ν^{uplo} di questo, sicchè il detto numero $\Sigma(\nu-1)-2n$ rimane invariato, e trasformare poi C in una curva con soli punti multipli ordinarî (n. 6, Cap. 2.° A.). Se questa curva è di ordine n, un fascio generico di rette la sega in una g^1_n con soli punti doppî, il cui numero è la classe, e però (n. 20, Cap. 9.°) si ha allora $\Sigma(\nu-1)-2n=$ $=n(n-1)-\Sigma s_i(s_i-1)-2n=(n-1)(n-2)-\Sigma s_i(s_i-1)-2=2p-2$.

Qualsiasi la curva C, se una sua g^1_n ha solo punti doppî, $\Sigma(\nu-1)$ è il numero di questi punti doppî. Se si vuol parlare in ogni caso soltanto di punti doppî bisogna ritenere un punto ν^{uplo} come equivalente a $\nu-1$ punti doppî ed allora si può dire che *il numero* d *degli elementi doppî di una* g^1_n *di una curva di genere* p *è dato dalla formula*

$$d=2(n+p-1) \quad [1].$$

---

[1] Una curva qualunque sia di ordine n e classe m ed abbia rami di ordine α e classe α_1. Se si considera su di essa la serie segata dalle rette di un fascio generico e si nota che di tale serie sono punti $(\alpha-1)^{\text{upli}}$ le origini dei rami di ordine α, dalle cose esposte segue

$$m+\Sigma(\alpha-1)=2(n+p-1)$$

e correlativamente

$$n+\Sigma(\alpha_1-1)=2(m+p-1):$$

dalle quali, eliminando p od m, si ricavano le altre

$$\Sigma(\alpha-\alpha_1)=3(n-m)$$

$$\Sigma(2\alpha+\alpha_1-3)=3(n+2p-2).$$

Queste formule, nelle quali la sommatoria va estesa a tutti i rami che non hanno

8. — Abbiansi due enti ∞^1 di generi p, p' in corrispondenza $(x x')$. Possiamo riferire birazionalmente i due enti a due curve piane, anzi a due tali curve C, C' aventi soltanto punti multipli ordinarî (per il teorema del n. 6, Cap. 2.° A. già più volte applicato), e su queste considerare la suddetta corrispondenza, di cui si diranno η_i^{npli} i punti multipli sopra C, cioè i punti in cui cadono η_i degli x punti corrispondenti ad un punto di C' e $\eta_i'^{\text{npli}}$ i punti multipli sopra C'. Se C, C' sono degli ordini n, n', due fasci di rette generici segneranno su di esse due serie $g_n^1, g_{n'}^1$, le quali non avranno che punti doppî e questi in punti generici, non in punti singolari della data corrispondenza.

Ora per giungere al teorema di Zeuthen, del quale è caso particolare quello del n. 6, si potrebbe applicare appunto questo caso alla corrispondenza $(n'x, nx')$ che si ha fra le due serie $g_n^1, g_{n'}^1$, riguardando come omologhi due gruppi contenenti punti omologhi della data corrispondenza $(x x')$.

Ma si può procedere più semplicemente così. Si consideri l'ente ∞^1 (o curva, secondo il n. 15, Cap. 9.°) che diremo Γ, dato dalle coppie di punti omologhi della corrispondenza $(x x')$, e si osservi che Γ è in corrispondenza $(n x', 1)$ colla g_n^1, perchè ognuna di quelle coppie dà un solo punto di C e quindi un solo gruppo di g_n^1, mentre ogni gruppo di questa dà $n x'$ coppie (costituite dai punti di quel gruppo e dai loro corrispondenti sopra C'). Quindi sopra Γ la g_n^1 ha per corrispondente una serie lineare $g_{nx'}^1$ [1]). Parimenti fra Γ e $g_{n'}^1$ si ha una corrispondenza $(n'x, 1)$ e

---

$\alpha = \alpha_1 = 1$, aggiunta la relazione che esprime l'eguaglianza dei generi della curva e del suo inviluppo aderente, sono le formule di Plücker (già indicate sotto altra forma nella nota al n. 11, Cap. 2.° A.). Confrontando la prima delle presenti formule colla prima di quelle della citata nota (e ricordando che $2p = (n-1)(n-2) - \Sigma s_j(s_j - 1)$), si vede che $\delta = \Sigma(\alpha - 1)$, cioè *il numero dei punti di diramazione definito in detta nota è precisamente la somma* $\Sigma(\alpha - 1)$ *estesa a tutti i rami della curva* (*di ordine* $\alpha > 1$); e correlativamente. Cfr. per altre conseguenze delle suddette formule il n. 39 della Mem. di Segre citata nella nota al n. 7, Cap. 10.°.

[1]) Se z è il parametro che dà uno ad uno i gruppi della $g^1{}_n$ e y_i le coordinate di un punto della curva Γ, per la detta corrispondenza $(n x', 1)$ sarà z una funzione razionale delle y_i, cioè

$$z = \frac{\varphi(y_i)}{\psi(y_i)}$$

quindi su Γ un'altra serie lineare $g^1_{n'x}$ corrispondente a $g^1_{n'}$. Eguagliamo fra loro le espressioni, relative alle due serie $g^1_{nx'}$, $g^1_{n'x}$ di Γ, analoghe alla $\Sigma(\nu-1)-2n$ del n. 7. Un gruppo $G_{nx'}$ di $g^1_{nx'}$ proveniente da un gruppo G_n di g^1_n avrà elementi multipli: 1.° o perchè coincidono due degli n punti di G_n, onde risultano x' elementi doppî in $G_{nx'}$ e quindi, essendo, per il n. 7, $2(n+p-1)$ il numero dei punti doppî di g^1_n, si hanno in tutto $2x'(n+p-1)$ elementi doppî di $g^1_{nx'}$: 2.° o perchè, pur essendo distinti gli n punti di G_n, uno di essi ha η' dei suoi x' punti corrispondenti (sopra C′) coincidenti, il che dà origine ad un elemento η'^{uplo} di $G_{nx'}$ e così si ha il contributo $\Sigma(\eta'-1)$ alla suindicata somma $\Sigma(\nu-1)$. Determinando similmente gli elementi multipli della $g^1_{n'x}$, l'applicazione della proprietà del n. 7 conduce alla relazione [1])

$$2x'(n+p-1)+\sum(\eta'-1)-2nx'=2x(n'+p'-1)+\sum(\eta-1)-2n'x,$$

ovvero

$$\sum(\eta'-1)-\sum(\eta-1)=2x(p'-1)-2x'(p-1).$$

---

ove le φ, ψ sono forme nelle y_i dello stesso grado. Ne segue

$$\psi(y_i)-z\varphi(y_i)=0,$$

che, al variare di z, rappresenta un fascio d'ipersuperficie che sega su Γ la $g^1_{nx'}$. Del resto questa semplice considerazione prova in generale che sopra un ente algebrico ∞^1 una serie lineare g^1_m è caratterizzata: 1.° dall'essere razionale (cioè dall'ottenersi i gruppi, uno ad uno, coi valori di un parametro): 2.° dalla proprietà che un elemento generico dell'ente esiste in un solo gruppo (cfr. Segre, n. 30 della Mem. citata nella nota al n. 7, Cap. 10.°).

[1]) Seguendo l'altro procedimento accennato (cioè applicando il n. 6), oltre a due casi analoghi a quelli del testo, occorre considerarne altri tre. Vale a dire, ad un gruppo di g^1_n composto di n punti distinti A, B, ... corrispondendo gli nx' gruppi di $g^1_{n'}$ passanti per gli nx' punti, omologhi di quelli, $A_1, A_2, \ldots, A_{x'}$, $B_1, B_2, \ldots, B_{x'}, \ldots$ ($A_1, A_2, \ldots, A_{x'}$ omologhi di A, ecc.), può avvenire che (ad es.) un punto A_i e un punto B_i coincidano, ovvero, non coincidendo, sieno in un gruppo della $g^1_{n'}$ o sieno in un tal gruppo due punti A_i. In ognuno di questi tre casi si ottiene in $g^1_{n'}$ un gruppo doppio, ma a questo corrisponde pure un gruppo doppio di g^1_n (precisamente al primo caso corrisponde il terzo e al secondo sè stesso) e però la considerazione di questi tre casi non ha influenza sulla somma $\Sigma(\nu-\nu')$ del n. 6.

Adunque *ha luogo questa relazione quando due enti algebrici* ∞^1 *dei generi* p, p' *sieno in corrispondenza* $(x\,x')$ *e sieno* η^{upli} *gli elementi multipli del primo ente ed* η'^{upli} *quelli del secondo* (che, per $p=p'=0$, è il teorema del n. 6). Se di un elemento di diramazione del 1.° ente corrispondente ad un elemento η'^{uplo} del 2.° si dice che è *di ordine* $\eta'-1$, sarà $\Sigma(\eta'-1)$ la somma degli ordini degli elementi di diramazione del 1.° ente e similmente $\Sigma(\eta-1)$ la somma degli elementi di diramazione del 2.°, e si avrà un altro significato della formula trovata.

Nel caso che la corrispondenza ammetta soltanto y', y punti *doppî* rispettivamente per il 1.° e 2.° ente, cioè y, y' punti di diramazione *semplici*, la formula stessa diventa

$$y-y'=2x(p'-1)-2x'(p-1),$$

che è la *formula di Zeuthen*. In questa si può ritenere contenuta la precedente data da Halphen [1]), riguardando un punto di diramazione di ordine $\eta-1$ come equivalente ad $\eta-1$ punti di diramazione semplici.

9. — Se $x'=1$, non esistono le η', cioè $y=0$, e dalla formola di Zeuthen segue

$$y'=2(p-1)-2x(p'-1):$$

cosicchè, se si suppone inoltre $p=p'>1$, per essere $y'\geq 0$, deve aversi $x=1$. Adunque *fra due curve dello stesso genere* >1 *non può esservi una corrispondenza algebrica la quale sia razionale in un solo senso.*

Altra conseguenza della formula di Zeuthen è la seguente. Considerisi sopra una curva di genere p una totalità ∞^1, di genere p', di gruppi di x punti, tale che ogni punto stia in un solo gruppo. Fra i punti della curva ed i gruppi della totalità vi è una corrispondenza $(x\,1)$ e quindi dalla formula sopra scritta segue che *la totalità* ∞^1 *considerata ammette* $2(p-1)-2x(p'-1)$ *punti doppî*, ben inteso computando un punto ν^{uplo} come $\nu-1$ punti doppî. Se $p'=0$ si ricade nell'ultimo risultato del n. 7, e se inoltre $p=0$ si ha un risultato trovato per altra via nel n. 10, Cap. 10.°.

10. — La formula ultima del n. 7 fornisce altre formule notevoli per una curva C, appartenente ad S_r, di genere p, di ordine n, ranghi

1) HALPHEN, *Sur les corréspondances entre les points de deux courbes* (Bulletin de la Soc. Math. de France, 5, 1877).

$n_1, n_2, \ldots, n_{r-2}$ e classe n_{r-1} (n. 10, Cap. 1.° A.), e dotata di singolarità qualunque, ossia avente rami di qualunque specie $O(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{r-1})$. Si hanno cioè le formule seguenti [1])

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{llllll} \sum(\alpha-1) & & +n_1 & -2n & =2p-2 \\ \sum(\alpha_1-1) & +n & +n_2 & -2n_1 & =2p-2 \\ \sum(\alpha_2-1) & +n_1 & +n_3 & -2n_2 & =2p-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum(\alpha_{r-2}-1) & +n_{r-3} & +n_{r-1} & -2n_{r-2} & =2p-2 \\ \sum(\alpha_{r-1}-1) & +n_{r-2} & & -2n_{r-1} & =2p-2. \end{array}\right.$$

Per dimostrare l'ultima formula si considera l' ∞^1 degli S_{r-1} osculatori a C ed in essa la serie $g^1_{n_{r-1}}$ (cfr. nota prima al n. 8) dei gruppi di tali S_{r-1} che escono da uno stesso punto di una retta generica l. In questa serie è α_{r-1}uplo l'iperpiano O_{r-1} osculatore di un ramo, perchè in esso (n. 8, Cap. 1.° A.) cadono α_{r-1} iperpiani osculatori per il punto d'incontro di l ed O_{r-1} (esterno all'O_{r-2} osculatore del ramo) e sono doppî gli S_{r-1} tangenti alla V_{r-1} osculatrice (n. 10, Cap. 1.° A.) lungo gli n_{r-2} S_{r-2} di questa incontranti l (in quanto ogni tale S_{r-2} è intersezione di due S_{r-1} osculatori successivi). Similmente si dimostra la penultima formula considerando l' ∞^1 degli S_{r-2} osculatori di C ed in essa la $g^1_{n_{r-2}}$ dei gruppi di tali S_{r-2} che incontrano una stessa retta di un fascio generico: nella qual serie è α_{r-2}uplo l'O_{r-2} osculatore di un ramo, perchè esso ha questa multiplicità nella V_{r-1} osculatrice, sono doppî gli S_{r-2} tangenti alla V_{r-2} osculatrice lungo gli n_{r-3} S_{r-3} di questa incontranti il piano del fascio e sono pure doppî gli S_{r-2} di contatto per la V_{r-1} osculatrice degli n_{r-1} S_{r-1} che partono dal centro del fascio (n. 10, ora citato). Così la terzultima formola si dimostra considerando nella ∞^1 degli S_{r-3} osculatori la $g^1_{n_{r-3}}$ dei gruppi che incontrano uno stesso S_2 di un fascio generico: ecc..

Moltiplicando le (3) rispettivamente per $r, r-1, r-2, \ldots, 2, 1$ e

---

[1]) Per $r=2$ sono le due prime della nota al n. 7.

sommando si ha

$$\sum\left[r\alpha+(r-1)\alpha_1+(r-2)\alpha_2+\ldots+\alpha_{r-1}-\frac{r(r+1)}{2}\right]=(r+1)(n+rp-r).$$

11. — Nel termine generale della somma che compare nel 1.° membro di questa relazione un punto generico $(1,\ldots,1)$ non influisce, mentre un punto $(1,\ldots,1,2)$, punto di contatto di un ordinario iperpiano stazionario (iperosculatore), influisce di 1. Dalla detta relazione si ha adunque l'importante conseguenza: — *Per una curva di ordine n e genere p, appartenente ad S_r, il numero degli iperpiani stazionarî è $(r+1)(n+rp-r)$, ogni ramo singolare $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{r-1})$ abbassando questo numero di $r\alpha+(r-1)\alpha_1+$ $+\ldots+\alpha_{r-1}-\dfrac{r(r+1)}{2}$ unità.*

Ne discende che *per una curva di ordine n e genere p, appartenente ad S_r, il k^{esimo} rango n_k, cioè l'ordine della V_{k+1} luogo degli S_k osculatori è dato da $(k+1)(n+kp-k)$ diminuito di $\sum\left[k\alpha+(k-1)\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}-\dfrac{k(k+1)}{2}\right]$, la somma essendo estesa a tutti i rami singolari $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{r-1})$.* Basta proiettare la curva da un S_{r-k-1} sopra un S_k e notare che la curva proiezione è d'ordine n e genere p, con rami $(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_k)$, e che gli S_k osculatori della curva obbiettiva incontranti S_{r-k-1} si proiettano in S_{k-1} stazionarî per la curva proiezione, onde n_k è il numero di questi.

La curva abbia soltanto elementi *stazionarî (iperosculatori) ordinarî*, ossia ρ cuspidi, ρ_1 flessi,..., ρ_k spazî S_k stazionarî (cioè ad incontro $(k+1)^{\text{punto}}$) ..., ρ_{r-1} S_{r-1} stazionarî, così che l'S_k $(k=1,\ldots,r-1)$ spetti ad un ramo, di cui il k^{esimo} rango (ordine per una cuspide) sia $=2$ e gli altri $=1$. Allora si ha per il numero degli iperpiani stazionarî

$$\rho_{r-1}=(r+1)(n+rp-r)-r\rho-(r-1)\rho_1-(r-2)\rho_2-\ldots-2\rho_{r-2},$$

e per il k^{esimo} rango

$$n_k=(k+1)(n+kp-k)-k\rho-(k-1)\rho_1-(k-2)\rho_2-\ldots-2\rho_{k-2}-\rho_{k-1}.$$

Se non ci sono cuspidi, flessi, ..., S_{r-2} stazionarî si ha semplicemente $\rho_{r-1}=(r+1)(n+rp-r)$, $n_k=(k+1)(n+kp-k)$. Così in generale le curve razionali d'ordine n dei varî spazî hanno come ranghi successivi (fino al numero degli iperpiani stazionarî): $2(n-1)$, $3(n-2)$, ..., $(k+1)(n-k)$,...;

ed invece le curve ellittiche ($p=1$) d'ordine n hanno i successivi ranghi $2n, 3n, \ldots, (k+1)n, \ldots$. La C^n ellittica appartenente ad S_{n-1} ha n^2 iperpiani stazionarî.

12. — Nell'ipotesi di soli *elementi stazionarî ordinarî*, mantenute le indicazioni suddette, possiamo ora aggiungere ai risultati dei due n. precedenti altre formule che furono dimostrate nell'S_3 da Cayley [1]) applicando le formule di Plücker, e furono poi estese all'S_r, seguendo lo stesso metodo, da Veronese [2]).

Per chiarezza ci occuperemo prima delle formule di Cayley. Sia in S_3 la curva C, di ordine n, rango n_1 e classe n_2, con ρ punti stazionarî (211), ρ_1 tangenti stazionarie o flessi (121) e ρ_2 piani stazionarî o rami (112). Sia poi h il numero dei punti doppî apparenti di C, cioè il numero delle sue corde o bisecanti per un punto generico, e, quando C oltre le ρ cuspidi avesse nodi, il numero di questi s'includa in h; sicchè h sieno le generatrici nodali di un cono proiettante generico. Sia ancora b il numero delle bitangenti apparenti di C, cioè dei piani bitangenti per un punto, includendo in b il numero delle rette bitangenti che C eventualmente ammetta, onde sarà b il numero dei piani bitangenti (o piani tangenti doppî) del detto cono proiettante. Sieno in fine η, β i numeri correlativi ad h e b: cioè η il numero delle rette di un piano generico per ciascuna delle quali passano due piani osculatori a C in punti distinti (*assi* di C), comprese le traccie in quel piano dei piani biosculatori di C quando ne esistono; e β il numero dei punti di un piano generico, ciascuno dei quali è comune a due tangenti di C in punti distinti, comprese le traccie delle rette bitangenti (sopra incluse pure in b) quando ve ne sono: cosicchè sono η e β il numero delle tangenti doppie e il numero dei punti doppî della sezione fatta con un piano generico nella V_2 sviluppabile osculatrice di C (luogo delle sue tangenti).

---

[1]) *Mémoire sur les courbes à double courbure...* (Journal de Math. de Liouville, 10, 1845).

[2]) Cfr. la Memoria citata nella prefazione (come pure la notizia preliminare: *Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen...* (Math. Ann. 18, 1881)). Anche le due ultime formule (n. 11) si trovano in questa Memoria, ma i risultati dei n. 10, 11, nella generalità nella quale furono presentati, sono dovuti a Segre. Per precise indicazioni bibliografiche e anche per altre osservazioni e applicazioni vedasi il § 11 (ove è da porre $i_t = a + \alpha_1 + \ldots + \alpha_t$) della Memoria di Segre citata nella nota al n. 7, Cap. 10.

Non resta più che osservare essere il surricordato cono proiettante di ordine n, di classe n_1, avere ρ generatrici cuspidali ed $n_2+\rho_1$ piani d'inflessione e correlativamente la nominata sezione essere di ordine n_1, di classe n_2, avere ρ_2 flessi ed $n+\rho_1$ cuspidi, per scrivere le formule (una terna deducendosi dall'altra per dualità spaziale)

$$(4)\qquad \begin{cases} n_1 = n\,(n-1) - 2h - 3\rho \\ n = n_1(n_1-1) - 2b - 3\,(n_2+\rho_1) \\ 3\,n_1 - 3\,n = n_2 + \rho_1 - \rho \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} n_1 = n_2\,(n_2-1) - 2\eta - 3\rho_2 \\ n_2 = n_1\,(n_1-1) - 2\beta - 3\,(n+\rho_1) \\ 3\,n_1 - 3\,n_2 = n + \rho_1 - \rho_2 \end{cases}$$

che sono le formule di Plücker (cfr. le note al n. 11, Cap. 2.° A. e al n. 7) applicate rispettivamente al cono e alla sezione. Sottraendo membro a membro le seconde, le terze e poi le prime delle due terne (4), (5) si hanno queste altre relazioni

$$(6)\qquad \begin{cases} b-\beta = n-n_2 \\ \rho-\rho_2 = 2\,(n-n_2) \\ h-\eta = \dfrac{1}{2}\,(n-n_2)\,(n+n_2-7)\,. \end{cases}$$

Colle dimostrate formule (di Cayley), conoscendo 4 *convenienti* dei 10 caratteri introdotti, si calcolano gli altri 6. Così nelle prime delle (4), (5) e in ciascuna delle (6) comparendo quattro soli caratteri questi non possono essere dati arbitrariamente [1]: invece, dati ad es. n, h, ρ, ρ_1, si trovano gli altri.

13. — Aggiungiamo alle precedenti anche la formula

$$\chi = \tau + n - 2$$

---

[1] Così pure non possono essere dati arbitrariamente n_2, ρ, ρ_1, β, nè (quindi) i loro correlativi n_1, ρ_2, ρ_1, b, perchè dalle (4), (5) deduconsi le relazioni

$$n_1(n_1-4) - 2\rho_1 = 2\beta + \rho = 2b + \rho_2$$

(cfr. ZEUTHEN, *Sur les singularités des courbes* ... (Comptes rendus, 67, 1868, pag. 225).

ove χ ($\leq h$) indica il numero dei punti doppî apparenti (cioè delle còrde o bisecanti) da un punto generico O di S_3 per una curva irriducibile qualunque C di ordine n, e τ il numero dei punti doppî apparenti (cioè delle trisecanti) da un punto generico P di C. Si dimostrerà che sono eguali i numeri χ e $\tau + n - 2$, provando che entrambi dànno la multiplicità della retta OP come direttrice della rigata algebrica che è luogo delle $\binom{n-1}{2}$ rette congiungenti a due a due gli $n-1$ punti d'incontro di C (fuori di P) con un piano variabile per la retta OP; delle quali rette, quando il piano passa per un punto s^{uplo} di C, cadono $\binom{s}{2}$ in altrettante corde (improprie) relative al punto s^{uplo} (n. 24, Cap. 9.°). La detta multiplicità è il numero delle generatrici della rigata che escono da O ovvero il numero di quelle che escono da P, perchè, condotta una retta generica per O o per P, l'ordine della rigata si ottiene accrescendo l'uno o l'altro numero sempre di $\binom{n-1}{2}$. Ora da O partono χ generatrici, mentre quelle che partono da P sono le τ trisecanti e le $n-2$ rette che provengono dal piano per OP tangente in P a C, cioè che uniscono P alle rimanenti $n-2$ intersezioni del piano stesso con C.

14. — Dimostriamo infine le formule di Veronese. La curva C appartenente ad S_r abbia l'ordine n ed i successivi ranghi $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ (classe) e possegga ρ cuspidi, ρ_1 flessi, ..., ρ_k spazî S_k stazionarî, ..., ρ_{r-1} S_{r-1} stazionarî, ordinarî, come già si disse a principio del n. 12.

Inoltre, fissato un S_{r-k-3} generico e per esso un S_{r-k} generico, sia d_k ($k=0, 1, \ldots, r-2$) il numero delle coppie di S_k osculatori di C, tali che i due S_{r-2}, proiettanti dall'S_{r-k-3} i due S_k di ciascuna coppia, sieno segati dall'S_{r-k} nello stesso S_{r-k-2}, comprendendo in d_k il numero degli S_k biosculatori (osculatori in due punti distinti di C): in particolare, fissato un S_{r-3} generico, sia d_0 il numero delle coppie di S_0 di C tali che i due S_0 di una coppia sieno proiettati dall'S_{r-3} collo stesso S_{r-2}, computando in d_0 i punti doppî effettivi (non le cuspidi) di C, ..., e sia, fissato un S_2 generico, d_{r-2} il numero delle coppie di S_{r-2} osculatori di C tali che due S_{r-2} di una coppia seghino l'S_2 nello stesso S_0, compresi gli S_{r-2} biosculatori (non quelli stazionarî).

Si hanno per $d_0, d_1, \ldots, d_{r-2}$ altri significati equivalenti. Proiettiamo la V_{k+1} sviluppabile osculatrice di C dal suddetto S_{r-k-3} sopra un S_{k+2}:

poichè l'S_{r-k-2}, sezione dell'S_{r-k} coi due S_{r-2} congiungenti S_{r-k-3} ai detti due S_k osculatori, è spazio proiettante ed ha con ciascuno dei due S_k osculatori un punto comune (l'S_{r-k-2} ed un S_k giacendo in un S_{r-2}), è chiaro che la traccia dell'S_{r-k-2} stesso sopra S_{k+2} è un punto doppio della proiezione di V_{k+1}. Di tali punti doppî in un S_2 generico di S_{k+2} stanno appunto d_k, cioè *questo è l'ordine della varietà doppia (di dimensione k) della proiezione della* V_{k+1}, perchè l'S_2 congiunto coll'S_{r-k-3} dà un S_{r-k} generico, al quale competono, per la definizione data sopra, d_k coppie degli S_k osculatori considerati. Si può anche dire, quando si pensi alla sezione $C^{(k)}$ della V_{k+1} coll'S_{r-k} ora nominato, che $d_0, d_1, \dots, d_{r-2}$ *sono rispettivamente il numero dei punti doppî apparenti ed effettivi (non cuspidi) di* C *e delle curve* $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r-2)}$, *sezioni delle* $V_2, V_3, \dots, V_{r-1}$.

Ai concetti precedenti corrono paralleli i concetti correlativi. Vale a dire, fissato un S_{r-k+1} generico ed in esso un S_{r-k-2} generico, sia δ_k ($k = 1, 2, \dots, r-1$) il numero delle coppie di S_k osculatori di C, tali che i due S_1, sezioni coll'S_{r-k+1} dei due S_k di ciascuna coppia, sieno proiettati dall'S_{r-k-2} collo stesso S_{r-k}, comprendendo in δ_k il numero degli S_k biosculatori (quello stesso che già si è incluso in d_k): in particolare, fissato un S_{r-3} generico, sia δ_1 il numero delle coppie di S_1 tangenti, tali che dall'S_{r-3} sieno proiettati secondo uno stesso S_{r-1}, cioè, come si dice, δ_1 il numero delle bitangenti apparenti, comprese quelle effettive (non le tangenti di flesso),..., e sia, fissato un S_2 generico, δ_{r-1} il numero delle coppie di S_{r-1} osculatori aventi la stessa traccia su quell'S_2, compresi gli S_{r-1} biosculatori (non gli S_{r-1} stazionarî). Ci basterà dei numeri $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{r-1}$ rilevare quest'altro significato. Se seghiamo la V_k sviluppabile osculatrice col detto S_{r-k+1} generico si ha una $C^{(k-1)}$, di cui due punti sono dati dai due S_{k-1} osculatori di C aventi gli stessi punti di contatto dei due S_k osculatori di una coppia sunnominata ed i due S_1 traccie di questi due S_k (i quali S_1, per la definizione superiore, sono proiettati dall'S_{r-k-2} collo stesso S_{r-k}) sono le tangenti a $C^{(k-1)}$ in quei due punti (ultimo alinea del n. 10, Cap. 1.° A.). Dunque $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{r-1}$ (corrispondenti per dualità a $d_{r-2}, d_{r-3}, \dots, d_0$) *sono rispettivamente il numero delle bitangenti apparenti ed effettive (non le tangenti di flesso) di* C *e delle curve* $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r-2)}$ [1].

Ciò premesso, applichiamo alle proiezioni piane delle $C, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r-2)}$

---

[1]) Per $r = 2$, i numeri $d_0, d_1, \delta_1, \delta_2$ sono ordinatamente i numeri h, β, b, η del n. 12.

le formule di Plücker. In primo luogo è chiaro che la proiezione piana di C è d'ordine n, classe n_1 (perchè un S_{r-2} proiettante incontra altrettante tangenti), ha d_0 punti doppî, ρ cuspidi, δ_1 tangenti doppie e $n_2+\rho_1$ flessi (perchè, oltre ai ρ_1 S_{r-1} proiettanti che vanno alle tangenti di flesso, si hanno n_2 S_{r-1} proiettanti che contengono S_2 osculatori, in quanto l'S_{r-3} di proiezione incontra V_3 in n_2 punti): quindi si ha

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} n_1 &= n(n-1)-2d_0-3\rho \\ n &= n_1(n_1-1)-2\delta_1-3n_2-3\rho_1 \\ 3n_1-3n &= n_2+\rho_1-\rho\,. \end{aligned}\right.$$

Similmente si ha che la proiezione piana di $C^{(k)}$, sezione di V_{k+1} con un S_{r-k} generico ($k=1\,,2\,,\ldots,r-3$), è d'ordine n_k, di classe n_{k+1}, possiede d_k punti doppî, ρ_k+n_{k-1} cuspidi (perchè, in virtù del succitato n. 10, l'S_{r-k} segante incontra V_k in n_{k-1} punti di regresso e i ρ_k S_k stazionarî pure in punti di regresso di $C^{(k)}$), δ_{k+1} tangenti doppie e $n_{k+2}+\rho_{k+1}$ flessi (anche qui ricordando il detto n. 10, per il quale i ρ_{k+1} S_{k+1} stazionarî sono tagliati dall'S_{r-k} in tangenti di flesso per $C^{(k)}$): e però

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} n_{k+1} &= n_k\;(n_k-1)\;-2d_k\;-3\rho_k\;-3n_{k-1} \\ n_k &= n_{k+1}(n_{k+1}-1)-2\delta_{k+1}-3\rho_{k+1}-3n_{k+2} \\ 3n_{k+1}-3n_k &= n_{k+2}+\rho_{k+1}-n_{k-1}-\rho_k\,. \end{aligned}\right.$$

Infine la proiezione piana di $C^{(r-2)}$, essendo di ordine n_{r-2}, di classe n_{r-1} ed avendo d_{r-2} punti doppî (numero degli S_{r-2} biosculatori), $n_{r-3}+\rho_{r-2}$ cuspidi, δ_{r-1} tangenti doppie e ρ_{r-1} flessi, dà

$$(7'')\qquad \left\{\begin{aligned} n_{r-1} &= n_{r-2}(n_{r-2}-1)-2d_{r-2}-3\rho_{r-2}-3n_{r-3} \\ n_{r-2} &= n_{r-1}(n_{r-1}-1)-2\delta_{r-1}-3\rho_{r-1} \\ 3n_{r-1}-3n_{r-2} &= \rho_{r-1}-n_{r-3}-\rho_{r-2}\,. \end{aligned}\right.$$

Le 3 formole (7), le $3(r-3)$ (7') e le 3 (7'') sono le $r-1$ terne di *formule di Veronese* tra $n\,,n_1\,,\ldots,n_{r-1}$; $d_0\,,d_1\,,\ldots,d_{r-2}$; $\delta_1\,,\delta_2\,,\ldots,\delta_{r-1}$; $\rho\,,\rho_1\,,\ldots,\rho_{r-1}$, che sono in tutto $4r-2$ caratteri. Dati $r+1$ di questi *convenientemente scelti*, per es. $\rho\,,\rho_1\,,\ldots,\rho_{r-2}\,,n\,,d_0$, si calcolano subito con quelle formule i rimanenti $3r-3$ caratteri.

CORREZIONI ED AGGIUNTE

Pag. 32, linea penultima — In luogo di $z^{(l)}$ leggasi: $z^{(i)}$.

„ 63, linea 9 — Dopo “ omografia „ aggiungasi: “ (che supponiamo non singolare: onde $|a_{ik}| \neq 0$) „.

„ 145, linea penultima — Una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema trovasi nel lavoro del dott. S. Medici citato in nota a pag. 115.

„ 164, linea 7 — Invece di “ combinazioni „ leggasi: “ disposizioni „.

„ 167, linea 24 — Aggiungasi: “ Se $r = 1$, invece delle ipersuperficie polari si hanno i *gruppi polari* rispetto ad un gruppo di punti „.

„ 199, linea 2 — Dopo le parole “ viene a passare „ si aggiunga: “ genericamente „.

„ 206, linea penultima — Invece di “ Cap. 1.° „ leggasi: “ Cap. 2.° „.

„ 224, linea 32 — Invece di “ 1.° ordine „ leggasi: “ 1.ª classe „.

„ 308, linea 6 — Invece di “ non proiettive da quelli di proprietà proiettive „ leggasi: “ della Geometria delle trasformazioni birazionali dalle proprietà della Geometria proiettiva „.

INDICE

CAPITOLO 1.°

Lo spazio S_r.

CAPITOLO 2.°

Lo spazio Σ_r e le sue relazioni coll'S_r.

Capitolo 3.°

Proiettività fra due S_r distinti.

CAPITOLO 4.°

Omografie di uno spazio S_r in sè.

Capitolo 5.°

Correlazioni di uno spazio S_r in sè.

Capitolo 6.°

Quadriche.

Capitolo 7.°

Fasci di quadriche.

Capitolo 8.°

Ipersuperficie.

CAPITOLO 9.°

Varietà in generale.

Capitolo 10.°

Sistemi lineari d' ipersuperficie.

Capitolo 11.°

Proprietà dei sistemi lineari rispetto alle varietà base. Formula di postulazione.

CAPITOLO 12.°

Curve razionali.

Capitolo 13.°

Superficie rigate razionali.

CAPITOLO 14.°

Le V_2^{r-1} di S_r.

CAPITOLO 15.°

La superficie di Veronese.

APPENDICE

Capitolo 1.°

Rami di una curva algebrica. Alcune proposizioni fondamentali relative ad essi.

Capitolo 2.°

Trasformazione quadratica.

Scomposizione di un punto multiplo di una curva piana.

CAPITOLO 3.°

Sul principio di corrispondenza.

Formula di Zeuthen. — Formule di Cayley e di Veronese.